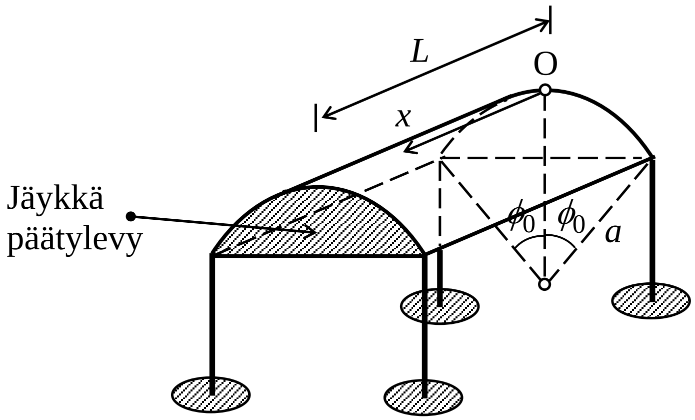
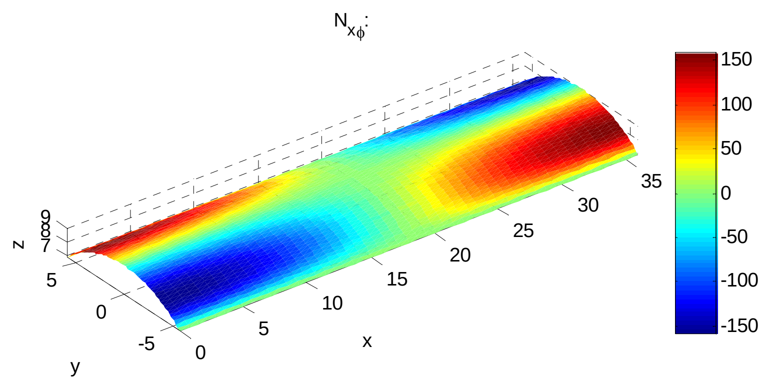
Rak-54.3100 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA III

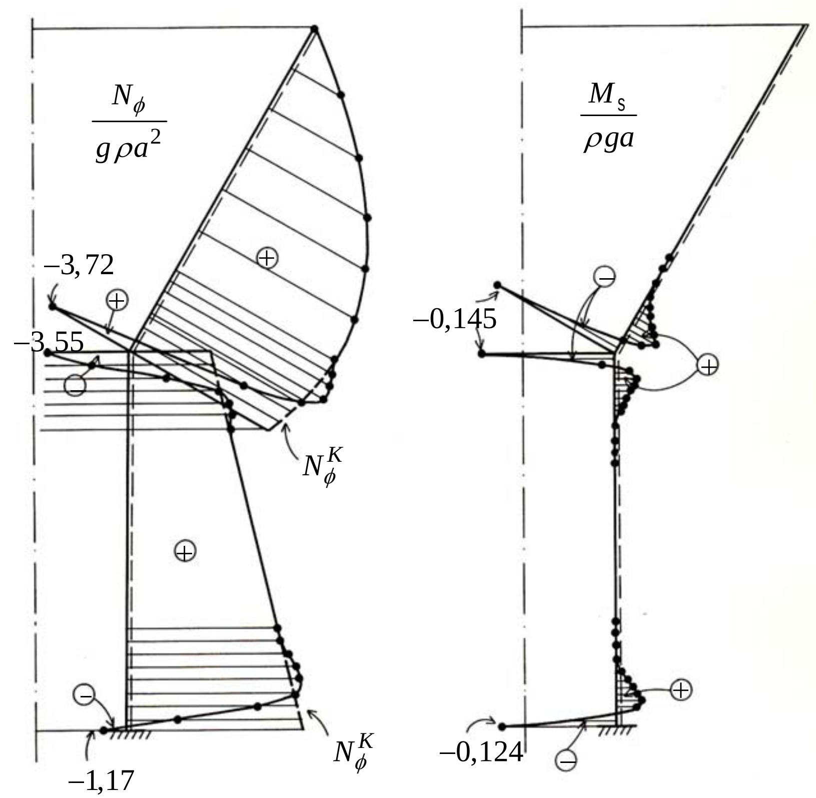
Luentomoniste

Osa II: Kuoriteoriaa

Jukka Aalto







TEKNILLINEN KORKEAKOULU
TEKNISKA HÖGSKOLAN
HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

1. Kuoren yhtälöt

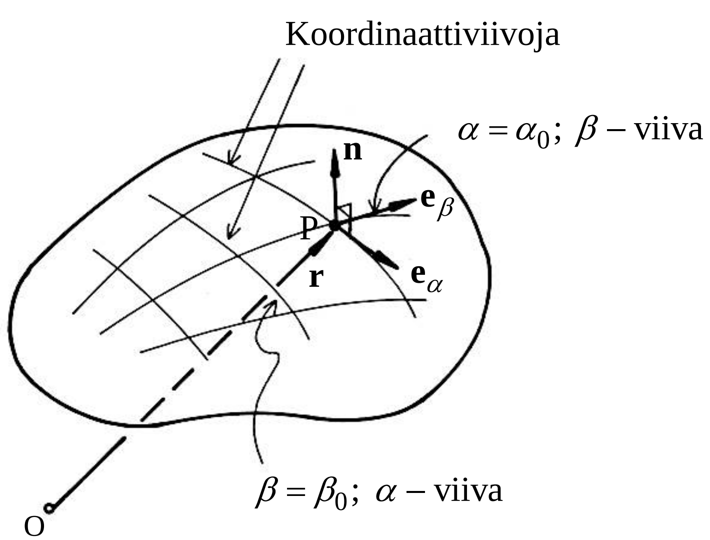
1.1 Pintojen geometriaa

1.11 Pinnan yhtälö

Pinnan vektorimuotoinen yhtälö on muotoa

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha,\beta) \equiv x(\alpha,\beta)\mathbf{i} + y(\alpha,\beta)\mathbf{j} + z(\alpha,\beta)\mathbf{k},} \tag{1.1}$$

missä $\mathbf{r}$ on pinnan yleisen pisteen P: (x,y,z) paikkavektori sekä α ja β pinnan **käyräviivaiset koordinaatit**. Jos koodinaattia α vaihdellaan koordinaatin β pysyessä vakiona syntyy viiva, jota kutsutaan $\alpha-$viivaksi. Jos taas koodinaattia β vaihdellaan koordinaatin α pysyessä vakiona syntyy viiva, jota kutsutaan $\beta-$viivaksi. Tällaisia viivoja kutsutaan pinnan **koordinaattiviivoiksi**. Piirtämällä parvi $\alpha-$ ja $\beta-$viivoja voidaan saada havainnollinen kuva pinnasta ja siihen liittyvästä käyräviivaisesta koordinaatistosta (Kuva 1.1).



Kuva 1.1: Pinnan käyräviivaiset koordinaatit α ja β, koordinaatti-viivojen suuntaiset yksikkövektorit $\mathbf{e}_\alpha$ ja $\mathbf{e}_\beta$ sekä yksikkönormaali-vektori $\mathbf{n}$

Merkitään koordinaatin α differentiaalista muutosta $d\alpha$ vastaavaa jana-alkion pituutta $\alpha-$viivalla symbolilla ds_α ja koordinaatin β muutosta

$d\beta$ vastaavaa jana-alkion pituutta $\beta-$viivalla symbolilla ds_β. **Mitta-kaavatekijät** eli Lame'n parametrit A ja B määritellään lausekkeilla

$$\boxed{ds_\alpha = Ad\alpha, \ \ ds_\beta = Bd\beta.} \tag{1.2}$$

Koordinaattien muutoksia $d\alpha$ ja $d\beta$ vastaava paikkavektorin $\mathbf{r}$ muutokset ovat

$$d\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha \equiv \mathbf{r},_\alpha d\alpha, \ d\mathbf{r}_\beta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} d\beta \equiv \mathbf{r},_\alpha d\beta. \tag{1.3}$$

Tässä paikkavektorin $\mathbf{r}$ osittaisderivaatoille otettiin käyttöön lyhennys-merkinnät[1] $\mathbf{r},_\alpha$ ja $\mathbf{r},_\beta$. Koska $ds_\alpha = |d\mathbf{r}_\alpha|$ ja $ds_\beta = |d\mathbf{r}_\beta|$ nähdään, että mittakaavatekijät ovat

$$\boxed{A = |\mathbf{r},_\alpha| = \sqrt{x,_\alpha^2 + y,_\alpha^2 + z,_\alpha^2}, \ B = |\mathbf{r},_\beta| = \sqrt{x,_\beta^2 + y,_\beta^2 + z,_\beta^2}.} \tag{1.4}$$

1.12 Koordinaattiviivojen suuntaiset yksikkövektorit, koordinaatti-viivojen välinen kulma ja pinnan yksikkönormaalivektori

$\alpha-$ ja $\beta-$viivojen suuntaisille yksikkövektoreilla (vrt. Kuva 1.1) saadaan

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{ds_\alpha} = \frac{d\mathbf{r}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds_\alpha} = \frac{1}{A}\frac{d\mathbf{r}}{d\alpha}, \ \mathbf{e}_\beta = \frac{d\mathbf{r}_\beta}{ds_\beta} = \frac{d\mathbf{r}}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{ds_\beta} = \frac{1}{B}\frac{d\mathbf{r}}{d\beta} \tag{1.5}$$

eli

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{e}_\alpha &= \frac{1}{A}\mathbf{r},_\alpha = \frac{1}{A}(x,_\alpha \mathbf{i} + y,_\alpha \mathbf{j} + z,_\alpha \mathbf{k}), \\ \mathbf{e}_\beta &= \frac{1}{B}\mathbf{r},_\beta \equiv \frac{1}{B}(x,_\beta \mathbf{i} + y,_\beta \mathbf{j} + z,_\beta \mathbf{k}). \end{aligned}} \tag{1.6}$$

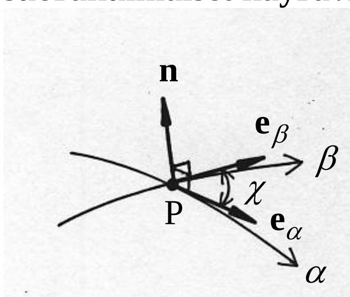
---

[1] Merkintäsysteemi on funktion $f(x,y)$ yhteydessä seuraava:
$f,_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}, \ f,_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}, \ f,_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ f,_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ f,_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, jne.

Koordinaattiviivojen välisen kulman χ (vrt. Kuva 1.2) kosinille saadaan

$$\cos\chi = \mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\beta = \frac{1}{AB}\mathbf{r},_\alpha \bullet \mathbf{r},_\beta \equiv \frac{1}{AB}(x,_\alpha x,_\beta + y,_\alpha y,_\beta + z,_\alpha z,_\beta). \quad (1.7)$$

Jos pinnan jokaisessa pisteessä $\cos\chi = 0$ eli $\chi = 90°$ on kysymyksessä **suorakulmaiset käyräviivaiset koordinaatit**.



Kuva 1.2: Koordinaattiviivojen välinen kulma χ

Koska yksikkövektorien $\mathbf{e},_\alpha$ ja $\mathbf{e},_\beta$ ristitulo on kohtisuorassa pintaa vastaan, saadaan pinnan **yksikkönormaalivektorille** (vrt. Kuva 1.2) lauseke

$$\boxed{\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta}{|\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta|} = \frac{\mathbf{r},_\alpha \times \mathbf{r},_\beta}{AB\sin\chi}}, \quad (1.8)$$

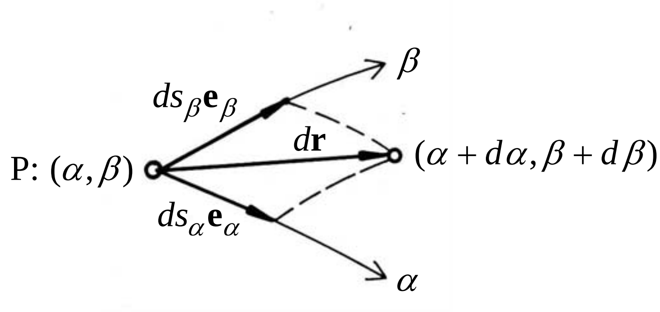
joka suorakulmaisten koordinaattien yhteydessä on

$$\mathbf{n} = \frac{1}{AB}\mathbf{r},_\alpha \times \mathbf{r},_\beta . \quad (1.9)$$

1.13 Jana-alkion pituus ja pinta-alkion pinta-ala

Käyräviivaisten koordinaattien α ja β muutoksia $d\alpha$ ja $d\beta$ vastaava paikkavektorin $\mathbf{r}$ muutos (vrt. Kuva 1.3) on

$$d\mathbf{r} = ds_\alpha \mathbf{e}_\alpha + ds_\beta \mathbf{e}_\beta = Ad\alpha\mathbf{e}_\alpha + Bd\beta\mathbf{e}_\beta \quad (1.10)$$



Kuva 1.3: Jana-alkion pituus

ja vastaavalle jana-alkion pituuden ds neliölle saadaan

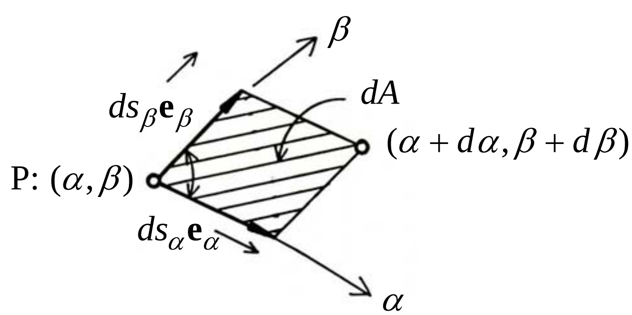
$$
\begin{aligned}
ds^2 &= d\mathbf{r} \bullet d\mathbf{r} = (A d\alpha \mathbf{e}_\alpha + B d\beta \mathbf{e}_\beta) \bullet (A d\alpha \mathbf{e}_\alpha + B d\beta \mathbf{e}_\beta) \\
&= A^2 d\alpha^2 \overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\alpha}^{1} + 2AB d\alpha d\beta \overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\beta}^{\cos\chi} + B^2 d\beta^2 \overbrace{\mathbf{e}_\beta \bullet \mathbf{e}_\beta}^{1} .
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Jana-alkion pituus on siten

$$
ds = \sqrt{A^2 d\alpha^2 + 2AB \cos\chi d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2} \tag{1.12}
$$

ja suorakulmaisessa koordinaatistossa

$$
ds = \sqrt{A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2} = \sqrt{ds_\alpha^2 + ds_\beta^2} . \tag{1.13}
$$



Kuva 1.4: Pinta-alkion pinta-ala

Koordinaattimuutoksia $d\alpha$ ja $d\beta$ vastaavalle pinta-alkiolle (vrt. Kuva 1.4) saadaan

$$
dA = | ds_\alpha \mathbf{e}_\alpha \times ds_\beta \mathbf{e}_\beta | = AB \overbrace{| \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta |}^{\sin\chi} d\alpha d\beta . \tag{1.14}
$$

Pinta-alkion pinta-ala on siis

$$dA = AB\sin\chi d\alpha d\beta\,. \tag{1.15}$$

ja suorakulmaisessa koordinaatistossa

$$dA = ABd\alpha d\beta = ds_\alpha ds_\beta\,. \tag{1.16}$$

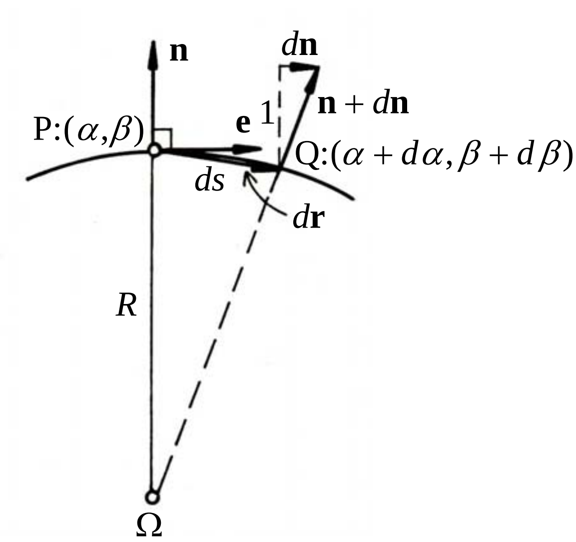
1.14 Pinnan kaarevuussäde ja kaarevuus

Tarkastellaan pistettä $\mathrm{P}:(\alpha,\beta)$ ja differentiaalisella etäisyydellä siitä olevaa pistettä $\mathrm{Q}:(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$. Pisteestä P pisteeseen Q suuntautuva pinnan yksikkötangenttivektori on tällöin

$$\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \tag{1.17}$$

Missä $d\mathbf{r}$ on pisteiden P ja Q paikkavektorien erotus ja *ds* on sen pituus. Pinnan yksikkönormaalivektorit pisteissä P ja Q ovat $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$. Kuva 1.5 esittää pinnan leikkausta vektorien $\mathbf{e}$ ja $\mathbf{n}$ määrittelemässä tasossa. Pinnan pisteeseen P liittyvä kaarevuuskeskipiste Ω määritellään kuvan 5 mukaisesti yksikkönormaalien $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$ jatkeiden leikkauspisteenä ja pinnan **kaarevuussäteen** R määrittämiseksi saadaan verranto

$$\frac{ds}{R} = \frac{d\mathbf{n}\bullet\mathbf{e}}{1}\,. \tag{1.18}$$



Kuva 1.5: Pinnan kaarevuussäde pisteessä P

Kaarevuussäteen käänteisarvolle, jota kutsutaan **kaarevuudeksi**, saadaan tästä

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \frac{d\mathbf{n}}{ds}\bullet\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{n}}{ds}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{n}\bullet d\mathbf{r}}{ds^2} \\
&= \frac{(\mathbf{n},_\alpha d\alpha + \mathbf{n},_\beta d\beta)\bullet(\mathbf{r},_\alpha d\alpha + \mathbf{r},_\beta d\beta)}{ds^2} \\
&= \frac{\mathbf{n},_\alpha\bullet\mathbf{r},_\alpha d\alpha^2 + (\mathbf{n},_\alpha\bullet\mathbf{r},_\beta + \mathbf{n},_\beta\bullet\mathbf{r},_\alpha)d\alpha d\beta + \mathbf{n},_\beta\bullet\mathbf{r},_\beta d\beta^2}{A^2 d\alpha^2 + 2AB\cos\chi d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2}
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

ja edelleen

$$
\frac{1}{R} = \frac{\dfrac{A^2}{R_\alpha}d\alpha^2 - 2\dfrac{AB}{R_{\alpha\beta}}d\alpha d\beta + \dfrac{B^2}{R_\beta}d\beta^2}{A^2 d\alpha^2 + 2AB\cos\chi d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2}
\tag{1.20}
$$

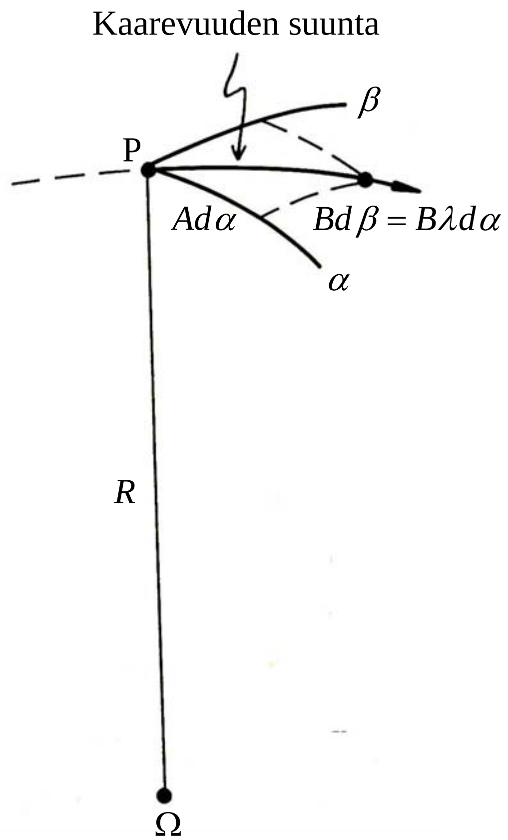
missä

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R_\alpha} &= \frac{1}{A^2}\mathbf{n},_\alpha\bullet\mathbf{r},_\alpha = -\frac{1}{A^2}\mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_{\alpha\alpha}\,, \\
\frac{1}{R_\beta} &= \frac{1}{B^2}\mathbf{n},_\beta\bullet\mathbf{r},_\beta = -\frac{1}{B^2}\mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_{\beta\beta}\,, \\
\frac{1}{R_{\alpha\beta}} &= -\frac{1}{AB}\mathbf{n},_\alpha\bullet\mathbf{r},_\beta = -\frac{1}{AB}\mathbf{n},_\beta\bullet\mathbf{r},_\alpha = \frac{1}{AB}\mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_{\alpha\beta}\,.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Jälkimmäiset yhtäsuuruudet esimerkiksi viimeisessä kaavassa näytetään todeksi seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&(\overbrace{\mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_\alpha}^{0}),_\beta = \mathbf{n},_\beta\bullet\mathbf{r},_\alpha + \mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_{\alpha\beta} \;\Rightarrow\; \mathbf{n},_\beta\bullet\mathbf{r},_\alpha = -\mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_{\alpha\beta}\,, \\
&(\overbrace{\mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_\beta}^{0}),_\alpha = \mathbf{n},_\alpha\bullet\mathbf{r},_\beta + \mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_{\beta\alpha} \;\Rightarrow\; \mathbf{n},_\alpha\bullet\mathbf{r},_\beta = -\mathbf{n}\bullet\mathbf{r},_{\alpha\beta}\,.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Kaarevuuden lausekkeesta saadaan $\alpha-$viivan $(d\beta = 0)$ suunnassa $1/R = 1/R_\alpha$ ja $\beta-$viivan $(d\beta = 0)$ suunnassa $1/R = 1/R_\alpha$. $1/R_\alpha$ ja $1/R_\beta$ ovat siis kaarevuudet $\alpha-$ ja $\beta-$viivojen suunnissa ja $1/R_{\alpha\beta}$ on niin sanottu **kierevyys** ja $R_{\alpha\beta}$ on **kierevyyssäde**. Pinnan kaarevuutta ja sen suuntaa on havainnollistettu kuvassa 6.



Kuva 1.6: Pinnan kaarevuus ja sen suunta

1.15 Pääkaarevuudet

Ilmaistaan kaarevuuden $1/R$ suunta suhteena

$$\lambda = \frac{d\beta}{d\alpha}, \tag{1.23}$$

jolloin kaarevuus suhteen λ määrittelemään suuntaan (vrt. Kuva 1.6) on

$$\frac{1}{R} = \frac{\dfrac{A^2}{R_\alpha} - 2\dfrac{AB}{R_{\alpha\beta}}\lambda + \dfrac{B^2}{R_\beta}\lambda^2}{A^2 + 2AB\cos\chi\,\lambda + B^2\lambda^2}. \tag{1.24}$$

Etsitään nyt kaarevuuden $1/R$ ääriarvot. Lauseke (1.24) saadaan muotoon

$$B^2\left(\frac{1}{R_\beta}-\frac{1}{R}\right)\lambda^2-2AB\left(\frac{1}{R_{\alpha\beta}}+\frac{\cos\chi}{R}\right)\lambda+A^2\left(\frac{1}{R_\alpha}-\frac{1}{R}\right)=0. \qquad (1.25)$$

Se on toisen asteen yhtälö suhteelle λ. Ääriarvoa vastaavassa suunnassa, tulee yhtälön (1.25) diskriminantin D hävitä (ko. ääriarvo saadaan vain yhdessä suunnassa). Diskriminantti on

$$D=4A^2B^2\left(\frac{1}{R_{\alpha\beta}}+\frac{\cos\chi}{R}\right)^2-4A^2B^2\left(\frac{1}{R_\beta}-\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{R_\alpha}-\frac{1}{R}\right) \qquad (1.26)$$

ja sen häviämisehto saa muodon

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R^2}-\frac{1}{\sin^2\chi}\left(\frac{1}{R_\beta}+\frac{1}{R_\alpha}+2\frac{\cos\chi}{R_{\alpha\beta}}\right)\frac{1}{R}\\&\quad+\frac{1}{\sin^2\chi}\left(\frac{1}{R_\alpha R_\beta}-\frac{1}{R_{\alpha\beta}{}^2}\right)=0\end{aligned} \qquad (1.27)$$

Kun otetaan käyttöön merkinnät

$$\boxed{\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\chi}\left(\frac{1}{R_\beta}+\frac{1}{R_\alpha}+2\frac{\cos\chi}{R_{\alpha\beta}}\right),\\K&=\frac{1}{\sin^2\chi}\left(\frac{1}{R_\alpha R_\beta}-\frac{1}{R_{\alpha\beta}{}^2}\right),\end{aligned}} \qquad (1.28)$$

yhtälö (1.27) saa muodon

$$\frac{1}{R^2}-2H\frac{1}{R}+K=0. \qquad (1.29)$$

Se on siis toisen asteen yhtälö kaarevuuden ääriarvojen määrittämiseksi ja sen ratkaisu on

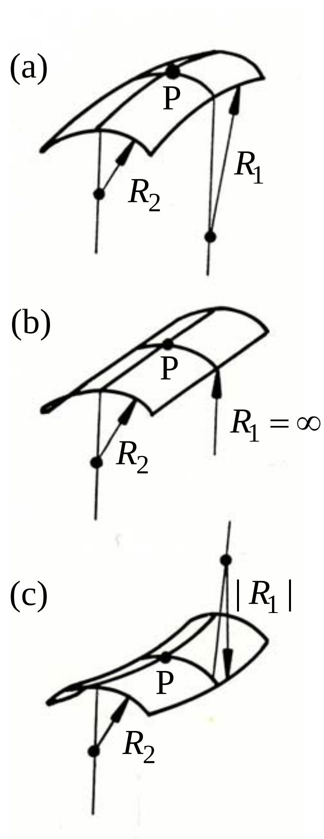
$$\boxed{\frac{1}{R_1}=H+\sqrt{H^2-K},\ \frac{1}{R_2}=H-\sqrt{H^2-K}}. \qquad (1.30)$$

Nämä ovat kuoren pääkaarevuudet tarkasteltavassa pisteessä. Pääkaarevuuksia λ_i, $i=1,2$ vastaava pääsuunnat saadaan yhtälöstä Vastaavat pääsuunnat saadaan sijoittamalla pääkaarevuus $1/R_i$ yhtälöön (1.25) ja ratkaisemalla se[2]

$$\boxed{\lambda_i = \frac{A}{B}\frac{\dfrac{1}{R_{\alpha\beta}} + \dfrac{\cos\chi}{R_i}}{\dfrac{1}{R_\beta} - \dfrac{1}{R_i}}}. \tag{1.31}$$

Parametreille H ja K saadaan geometrinen merkitys muodostamalla pääkaarevuuksien (1.30) summa ja tulo, jolloin saadaan

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),\ K = \frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}. \tag{1.32}$$



Kuva 1.7: (a) Elliptinen, (b) parabolinen ja (c) hyperbolinen pinta

[2] Pitäen mielessä, että diskriminantti D häviää.

Näin H on pääkaarevuuksien keskiarvo, jota kutsutaan **keskikaarevuudeksi**, ja K on pääkaarevuuksien tulo, jota kutsutaan **Gaussin kaarevuusmitaksi**.

Kaarevuuden pääsuunnat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Viivat, jotka sivuavat pääsuuntia jokaisessa pisteessä ovat pinnan **kaarevuusviivoja**. Ne muodostavat suorakulmaisen viivaparven pinnalla ja niiden muodostamaa käyräviivaista koordinaatistoa kutsutaan **pääkaarevuuskoordinaatistoksi**.

1.16 Pinnan tyyppi

Pinnan tyyppi tarkasteltavan pisteen P ympäristössä jaotellaan Gaussin kaarevuusmitan K arvon mukaan seuraavasti:

- Kun $K > 0$, jolloin $1/R_1$ ja $1/R_2$ ovat samanmerkkiset, pinta on **elliptinen** (vrt. Kuva 1.7a).
- Kun $K = 0$, jolloin $1/R_1 = 0$ tai $1/R_2 = 0$, pinta on **parabolinen** (vrt. Kuva 1.7b).
- Kun $K < 0$, jolloin $1/R_1$ ja $1/R_2$ ovat erimerkkiset, pinta on **hyperbolinen** (vrt. Kuva 1.7c).

1.17 Apukaavoja

Seuraavassa esitellään pintojen geometriaan liittyviä kaavoja, joita käytetään jatkossa apuna kuoren yhtälöitä johdettaessa. Tarkastelu tapahtuu suorakulmaisessa käyräviivaisessa koordinaatistossa. Derivoidaan aluksi paikkavektori $\mathbf{r}$ osittain α ja β suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{r},_{\alpha\beta} &= (\mathbf{r},_\alpha),_\beta = (A\mathbf{e}_\alpha),_\beta = A,_\beta \mathbf{e}_\alpha + A\mathbf{e}_\alpha,_\beta \\ &= (\mathbf{r},_\beta),_\alpha = (B\mathbf{e}_\beta),_\alpha = B,_\alpha \mathbf{e}_\beta + B\mathbf{e}_\beta,_\alpha . \end{aligned} \tag{1.33}$$

Näin saatiin yhtälö

$$A,_\beta \mathbf{e}_\alpha + A\mathbf{e}_\alpha,_\beta = B,_\alpha \mathbf{e}_\beta + B\mathbf{e}_\beta,_\alpha . \tag{1.34}$$

<u>Yksikkövektoreiden derivaattoja:</u>

Seuraavassa muodostetaan yksikkövektoreiden $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_\beta$ ja $\mathbf{n}$ ensimmäisten osittaisderivaattojen lausekkeet. Esimerkiksi $\mathbf{e}_\alpha$ derivaatta $\mathbf{e}_{\alpha,\alpha}$ määritetään muodostamalla sen komponenttien lausekkeet. Niille saadaan

$$(\mathbf{e}_\alpha,_\alpha)_\alpha = \mathbf{e}_\alpha,_\alpha \bullet \mathbf{e}_\alpha = 0 \tag{1.35a}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_\alpha,_\alpha)_\beta &= \mathbf{e}_\alpha,_\alpha \bullet \mathbf{e}_\beta = (\overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\beta}^{0}),_\alpha - \mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\beta,_\alpha \\ &= -\mathbf{e}_\alpha \bullet \frac{1}{B}(A,_\beta \mathbf{e}_\alpha + A\mathbf{e}_\alpha,_\beta - B,_\alpha \mathbf{e}_\beta) \\ &= -\frac{1}{B}(A,_\beta \overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\alpha}^{1} + A\overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\alpha,_\beta}^{0} - B,_\alpha \overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\beta}^{0}) \\ &= -\frac{A,_\beta}{B} \end{aligned} \tag{1.35b}$$

$$(\mathbf{e}_\alpha,_\alpha)_n = \mathbf{e}_\alpha,_\alpha \bullet \mathbf{n} = (\overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{n}}^{0}),_\alpha - \mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{n},_\alpha = -\frac{1}{A}\overbrace{\mathbf{r},_\alpha \bullet \mathbf{n},_\alpha}^{A^2/R_\alpha} = -\frac{A}{R_\alpha} . \tag{1.35c}$$

Käytettiin hyväksi tulon derivointisääntöä, koordinaatiston suorakulmaisuutta, jonka vuoksi $\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{n} = 0$, yksikkövektorin ja sen derivaatan kohtisuoruutta, jonka vuoksi $\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_{\alpha,\beta} = 0$ sekä kaavaa (1.34). Näin saadaan derivaatalle $\mathbf{e}_{\alpha,\alpha}$ tulos

$$\mathbf{e}_{\alpha,\alpha} = -\frac{A_{,\beta}}{B}\mathbf{e}_\beta - \frac{A}{R_\alpha} \tag{1.36}$$

Vastaavalla periaatteella voidaan johtaa muut **yksikkövektoreiden osittaisderivaattojen kaavat**. Tulos kokonaisuudessaan on

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{\alpha,\alpha} = -\frac{A_{,\beta}}{B}\mathbf{e}_\beta - \frac{A}{R_\alpha}\mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_{\alpha,\beta} = \frac{B_{,\alpha}}{A}\mathbf{e}_\beta + \frac{B}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{n}, \\
&\mathbf{e}_{\beta,\alpha} = \frac{A_{,\beta}}{B}\mathbf{e}_\alpha + \frac{A}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_{\beta,\beta} = -\frac{B_{,\alpha}}{A}\mathbf{e}_\alpha - \frac{B}{R_\beta}\mathbf{n}, \\
&\mathbf{n}_{,\alpha} = \frac{A}{R_\alpha}\mathbf{e}_\alpha - \frac{A}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_\beta, \quad \mathbf{n}_{,\beta} = -\frac{B}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_\alpha + \frac{B}{R_\beta}\mathbf{e}_\beta.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Kun kysymyksessä on pääkaarevuuskoordinaatisto, jossa $1/R_{\alpha\beta} = 0$, kaavat (1.37) yksinkertaistuvan hieman muotoon

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{\alpha,\alpha} = -\frac{A_{,\beta}}{B}\mathbf{e}_\beta - \frac{A}{R_\alpha}\mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_{\alpha,\beta} = \frac{B_{,\alpha}}{A}\mathbf{e}_\beta, \\
&\mathbf{e}_{\beta,\alpha} = \frac{A_{,\beta}}{B}\mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{e}_{\beta,\beta} = -\frac{B_{,\alpha}}{A}\mathbf{e}_\alpha - \frac{B}{R_\beta}\mathbf{n}, \\
&\mathbf{n}_{,\alpha} = \frac{A}{R_\alpha}\mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{n}_{,\beta} = \frac{B}{R_\beta}\mathbf{e}_\beta.
\end{aligned}} \tag{1.38}$$

<u>Codazzin kaavat:</u>

Tarkastellaan pintaa pääkaarevuuskoordinaatistossa. Derivoidaan yksikkönormaalivektori **n** osittain koordinaattien α ja β suhteen eri järjestyksessä, jolloin saadaan

$$\mathbf{n},_{\alpha\beta} = (\mathbf{n},_{\alpha}),_{\beta} = (\frac{A}{R_\alpha}\mathbf{e}_\alpha),_{\beta} = (\frac{A}{R_\alpha}),_{\beta}\mathbf{e}_\alpha + \frac{A}{R_\alpha}\overbrace{\mathbf{e}_\alpha,_{\beta}}^{B,_\alpha/A\mathbf{e}_\beta}$$
$$= (\frac{A}{R_\alpha}),_{\beta}\mathbf{e}_\alpha + \frac{B,_\alpha}{R_\alpha}\mathbf{e}_\beta, \tag{1.39a}$$

ja

$$\mathbf{n},_{\alpha\beta} = (\mathbf{n},_{\beta}),\alpha = (\frac{B}{R_\beta}\mathbf{e}_\beta),_{\alpha} = (\frac{B}{R_\beta}),_{\beta}\mathbf{e}_\beta + \frac{B}{R_\beta}\overbrace{\mathbf{e}_\alpha,_{\beta}}^{A,_\beta/B\mathbf{e}_\alpha}$$
$$= (\frac{B}{R_\beta}),_{\alpha}\mathbf{e}_\beta + \frac{A,_\beta}{R_\beta}\mathbf{e}_\alpha. \tag{1.39b}$$

Merkitsemällä vastinkomponentit kaavojen (1.39a ja (1.39b) oikeat puolet yhtäsuuriksi saadaan yhteydet

$$\boxed{(\frac{A}{R_\alpha}),_{\beta} = \frac{A,_\beta}{R_\beta},\ (\frac{B}{R_\beta}),_{\alpha} = \frac{B,_\alpha}{R_\alpha}.} \tag{1.41}$$

Näitä kutsutaan **Codazzin kaavoiksi**.

Gaussin kaava:

Tarkastellaan pintaa pääkaarevuuskoordinaatistossa. Derivoidaan yksikkövektori $\mathbf{e}_\alpha$ osittain koordinaattien α ja β suhteen eri järjestyksessä, jolloin saadaan

$$\mathbf{e}_\alpha,_{\alpha\beta} = (\mathbf{e}_\alpha,_{\alpha}),_{\beta} = (-\frac{A,_\beta}{B}\mathbf{e}_\beta - \frac{A}{R_\alpha}\mathbf{n}),_{\beta}$$
$$= -(\frac{A,_\beta}{B}),_{\beta}\mathbf{e}_\beta - \frac{A,_\beta}{B}\overbrace{\mathbf{e}_\beta,_{\beta}}^{-\frac{B,_\alpha}{A}\mathbf{e}_\alpha - \frac{B}{R_\beta}\mathbf{n}} - (\frac{A}{R_\alpha}),_{\beta}\mathbf{n} - \frac{A}{R_\alpha}\overbrace{\mathbf{n},_{\beta}}^{B/R_\beta\mathbf{e}_\beta} \tag{1.42a}$$
$$= \frac{A,_\beta B,_\alpha}{AB}\mathbf{e}_\alpha - [(\frac{A,_\beta}{B}),_{\beta} + \frac{AB}{R_\alpha R_\beta}]\mathbf{e}_\beta + [\overbrace{\frac{A,_\beta}{R_\beta} - (\frac{A}{R_\alpha}),_{\beta}}^{0,\ \text{Codazzi}}]\mathbf{n}$$
$$= \frac{A,_\beta B,_\alpha}{AB}\mathbf{e}_\alpha - \underline{[(\frac{A,_\beta}{B}),_{\beta} + \frac{AB}{R_\alpha R_\beta}]}\mathbf{e}_\beta$$

$$\mathbf{e}_{\alpha},_{\alpha\beta} = (\mathbf{e}_{\alpha},_{\beta}),_{\alpha} = (\frac{B,_{\alpha}}{A}\mathbf{e}_{\beta}),_{\alpha} = (\frac{B,_{\alpha}}{A}),_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta} + \frac{B,_{\alpha}}{A}\overbrace{\mathbf{e}_{\beta},_{\alpha}}^{A,_{\beta}/B\mathbf{e}_{\alpha}}$$

$$= \frac{A,_{\beta}B,_{\alpha}}{AB}\mathbf{e}_{\alpha} + \underline{(\frac{B,_{\alpha}}{A}),_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}} \tag{1.42b}$$

Merkitsemällä lausekkeiden (1.42a) ja (1.42b) oikeiden puolten alleviivatut termit yhtäsuuriksi saadaan

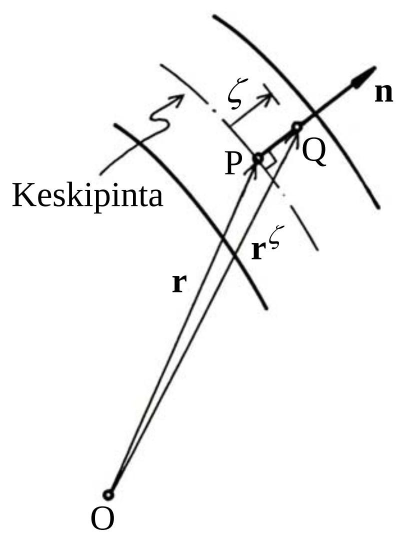
$$\boxed{(\frac{B,_{\alpha}}{A}),_{\alpha} + (\frac{A,_{\beta}}{B}),_{\beta} = -\frac{AB}{R_{\alpha}R_{\beta}}} \tag{1.43}$$

Tätä kaavaa kutsutaan **Gaussin kaavaksi**.

1.2 Kuoren geometriaa

1.21 Tavoite

Otaksutaan seuraavassa kuoren keskipinnan (Kuva 1.7, piste P) geometriset suureet A, B, $\chi = 90°$, R_α, R_β ja $R_{\alpha\beta}$ tunnetuiksi ja määritetään niiden arvot A^ζ, B^ζ, χ^ζ, R_α^ζ, R_β^ζ ja $R_{\alpha\beta}^\zeta$ etäisyydellä ζ keskipinnasta (piste Q).



Kuva 1.7: Kuoren geometriaa

1.22 Mittakaavatekijät ja koordinaattiviivojen välinen kulma

Pisteen Q paikkavektori on

$$\mathbf{r}^\zeta = \mathbf{r} + \zeta \mathbf{n}. \tag{1.44}$$

Sen osittaisderivaatalle koordinaatin α suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{r},_\alpha^\zeta &= \mathbf{r},_\alpha + \zeta \mathbf{n},_\alpha = A\mathbf{e}_\alpha + \zeta\left(\frac{A}{R_\alpha}\mathbf{e}_\alpha - \frac{A}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_\beta\right) \\ &= A\left[\left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)\mathbf{e}_\alpha - \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_\beta\right]. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Mittakaavatekijälle A^{ζ} saadaan nyt

$$A^{\zeta} = |\mathbf{r}_{\alpha}^{\zeta}| = A\sqrt{(1+\frac{\zeta}{R_{\alpha}})^2 + (\frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}})^2} \approx A(1+\frac{\zeta}{R_{\alpha}}) \tag{1.46}$$

Mittakaavatekijä B^{ζ} saadaan vastaavasti, joten mittakaavatekijät pisteessä Q ovat

$$A^{\zeta} = A(1+\frac{\zeta}{R_{\alpha}}),\ B^{\zeta} = B(1+\frac{\zeta}{R_{\beta}})\,. \tag{1.47}$$

Yksikkövektorille $\mathbf{e}_{\alpha}^{\zeta}$ saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{\alpha}^{\zeta} &= \frac{1}{A^{\zeta}}\mathbf{r},_{\alpha}^{\zeta} = \frac{1}{A(1+\frac{\zeta}{R_{\alpha}})}A[(1+\frac{\zeta}{R_{\alpha}})\mathbf{e}_{\alpha} - \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\beta}] = \mathbf{e}_{\alpha} - \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\frac{1}{(1+\frac{\zeta}{R_{\alpha}})}\mathbf{e}_{\beta} \\ &= \mathbf{e}_{\alpha} - \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}[1-\frac{\zeta}{R_{\alpha}} + (\frac{\zeta}{R_{\alpha}})^2 \cdots]\mathbf{e}_{\beta} \approx \mathbf{e}_{\alpha} - \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\beta}\end{aligned} \tag{1.48}$$

Yksikkövektori $\mathbf{e}_{\beta}^{\zeta}$ saadaan vastaavasti, joten yksikkövektorit ovat

$$\mathbf{e}_{\alpha}^{\zeta} = \mathbf{e}_{\alpha} - \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\beta},\ \mathbf{e}_{\beta}^{\zeta} = \mathbf{e}_{\beta} - \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\alpha}\,. \tag{1.49}$$

Koordinaattiviivojen väliselle kulmalle saadaan nyt

$$\begin{aligned}\cos\chi^{\zeta} &= \mathbf{e}_{\alpha}^{\zeta}\bullet\mathbf{e}_{\beta}^{\zeta} = (\mathbf{e}_{\alpha} - \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\beta})\bullet(\mathbf{e}_{\beta} - \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\alpha}) \\ &= \overbrace{\mathbf{e}_{\alpha}\bullet\mathbf{e}_{\beta}}^{0} - (\overbrace{\mathbf{e}_{\alpha}\bullet\mathbf{e}_{\alpha}}^{1} + \overbrace{\mathbf{e}_{\beta}\bullet\mathbf{e}_{\beta}}^{1})\frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}} + \frac{\zeta^2}{R_{\alpha\beta}^2}\overbrace{\mathbf{e}_{\beta}\bullet\mathbf{e}_{\alpha}}^{0}\end{aligned} \tag{1.50}$$

eli

$$\cos\chi^{\zeta} = -\frac{2\zeta}{R_{\alpha\beta}}\,. \tag{1.51}$$

Kaarevuusviivojen muodostamassa koordinaatistossa, jossa $1/R_{\alpha\beta}=0$, saadaan $\cos\chi^{\zeta}=0$ eli $\chi^{\zeta}=90°$.

1.23 Kaarevuudet ja kierevyys

Yksikkövektoreiden $\mathbf{e}_{\alpha}^{\zeta}$ ja $\mathbf{e}_{\beta}^{\zeta}$ ristitulolle saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{\alpha}^{\zeta}\times\mathbf{e}_{\beta}^{\zeta}&=(\mathbf{e}_{\alpha}-\frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\beta})\times(\mathbf{e}_{\beta}-\frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\alpha})\\&=\mathbf{e}_{\alpha}\times\mathbf{e}_{\beta}-(\overbrace{\mathbf{e}_{\alpha}\times\mathbf{e}_{\alpha}}^{\mathbf{0}}+\overbrace{\mathbf{e}_{\beta}\times\mathbf{e}_{\beta}}^{\mathbf{0}})\frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}+\frac{\overbrace{\zeta^2}^{\approx 0}}{R_{\alpha\beta}^2}\mathbf{e}_{\beta}\times\mathbf{e}_{\alpha}\\&\approx\mathbf{e}_{\alpha}\times\mathbf{e}_{\beta}.\end{aligned}\tag{1.52}$$

Yksikkönormaalivektorille $\mathbf{n}^{\zeta}$ saadaan

$$\mathbf{n}^{\zeta}=\frac{\mathbf{e}_{\alpha}^{\zeta}\times\mathbf{e}_{\beta}^{\zeta}}{|\mathbf{e}_{\alpha}^{\zeta}\times\mathbf{e}_{\beta}^{\zeta}|}=\frac{\mathbf{e}_{\alpha}\times\mathbf{e}_{\beta}}{|\mathbf{e}_{\alpha}\times\mathbf{e}_{\beta}|}=\mathbf{n}\tag{1.53}$$

Kaarevuudelle $1/R_{\alpha}^{\zeta}$ saadaan nyt

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{\alpha}^{\zeta}}&=\frac{1}{(A^{\zeta})^2}\mathbf{n},_{\alpha}^{\zeta}\bullet\mathbf{r},_{\alpha}^{\zeta}=\frac{1}{(A^{\zeta})^2}(\frac{A}{R_{\alpha}}\mathbf{e}_{\alpha}-\frac{A}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\beta})\bullet A^{\zeta}\mathbf{e}_{\alpha}^{\zeta}\\&=\frac{1}{A^{\zeta}}(\frac{A}{R_{\alpha}}\mathbf{e}_{\alpha}-\frac{A}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\beta})\bullet(\mathbf{e}_{\alpha}-\frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\mathbf{e}_{\beta})=\frac{A}{A^{\zeta}}(\frac{1}{R_{\alpha}}\overbrace{\mathbf{e}_{\alpha}\bullet\mathbf{e}_{\alpha}}^{1}\\&\qquad-\frac{\zeta}{R_{\alpha}R_{\alpha\beta}}\overbrace{\mathbf{e}_{\alpha}\bullet\mathbf{e}_{\beta}}^{0}-\frac{1}{R_{\alpha\beta}}\overbrace{\mathbf{e}_{\beta}\bullet\mathbf{e}_{\alpha}}^{0}+\frac{1}{R_{\alpha\beta}}\frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}}\overbrace{\mathbf{e}_{\beta}\bullet\mathbf{e}_{\beta}}^{1})\\&=\frac{1}{1+\dfrac{\zeta}{R_{\alpha}}}(\frac{1}{R_{\alpha}}+\frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}^2})\end{aligned}\tag{1.54}$$

Kaarevuus $1/R_{\beta}^{\zeta}$ ja kierevyys $1/R_{\alpha\beta}^{\zeta}$ saadaan vastaavasti. Näin kaarevuudet ja kierevyys ovat

$$\frac{1}{R_\alpha^\zeta} = \frac{1}{1+\dfrac{\zeta}{R_\alpha}}\left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}^2}\right),$$

$$\frac{1}{R_\beta^\zeta} = \frac{1}{1+\dfrac{\zeta}{R_\beta}}\left(\frac{1}{R_\beta} + \frac{\zeta}{R_{\alpha\beta}^2}\right), \qquad (1.55)$$

$$\frac{1}{R_{\alpha\beta}^\zeta} = \frac{1}{R_{\alpha\beta}}.$$

Pääkaarevuuskoordinaatistossa, jossa $1/R_{\alpha\beta} = 0$, nämä lausekkeet yksinkertaistuvat muotoon

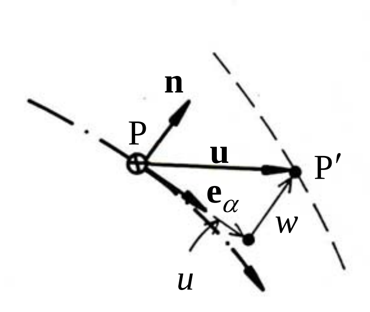
$$\frac{1}{R_\alpha^\zeta} = \frac{1}{R_\alpha + \zeta}, \quad \frac{1}{R_\beta^\zeta} = \frac{1}{R_\beta + \zeta}, \quad \frac{1}{R_{\alpha\beta}^\zeta} = \frac{1}{R_{\alpha\beta}}. \qquad (1.56)$$

1.3 Keskipinnan siirtymät, kiertymät, venymät ja liukuma

1.31 Keskipinnan siirtymävektori ja sen osittaisderivaatat

Tarkastelu tapahtuu pääkaarevuuskoordinaatistossa, jossa $\chi = 90°$ ja $1/R_{\alpha\beta} = 0$. Kuoren keskipinnan pisteen P siirtymävektori pisteeseen P' on (vrt. Kuva 1.8)

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_\alpha + v\mathbf{e}_\beta + w\mathbf{n}, \tag{1.57}$$



Kuva 1.8: Kuoren keskipinnan siirtymävektori

missä u ja v ovat keskipinnan suuntaiset siirtymät ja w on sitä vastaan kohtisuora siirtymä, jota voidaan kutsua myös taipumaksi. Siirtymävektorin osittaisderivaatalle koordinaatin α suhteen saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{u},_\alpha &= (u\mathbf{e}_\alpha),_\alpha + (v\mathbf{e}_\beta),_\alpha + (w\mathbf{n}),_\alpha \\ &= u,_\alpha \mathbf{e}_\alpha + u\mathbf{e}_\alpha,_\alpha + v,_\alpha \mathbf{e}_\beta + v\mathbf{e}_\beta,_\alpha + w,_\alpha \mathbf{n} + w\mathbf{n},_\alpha .\end{aligned} \tag{1.58}$$

Yksikkövektorit $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_\beta$ ja $\mathbf{n}$ derivaatat eivät siis ole nollia, kuten suorakulmaisessa karteesisessa koordinaatistossa, vaan niillä on kaavojen (1.38) mukaiset lausekkeet. Käyttämällä niitä kaava (1.58) saa muodon

$$\mathbf{u},_\alpha = (u,_\alpha + \frac{A,_\beta}{B}v + \frac{A}{R_\alpha}w)\mathbf{e}_\alpha + (v,_\alpha - \frac{A,_\beta}{B}u)\mathbf{e}_\beta + (w,_\alpha - \frac{A}{R_\alpha}u)\mathbf{n} . \tag{1.59}$$

Siirtymävektorin osittaisderivaatalle koordinaatin β suhteen saadaan vastaava lauseke. Nämä lausekkeet esitetään tässä lyhyemmässä muodossa seuraavasti

$$\mathbf{u},_\alpha = A(\varepsilon_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \omega_\alpha \mathbf{e}_\beta + \theta_\alpha \mathbf{n}), \quad \mathbf{u},_\beta = B(\omega_\beta \mathbf{e}_\alpha + \varepsilon_\beta \mathbf{e}_\beta + \theta_\beta \mathbf{n}), \tag{1.60}$$

missä

$$\boxed{\varepsilon_\alpha = \frac{u,_\alpha}{A} + \frac{A,_\beta v}{AB} + \frac{w}{R_\alpha}, \ \varepsilon_\beta = \frac{v,_\beta}{B} + \frac{B,_\alpha u}{AB} + \frac{w}{R_\beta},} \tag{1.70}$$

$$\omega_\alpha = \frac{v,_\alpha}{A} - \frac{A,_\beta u}{AB}, \quad \omega_\beta = \frac{u,_\beta}{B} - \frac{B,_\alpha v}{AB}, \tag{1.71}$$

$$\boxed{\theta_\alpha = \frac{w,_\alpha}{A} - \frac{u}{R_\alpha}, \quad \theta_\beta = \frac{w,_\beta}{B} - \frac{v}{R_\beta}.} \tag{1.72}$$

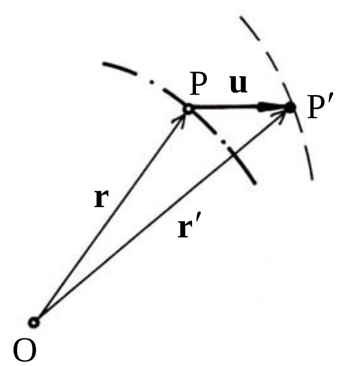
1.32 Deformoituneen tilan geometriaa

Deformoituneen keskipinnan pisteen P' paikkavektori on (vrt. Kuva 1.9)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u} \,. \tag{1.73}$$

Sen osittaisderivaatalle koordinaatin α suhteen saadaan

$$\mathbf{r}',_\alpha = \mathbf{r},_\alpha + \mathbf{u},_\alpha = A[(1+\varepsilon_\alpha)\mathbf{e}_\alpha + \omega_\alpha \mathbf{e}_\beta + \theta_\alpha \mathbf{n}] \tag{1.74}$$



Kuva 1.9: Deformoituneen keskipinnan pisteen P' paikkavektori $\mathbf{r}'$

ja deformoituneen keskipinnan mittakaavatekijälle A'

$$A' = |\mathbf{r}',_\beta| = A\sqrt{(1+\varepsilon_\alpha)^2 + {\omega_\alpha}^2 + {\theta_\alpha}^2} \approx A(1+\varepsilon_\alpha)\,. \tag{1.75}$$

Deformoituneen keskipinnan $\alpha-$viivan suuntaiselle yksikkövektorille saadaan nyt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}'_\alpha &= \frac{1}{A'}\mathbf{r}'_{,\alpha} = \frac{1}{1+\varepsilon_\alpha}[(1+\varepsilon_\alpha)\mathbf{e}_\alpha + \omega_\alpha \mathbf{e}_\beta + \theta_\alpha \mathbf{n}] \\
&\approx \mathbf{e}_\alpha + \omega_\alpha \mathbf{e}_\beta + \theta_\alpha \mathbf{n}.
\end{aligned}
\tag{1.76}
$$

Vastaavat tulokset saadaan mittakaavatekijälle B' ja yksikkövektorille $\mathbf{e}'_\beta$. Nämä tulokset koottuina ovat

$$
A' = A(1+\varepsilon_\alpha), \quad B' = B(1+\varepsilon_\beta) \tag{1.77}
$$

ja

$$
\mathbf{e}'_\alpha = \mathbf{e}_\alpha + \omega_\alpha \mathbf{e}_\beta + \theta_\alpha \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}'_\beta = \mathbf{e}_\beta + \omega_\beta \mathbf{e}_\alpha + \theta_\beta \mathbf{n}. \tag{1.78}
$$

Deformoituneen poikkipinnan koordinaattiviivojen väliselle kulmalle saadaan

$$
\cos\chi' = \mathbf{e}'_\alpha \bullet \mathbf{e}'_\beta = \omega_\alpha + \omega_\beta + \theta_\alpha\theta_\beta \approx \omega_\alpha + \omega_\beta \tag{1.79}
$$

Kantavektoreiden ristitulolle saadaan

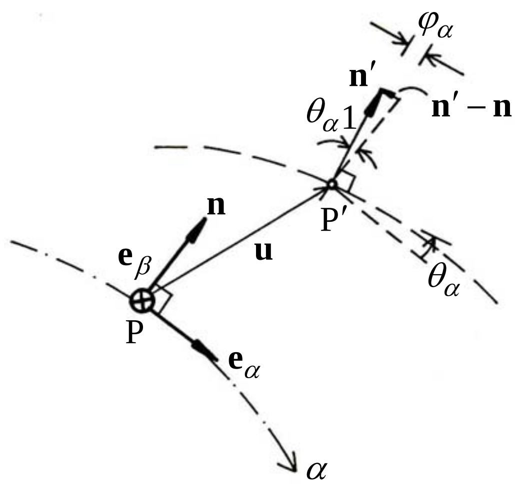
$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}'_\alpha \times \mathbf{e}'_\beta &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\alpha & \mathbf{e}_\beta & \mathbf{n} \\ 1 & \omega_\alpha & \theta_\alpha \\ \omega_\beta & 1 & \theta_\beta \end{vmatrix} \\
&= (-\theta_\alpha + \omega_\alpha\theta_\beta)\mathbf{e}_\alpha + (-\theta_\beta + \omega_\beta\theta_\alpha)\mathbf{e}_\alpha + (1+\omega_\alpha\omega_\beta)\mathbf{n} \\
&\approx -\theta_\alpha \mathbf{e}_\alpha - \theta_\beta \mathbf{e}_\beta + \mathbf{n}
\end{aligned}
\tag{1.80}
$$

ja sen itseisarvolle

$$
|\mathbf{e}'_\alpha \times \mathbf{e}'_\beta| = \sqrt{\theta_\alpha^2 + \theta_\beta^2 + 1} \approx 1. \tag{1.81}
$$

Näin deformoituneen keskipinnan yksikkönormaalivektorille saadaan

$$
\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{e}'_\alpha \times \mathbf{e}'_\beta}{|\mathbf{e}'_\alpha \times \mathbf{e}'_\beta|} = -\theta_\alpha \mathbf{e}_\alpha - \theta_\beta \mathbf{e}_\beta + \mathbf{n}. \tag{1.82}
$$



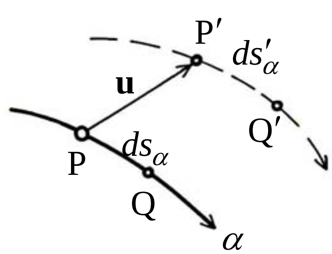
Kuva 1.10: Keskipinnan kiertymä pisteessä P

1.33 Keskipinnan kiertymät

Deformoituneen tilan ja alkutilan yksikkövektorien erotukselle saadaan lauseke

$$\mathbf{n}' - \mathbf{n} = -\theta_\alpha \mathbf{e}_\alpha - \theta_\beta \mathbf{e}_\beta \,, \tag{1.83}$$

josta nähdään, että sen $\alpha -$ viivan suuntainen komponentti on $-\theta_\alpha$. Kuvasta 10 voidaan nyt päätellä, että θ_α on **keskipinnan $\alpha -$viivan suuntainen kiertymä** (deformoituneen keskipinnan ja $\alpha -$viivan välinen kaltevuuskulma). Vastaavasti nähdään, että θ_β on **keskipinnan $\beta -$viivan suuntainen kiertymä**. Edellä esitetyt lausekkeet (1.72) ilmaisevat siis keskipinnan kiertymät θ_α ja θ_β siirtymäkomponenttien *u*, *v* ja *w* avulla ja niitä kutsutaan kuoren **keskipinnan kiertymien ja siirtymien yhteyksiksi**.



Kuva 1.11: Keskipinnan $\alpha -$viivan suuntaisen venymän määrittely

1.34 Keskipinnan venymät

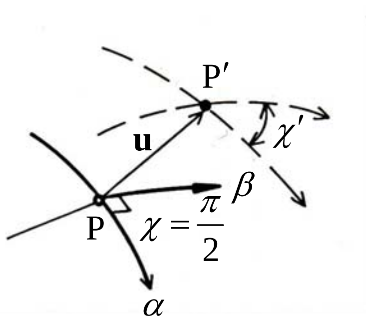
$\alpha -$viivan suuntainen venymä määritellään tässä alun perin $\alpha -$viivan suuntaisen jana-alkion PQ (vrt. Kuva 1.11) suhteellisena pituudenmuutok-sena, eli

$$\frac{\mathrm{P'Q'} - \mathrm{PQ}}{PQ} = \frac{ds'_\alpha - ds_\alpha}{ds_\alpha} = \frac{A'd\alpha - Ad\alpha}{Ad\alpha} = 1 + \varepsilon_\alpha - 1 = \varepsilon_\alpha \qquad (1.84)$$

Näin saatiin suureelle ε_α fysikaalinen merkitys. Se on **keskipinnan $\alpha -$viivan suuntainen venymä**. Vastaavasti ε_β on **keskipinnan $\beta -$viivan suuntainen venymä**. Edellä esitetyt lausekkeet (1.70) ilmaisevat siis keskipinnan venymät ε_α ja ε_β siirtymäkomponenttien *u*, *v* ja *w* avulla ja niitä kutsutaan kuoren **keskipinnan venymien ja siirtymien yhteyksiksi**.

1.35 Keskipinnan liukuma

Kuoren keskipinnan liukuma $\gamma_{\alpha\beta}$ määritellään $\alpha -$ ja $\beta -$viivojen välisen (alkutilassa suoran) kulman muutoksena (pienenemisenä) (vrt. Kuva 1.12) deformaatiossa, ts.



Kuva 1.12: Keskipinnan liukuman $\gamma_{\alpha\beta}$ määrittely

$$\gamma_{\alpha\beta} = \chi - \chi' = \frac{\pi}{2} - \chi' \, . \qquad (1.85)$$

Sille saadaan

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2} - \chi' \approx \sin(\frac{\pi}{2} - \chi') = \cos\chi' = \omega_\alpha + \omega_\beta \qquad (1.86)$$

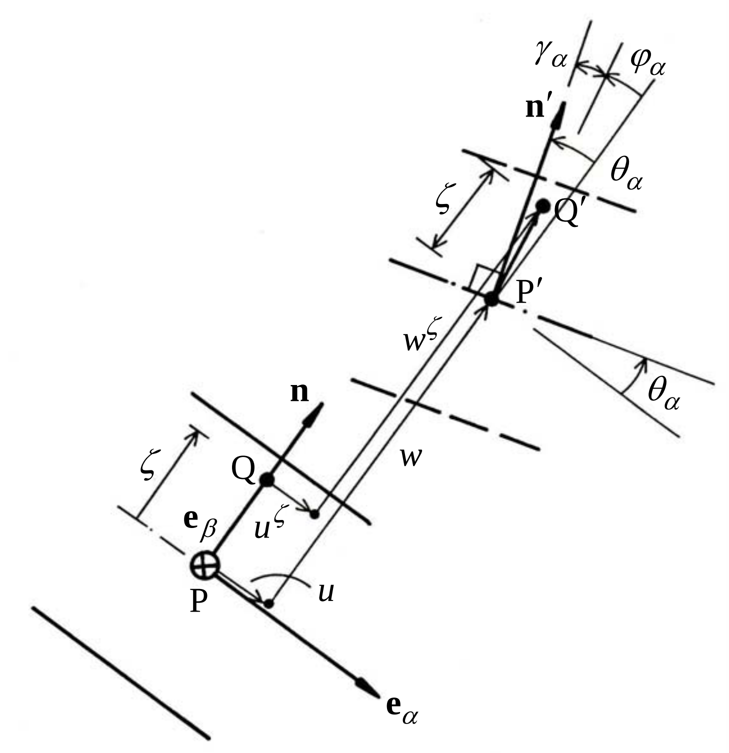
ja kaavojen (1.71) perusteella edelleen

$$\boxed{\gamma_{\alpha\beta} = \frac{v,_\alpha}{A} + \frac{u,_\beta}{B} - \frac{B,_\alpha v}{AB} - \frac{A,_\beta u}{AB}}. \tag{1.87}$$

Tämä lauseke sievenee, soveltamalla tulon derivointikaavaa takaperin, myös muotoon

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{B}{A}(\frac{v}{B}),_\alpha + \frac{A}{B}(\frac{u}{A}),_\beta . \tag{1.88}$$

Lauske (1.88) ilmaisee siis keskipinnan liukuman $\gamma_{\alpha\beta}$ siirtymäkomponenttien u, v ja w avulla ja sitä kutsutaan kuoren **keskipinnan liukuman ja siirtymien yhteydeksi**.



Kuva 1.13: Kuoren normaalikiertymä φ_α ja liukumakulma γ_α

1.4 Mindlin'in ja Kirchhoffin otaksumat

1.41 Kuoren kiertymät ja liukumakulmat

Merkitään alkutilassa keskipinnan normaalin suuntaisen materiaalisäikeen PQ kiertymän komponentteja symboleilla φ_α ja φ_β sekä kutsutaan niitä kuoren **normaalikiertymiksi.** Otaksutaan liukumat $\gamma_{\alpha\zeta}$ ja $\gamma_{\beta\zeta}$ kuoren paksuuden suunnassa vakioiksi käytetään niille merkintöjä γ_α ja γ_β sekä nimitystä kuoren **liukumakulmat**. Kuvan 13 perusteella saadaan ensimmäinen yhteyksistä

$$\varphi_\alpha = \theta_\alpha - \gamma_\alpha, \quad \varphi_\beta = \theta_\beta - \gamma_\beta. \tag{1.89}$$

Nämä yhtälöt ilmaisevat siis kuoren normaalikiertymien, keskipinnan kiertymien ja liukumakulmien väliset yhteydet.

1.42 Siirtymät kuoren yleisessä pisteessä

Kuvan 13 perusteella saadaan myös ensimmäinen ja kolmas yhteyksistä

$$u^\zeta = u - \zeta\varphi_\alpha, \quad v^\zeta = v - \zeta\varphi_\beta, \quad w^\zeta = w. \tag{1.90}$$

Ne lausuvat siis etäisyydellä ζ kuoren keskipinnasta olevan pisteen Q siirtymät keskipinnan pisteen P siirtymien ja normaalikiertymien avulla. Nämä lausekkeet (1.90) yhdessä normaalikiertymien lausekkeiden (1.89) muodostavat lähtökohdan ns. **Reissner-Mindlinin kuoroteorialle**, joka soveltuu ohuden kuorien lisäksi myös paksuhkoihin ja sandwich kuoriin. Mindlinin laatta ja kuoriteorioiden merkitys on viimeaikoina lisääntynyt myös siitä syystä, että monet modernit laatta- ja kuorielementit[3] perustuvat Reissner-Mindlinin teoriaan.

Edellisten otaksumien lisäksi **teknisessä taivutusteoriassa** eli ns. **Kirchoffin teoriassa** otaksutaan, että liukumakulmat häviävät, ts.

$$\gamma_\alpha = 0, \quad \gamma_\beta = 0, \tag{1.91}$$

jolloin

[3] Käytettäessä elementtimenetelmää laattojen tai kuorien analysointiin.

$$\varphi_\alpha = \theta_\alpha \equiv \frac{w,_\alpha}{A} - \frac{u}{R_\alpha}, \quad \varphi_\beta = \theta_\beta \equiv \frac{w,_\beta}{B} - \frac{v}{R_\beta}. \tag{1.92}$$

Jälkimmäiset yhteyden merkitsevät sitä, että kuoren normaalikiertymät ja keskipinnan kiertymät ovat yksi ja sama asia. Kirchhoffin kuoriteoria soveltuu ohuille kuorille. Tässä kurssissa käsitellään pääasiassa kuoren Kirchhoffin teorian mukaisia yhtälöitä.

Kuoren normaalikiertymiä φ_α ja φ_β tullaan jatkossa kutsumaan lyhyesti **kiertymiksi**, koska niillä on kuoriteoriassa keskeisempi merkitys kuin keskipinnan kiertymillä θ_α ja θ_β. (Jälkimmäisiä voidaan pitää kuoren lopullisissa yhtälöissä pelkästään lyhennysmerkintöinä.)

1.5 Käyristymät ja vääntymä

Edellä saadut keskipinnan pisteen P venymien ja liukuman lausekkeet (1.70) ja (1.88) ovat yhtä lailla sovellettavissa etäisyydellä ζ keskipinnasta sijaitsevaan kuoren yleiseen pisteeseen Q, kun niissä olevat geometriset suureet korvataan tätä pistettä koskevilla, yläindeksillä ζ varustetuilla, suureilla. Pisteen Q venymälle ε_α^ζ saadaan näin

$$\varepsilon_\alpha^\zeta = \frac{1}{A^\zeta} u,_\alpha^\zeta + \frac{A,_\beta^\zeta}{A^\zeta B^\zeta} v^\zeta + \frac{1}{R_\alpha^\zeta} w^\zeta . \tag{1.93}$$

Tässä lausekkeessa esiintyvälle derivaatalle $A,_\beta^\zeta$ saadaan

$$A,_\beta^\zeta = \frac{\partial}{\partial\beta}[A(1+\frac{\zeta}{R_\alpha})] = A,_\beta + \zeta(\frac{A}{R_\alpha}),_\beta = A,_\beta (1+\frac{\zeta}{R_\beta}) . \tag{1.94}$$

Viimeisen yhtäsuuruusmerkin kohdalla sovellettiin ensimmäistä Godazzin kaavaa (1.41a). Lausekkeesta (1.93) saadaan nyt

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha^\zeta &= \frac{1}{A(1+\frac{\zeta}{R_\alpha})}u,_\alpha^\zeta + \frac{A,_\beta(1+\frac{\zeta}{R_\beta})}{A(1+\frac{\zeta}{R_\alpha})B(1+\frac{\zeta}{R_\beta})}v^\zeta + \frac{1}{R_\alpha(1+\frac{\zeta}{R_\alpha})}w^\zeta \\
&= \frac{1}{1+\underbrace{\frac{\zeta}{R_\alpha}}_{\approx 0}}\left(\frac{1}{A}u,_\alpha^\zeta + \frac{A,_\beta}{AB}v^\zeta + \frac{A}{R_\alpha}w^\zeta\right) \\
&= \frac{1}{A}(u,_\alpha - \zeta\varphi_\alpha,_\alpha) + \frac{A,_\beta}{AB}(v-\zeta\varphi_\beta) + \frac{A}{R_\alpha}w \\
&= \frac{1}{A}u,_\alpha + \frac{A,_\beta}{AB}v + \frac{A}{R_\alpha}w - \zeta\left(\frac{1}{A}\varphi_\alpha,_\alpha + \frac{A,_\beta}{AB}\varphi_\beta\right).
\end{aligned} \tag{1.95}
$$

Näin saatiin ensimmäinen pisteen Q venymien lausekkeista

$$
\boxed{\varepsilon_\alpha^\zeta = \varepsilon_\alpha + \kappa_\alpha\zeta, \quad \varepsilon_\beta^\zeta = \varepsilon_\beta + \kappa_\beta\zeta}, \tag{1.96}
$$

missä ε_α ja ε_β ovat keskipinnan $\alpha-$ ja $\beta-$viivojen suuntaiset venymät ja

$$
\kappa_\alpha = -\frac{1}{A}\varphi_\alpha,_\alpha - \frac{A,_\beta}{AB}\varphi_\beta, \quad \kappa_\beta = -\frac{1}{B}\varphi_\beta,_\beta - \frac{B,_\alpha}{AB}\varphi_\alpha, \tag{1.97}
$$

ovat **kuoren $\alpha-$ ja $\beta-$viivojen suuntaiset käyristymät**. Sijoittamalla näihin Kirchhoffin teorian mukaiset kiertymien lausekkeet (1.92) saadaan

$$
\boxed{\begin{aligned}
\kappa_\alpha &= -\frac{1}{A}\left(\frac{1}{A}w,_\alpha - \frac{1}{R_\alpha}u\right),_\alpha - \frac{A,_\beta}{AB}\left(\frac{1}{B}w,_\beta - \frac{1}{R_\beta}v\right), \\
\kappa_\beta &= -\frac{1}{B}\left(\frac{1}{B}w,_\beta - \frac{1}{R_\beta}v\right),_\beta - \frac{B,_\alpha}{AB}\left(\frac{1}{A}w,_\alpha - \frac{1}{R_\alpha}u\right).
\end{aligned}} \tag{1.98}
$$

Lauskkeet (1.98) ilmaisevat kuoren käyristymät siirtymäkomponenttien u, v ja w avulla ja niitä kutsutaan kuoren **käyristymien ja siirtymien yhteyksiksi**.

Pisteen Q liukumalle $\gamma_{\alpha\beta}^\zeta$ saadaan

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\beta}^{\zeta} &= \frac{B^{\zeta}}{A^{\zeta}}(\frac{v^{\zeta}}{B^{\zeta}}),_{\alpha} + \frac{A^{\zeta}}{B^{\zeta}}(\frac{u^{\zeta}}{A^{\zeta}}),_{\beta} \\
&= \frac{B(1+\overbrace{\frac{\zeta}{R_{\beta}}}^{\approx 0})}{A(1+\underbrace{\frac{\zeta}{R_{\alpha}}}_{\approx 0})}[\frac{v^{\zeta}}{B(1+\underbrace{\frac{\zeta}{R_{\beta}}}_{\approx 0})}],_{\alpha} + \frac{A(1+\overbrace{\frac{\zeta}{R_{\alpha}}}^{\approx 0})}{B(1+\underbrace{\frac{\zeta}{R_{\beta}}}_{\approx 0})}[\frac{u^{\zeta}}{A(1+\underbrace{\frac{\zeta}{R_{\alpha}}}_{\approx 0})}],_{\beta} \\
&\approx \frac{B}{A}(\frac{v^{\zeta}}{B}),_{\alpha} + \frac{A}{B}(\frac{u^{\zeta}}{A}),_{\beta} \qquad (1.99) \\
&= \frac{B}{A}(\frac{v-\zeta\varphi_{\beta}}{B}),_{\alpha} + \frac{A}{B}(\frac{u-\zeta\varphi_{\alpha}}{A}),_{\beta} \\
&= \frac{B}{A}(\frac{v}{B}),_{\alpha} + \frac{A}{B}(\frac{u}{A}),_{\beta} - [\frac{B}{A}(\frac{\varphi_{\beta}}{B}),_{\alpha} + \frac{A}{B}(\frac{\varphi_{\alpha}}{A}),_{\beta}]\zeta
\end{aligned}
$$

eli

$$
\boxed{\gamma_{\alpha\beta}^{\zeta} = \gamma_{\alpha\beta} + 2\kappa_{\alpha\beta}\zeta}, \qquad (1.100)
$$

missä $\gamma_{\alpha\beta}$ on keskipinnan liukuma ja

$$
\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[\frac{B}{A}(\frac{\varphi_{\beta}}{B}),_{\alpha} + \frac{A}{B}(\frac{\varphi_{\alpha}}{A}),_{\beta}] \qquad (1.101)
$$

on **kuoren vääntymä**. Sijoittamalla tähän Kirchhoffin teorian mukaiset kiertymien lausekkeet (1.92) saadaan

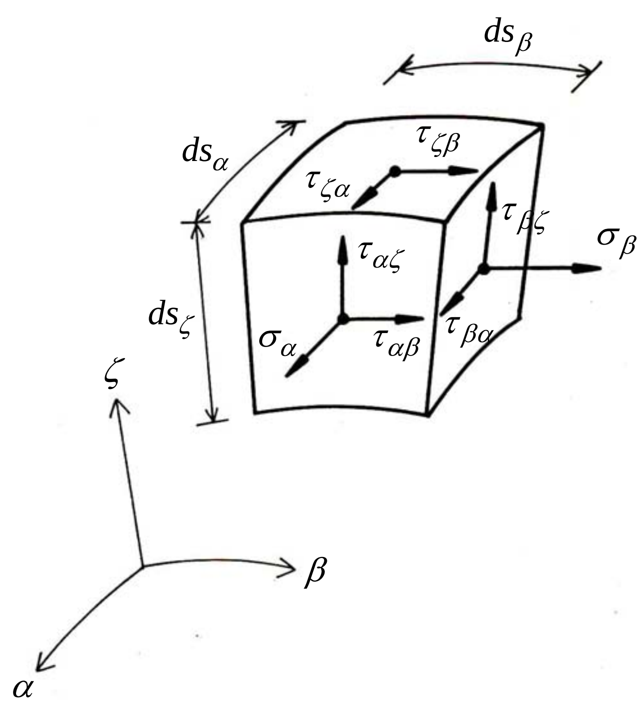
$$
\boxed{\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[\frac{B}{A}(\frac{1}{B^2}w,_{\beta} - \frac{1}{BR_{\beta}}v),_{\alpha} + \frac{A}{B}(\frac{1}{A^2}w,_{\alpha} - \frac{1}{AR_{\alpha}}u),_{\beta}].} \qquad (1.102)
$$

Lauseke (1.102) ilmaisee kuoren vääntymän siirtymäkomponenttien *u*, *v* ja *w* avulla ja sitä kutsutaan kuoren **vääntymän ja siirtymien yhteydeksi**.

1.6 Jännitysresultantit

Tarkastelu tapahtuu kaarevuusviivojen muodostamassa koordinaatistossa, jossa $\chi = 90°$ ja $1/R_{\alpha\beta} = 0$.

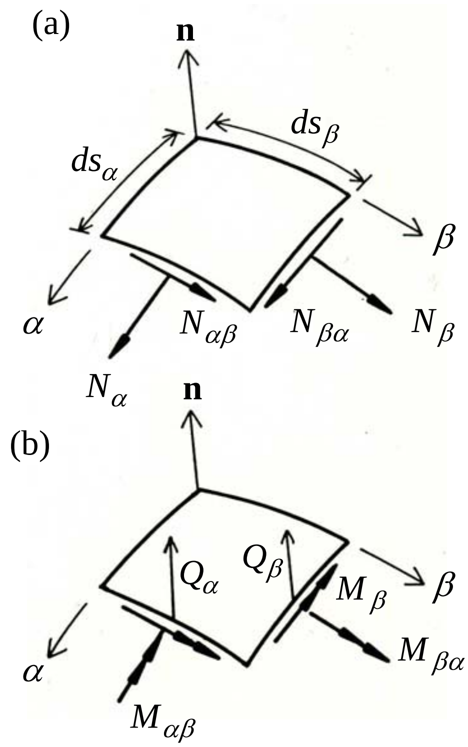
Kuva 1.14 esittää koordinaattipintojen rajaamaa differentiaalista heksaedrialkiota kuoren sisällä. Sen tarkoituksena on havainnollistaa jännityskomponenteille käytettyjä merkintöjä. Yleiset kolmidimensioiden kappaleen jännityskomponentit käyräviivaisessa suorakulmaisessa α, β, ζ – koordinaatistossa ovat normaalijännitykset σ_α, σ_β ja σ_ζ sekä leikkausjännitykset $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$, $\tau_{\beta\zeta} = \tau_{\zeta\beta}$ ja $\tau_{\zeta\alpha} = \tau_{\alpha\zeta}$. Leikkaus-jännitysten pareittainen yhtäsuuruus perustuu alkion momenttitasapainoon[4]. Kuoressa keskipinnan normaalin suuntaisen normaalijännitys σ_ζ on muihin jännityskomponentteihin nähden hyvin pieni. Kuoriteoriassa otaksutaankin tämän vuoksi, että $\sigma_\zeta = 0$. Näin kuoren jännityskomponenteista vain viisi on toisistaan riippumattomia. Näiksi voidaan valita esimerkiksi σ_α, σ_β $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\zeta}$ ja $\tau_{\beta\zeta}$.



Kuva 1.14: Kuoren jännityskomponentit

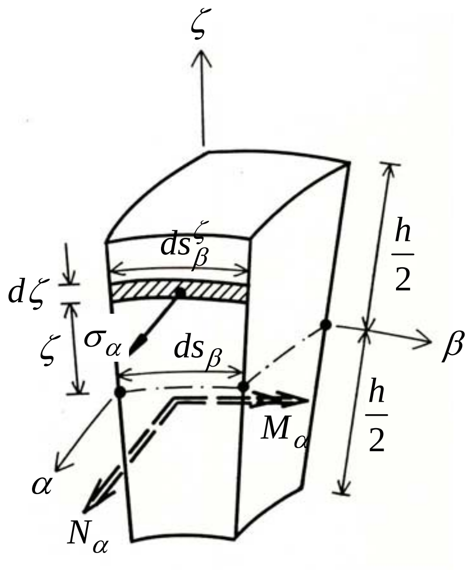
---

[4] Tämä tulos karteesisessa ja sylinterikoordinaatistossa perusteltiin rakenteiden lujuusopin kurssissa. Toteamme tässä ilman johtoa, että se on voimassa myös käyräviivaisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa.



Kuva 1.15: Kuoren jännitysresultantit

Kuvat 15 (a) ja (b) esittävät koordinaattiviivojen kuoren keskipinnasta rajaamaa differentiaalista alkiota ja siihen vaikuttavia kuoren jännitysresultantteja. Kuvassa 15 (a) ovat **normaalivoimat** N_α ja N_β sekä **keskipinnan suuntaiset leikkausvoimat** $N_{\alpha\beta}$ ja $N_{\beta\alpha}$. Ne vastaavat levyn jännitysresultantteja N_x, N_y ja $N_{xy} = N_{yx}$ sekä liittyvät kuoren toimintaan levylle tyypillisellä tavalla, eli ns. **levyvaikutukseen**. Kuvassa 15 (b) ovat keskipintaa vastaan kohtisuorat, **poikittaiset leikkausvoimat** Q_α ja Q_β, **taivutusmomentit** M_α ja M_β sekä **vääntömomentit** $M_{\alpha\beta}$ ja $M_{\beta\alpha}$. Ne vastaavat laatan jännitysresultantteja Q_x, Q_y M_x, M_y ja $M_{xy} = M_{yx}$ sekä liittyvät kuoren toimintaan laatalle tyypillisellä tavalla, eli ns. **laattavaikutukseen**. Kuoren jännitysresultantit ovat, kuten levyn ja laatan, voimia pituutta kohti tai momentteja pituutta kohti.



Kuva 1.16: Normaalivoiman N_α ja taivutusmomentin M_α määrittely

Jännitysresultanttien täsmällisempää määrittelyä tarkastellaan kuvaa 16 apuna käyttäen. $\alpha-$viivaan vastaan kohtisuoraan pintaan vaikuttava $\alpha-$viivan suuntainen voimaresultantti on normaalivoiman N_α avulla lausuttuna $N_\alpha ds_\beta$ ja normaalijännityksen σ_α avulla lausuttuna

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha ds_\beta^\zeta d\zeta \,.$$

Merkitsemällä nämä yhtäsuuriksi saadaan

$$N_\alpha ds_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha ds_\beta^\zeta d\zeta$$

ja edelleen

$$N_\alpha \cancel{Bd\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \overbrace{B^\zeta}^{B} d\beta d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha d\zeta\, \cancel{Bd\beta} \,.$$

Näin saadaan normaalivoimalle N_α määrittelykaava

$$N_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha d\zeta \,. \tag{1.103}$$

$\alpha -$viivaan vastaan kohtisuoraan pintaan vaikuttava momenttiresultantti $\beta -$viivan suuntaisen akselin suhteen on taivutusmomentin M_α avulla lausuttuna $M_\alpha ds_\beta$ ja normaalijännityksen σ_α avulla lausuttuna

$$\int_{-h/2}^{h/2} \zeta \cdot \sigma_\alpha ds_\beta^\zeta d\zeta \,.$$

Merkitsemällä nämä yhtäsuuriksi saadaan

$$M_\alpha ds_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \zeta ds_\beta^\zeta d\zeta$$

ja edelleen

$$M_\alpha \cancel{Bd\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \zeta \overbrace{B^\zeta}^{B} d\beta d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \zeta d\zeta \cancel{Bd\beta} \,.$$

Näin saadaan taivutusmomentille M_α määrittelykaava

$$M_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \zeta d\zeta \,. \tag{1.104}$$

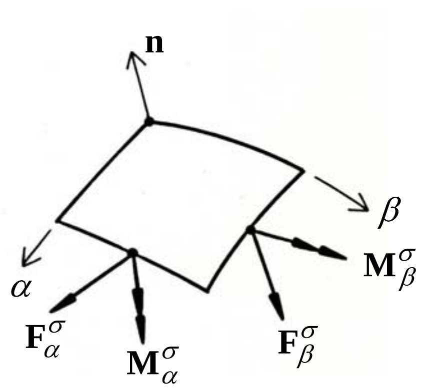
Vastaavaan tapaan voidaan perustella muiden jännitysresultanttien määrittelykaavat. Tulos on

$$\boxed{\begin{aligned} &N_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha d\zeta, \; N_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta d\zeta, \; N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} d\zeta, \\ &M_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \zeta d\zeta, \; M_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \zeta d\zeta, \; M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} \zeta d\zeta, \\ &Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\zeta} d\zeta, \; Q_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\zeta} d\zeta. \end{aligned}} \tag{1.105}$$

Samalla voidaan todeta myös leikkausvoimien pareittainen yhtäsuuruus $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ ja vääntömomenttien pareittainen yhtäsuuruus $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$, jotka seuraavat suoraan leikkausjännitysten pareittaisesta yhtäsuuruudesta $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$.

1.7 Jännitysresultanttien tasapainoyhtälöt

Tasapainoyhtälöiden muodostamista silmälläpitäen jännitysresultantit on tarkoituksenmukaista yhdistää kuvan 17 mukaisiksi (pituutta kohti määritellyiksi) voima- ja momenttivektoreiksi

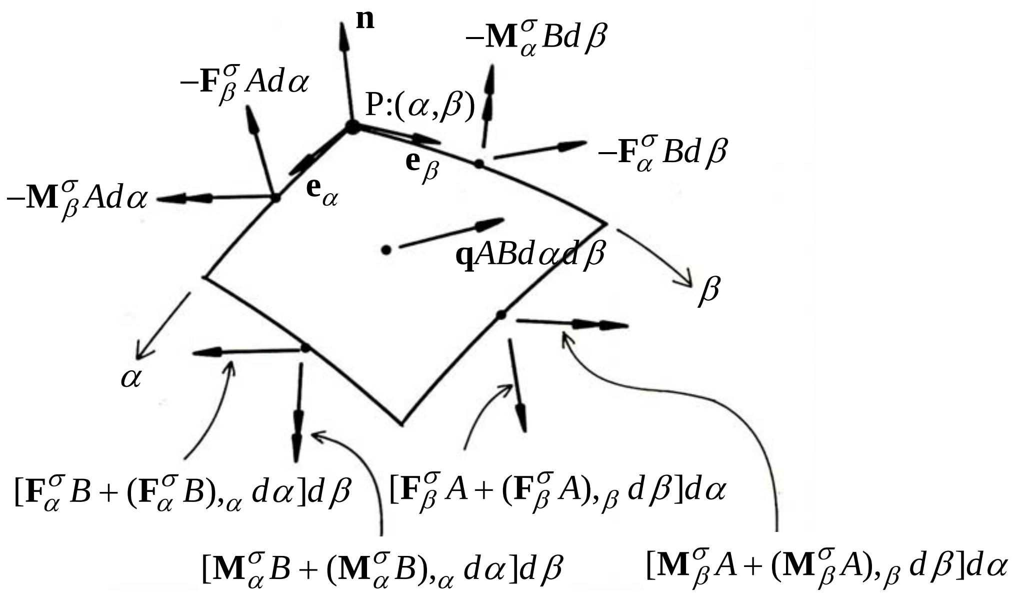


Kuva 1.17: Jännitysresultanttivektorit

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_\alpha^\sigma &= N_\alpha \mathbf{e}_\alpha + N_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta + Q_\alpha \mathbf{n}, \\
\mathbf{F}_\beta^\sigma &= N_{\beta\alpha} \mathbf{e}_\alpha + N_{\beta}\mathbf{e}_\beta + Q_\beta \mathbf{n}, \\
\mathbf{M}_\alpha^\sigma &= -M_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha + M_{\alpha}\mathbf{e}_\beta, \\
\mathbf{M}_\beta^\sigma &= -M_{\beta} \mathbf{e}_\alpha + M_{\beta\alpha}\mathbf{e}_\beta.
\end{aligned} \tag{1.106}$$

Kuvan 18 mukaisen kuorialkion $\beta -$viivaan yhtyvään sivuun vaikuttavat voima- ja momenttiresultantit ovat

$$-\mathbf{F}_\alpha^\sigma ds_\beta = -\mathbf{F}_\alpha^\sigma B d\beta, \ -\mathbf{M}_\alpha^\sigma ds_\beta = -\mathbf{M}_\alpha^\sigma B d\beta .$$



Kuva 1.18: Kuorialkion vapaakappalekuvio

Siirryttäessä vastakkaiselle sivulle tulee näiden vektorien arvoihin koordinaatin α muutosta $d\alpha$ vastaavat lisäykset ja merkki vaihtuu. Näin ne alkion vastakkaiselle sivulla ovat

$$[\mathbf{F}_\alpha^\sigma B+(\mathbf{F}_\alpha^\sigma B),_\alpha d\alpha]d\beta, \quad [\mathbf{M}_\alpha^\sigma B+(\mathbf{M}_\alpha^\sigma B),_\alpha d\alpha]d\beta.$$

Vastaavalla tavalla saadaan $\beta-$viivaan suuntaisiin sivuihin vaikuttavat voima- ja momenttivektorit. Kuoren pintaa vaikuttava jakautunut kuorma

$$\mathbf{q}=q_\alpha \mathbf{e}_\alpha+q_\beta \mathbf{e}_\beta+q_n \mathbf{n}, \tag{1.107}$$

aiheuttaa kuorialkion pintaan voimaresultantin

$$\mathbf{q}dA=\mathbf{q}ABd\alpha d\beta. \tag{1.108}$$

Kuorialkion **vektorimuotoiseksi voimatasapainoyhtälöksi** saadaan nyt

$$\begin{aligned}&-\cancel{\mathbf{F}_\alpha^\sigma B d\beta}+[\cancel{\mathbf{F}_\alpha^\sigma B}+(\mathbf{F}_\alpha^\sigma B),_\alpha d\alpha]d\beta\\&-\cancel{\mathbf{F}_\beta^\sigma A d\alpha}+[\cancel{\mathbf{F}_\beta^\sigma A}+(\mathbf{F}_\beta^\sigma A),_\beta d\beta]d\alpha+\mathbf{q}ABd\alpha d\beta=\mathbf{0}\end{aligned}$$

joka sievenee muotoon

$$(\mathbf{F}_\alpha^\sigma B),_\alpha + (\mathbf{F}_\beta^\sigma A),_\beta + \mathbf{q}AB = \mathbf{0}\,. \tag{1.109}$$

Tämän yhtälön $\alpha-$viivan suuntainen komponenttiyhtälö saadaan kertomalla se puolittain pistemäisesti kantavektorilla $\mathbf{e}_\alpha$, jolloin saadaan

$$\mathbf{e}_\alpha \bullet (\mathbf{F}_\alpha^\sigma B),_\alpha + \mathbf{e}_\alpha \bullet (\mathbf{F}_\beta^\sigma A),_\beta + \mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{q}AB = \mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{0}$$

Soveltamalla tulon derivointia takaperin saadaan tästä

$$(\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{F}_\alpha^\sigma B),_\alpha - \mathbf{e}_\alpha,_\alpha \bullet \mathbf{F}_\alpha^\sigma B + (\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{F}_\beta^\sigma A),_\beta - \mathbf{e}_\alpha,_\beta \bullet \mathbf{F}_\beta^\sigma A + \mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{q}AB = \mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{0}$$

ja edelleen

$$(\overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{F}_\alpha^\sigma}^{N_\alpha} B),_\alpha - \overbrace{\mathbf{e}_\alpha,_\alpha}^{-\frac{A,_\beta}{B}\mathbf{e}_\beta - \frac{A}{R_\alpha}\mathbf{n}} \bullet \mathbf{F}_\alpha^\sigma B + (\overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{F}_\beta^\sigma}^{N_{\beta\alpha}} A),_\beta - \overbrace{\mathbf{e}_\alpha,_\beta}^{\frac{B,_\alpha}{A}\mathbf{e}_\beta} \bullet \mathbf{F}_\beta^\sigma A + \overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{q}}^{q_\alpha} AB = \overbrace{\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{0}}^{0}$$

$\Rightarrow$

$$(BN_\alpha),_\alpha + A,_\beta \overbrace{\mathbf{e}_\beta \bullet \mathbf{F}_\alpha^\sigma}^{N_{\alpha\beta}} + \frac{AB}{R_\alpha}\overbrace{\mathbf{n}\bullet \mathbf{F}_\alpha^\sigma}^{Q_\alpha} + (AN_{\beta\alpha}),_\beta - B,_\alpha \overbrace{\mathbf{e}_\beta \bullet \mathbf{F}_\beta^\sigma}^{N_{\beta\alpha}} + q_\alpha AB = 0$$

Näin saadaan $\alpha-$viivan suuntaiselle voimatasapainoyhtälölle tulos

$$\frac{1}{AB}[(BN_\alpha),_\alpha + (AN_{\beta\alpha}),_\beta + A,_\beta N_{\alpha\beta} - B,_\alpha N_\beta] + \frac{Q_\alpha}{R_\alpha} + q_\alpha = 0\,. \tag{1.110}$$

Kertomalla vektorimuotoinen voimatasapainoyhtälö (1.109) puolittain pistemäisesti kantavektoreilla $\mathbf{e}_\beta$ ja $\mathbf{n}$, sekä menetellen vastaavaan tapaan kuin edellä, saadaan kuoren $\beta-$viivan suuntainen tasapainoyhtälö ja poikittainen (normaalin suuntainen) tasapainoyhtälö. Näin saadaan kuoren **voimatasapainoyhtälöiksi**

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{1}{AB}[(BN_\alpha),_\alpha + (AN_{\beta\alpha}),_\beta + A,_\beta N_{\alpha\beta} - B,_\alpha N_\beta] + \frac{Q_\alpha}{R_\alpha} + q_\alpha = 0,\\
&\frac{1}{AB}[(AN_\beta),_\beta + (BN_{\alpha\beta}),_\alpha + B,_\alpha N_{\beta\alpha} - A,_\beta N_\alpha] + \frac{Q_\beta}{R_\beta} + q_\beta = 0,\\
&\frac{1}{AB}[(BQ_\alpha),_\alpha + (AQ_\beta),_\beta] - \frac{N_\alpha}{R_\alpha} - \frac{N_\beta}{R_\beta} + q_n = 0.
\end{aligned}} \tag{1.111}$$

Muodostetaan kuorialkion momenttitasapainoyhtälö pisteen P suhteen

$$
\begin{aligned}
&-\cancel{\mathbf{M}_\alpha^\sigma B d\beta} + [\cancel{\mathbf{M}_\alpha^\sigma B} + (\mathbf{M}_\alpha^\sigma B),_\alpha d\alpha] d\beta \\
&-\cancel{\mathbf{M}_\beta^\sigma A d\alpha} + [\cancel{\mathbf{M}_\beta^\sigma A} + (\mathbf{M}_\beta^\sigma A),_\beta d\beta] d\alpha \\
&+\frac{ds_\beta}{2}\mathbf{e}_\beta \times (-\mathbf{F}_\alpha^\sigma B d\beta) + (ds_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \frac{ds_\beta}{2}\mathbf{e}_\beta) \times [\mathbf{F}_\alpha^\sigma B + (\mathbf{F}_\alpha^\sigma B),_\alpha d\alpha] d\beta \\
&+\frac{ds_\alpha}{2}\mathbf{e}_\alpha \times (-\mathbf{F}_\beta^\sigma A d\alpha) + (\frac{ds_\alpha}{2}\mathbf{e}_\alpha + ds_\beta \mathbf{e}_\beta) \times [\mathbf{F}_\beta^\sigma A + (\mathbf{F}_\beta^\sigma A),_\beta d\beta] d\alpha \\
&+(\frac{ds_\alpha}{2}\mathbf{e}_\alpha + \frac{ds_\beta}{2}\mathbf{e}_\beta) \times \mathbf{q} AB d\alpha d\beta = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Se sievenee seuraavasti

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{M}_\alpha^\sigma B),_\alpha d\alpha d\beta + (\mathbf{M}_\beta^\sigma A),_\beta d\alpha d\beta \\
&+\frac{ds_\beta}{2}\mathbf{e}_\beta \times \overbrace{(-\mathbf{F}_\alpha^\sigma B + \mathbf{F}_\alpha^\sigma B)}^{\mathbf{0}} d\alpha + \frac{ds_\alpha}{2}\mathbf{e}_\alpha \times \overbrace{(-\mathbf{F}_\beta^\sigma A d\alpha + \mathbf{F}_\beta^\sigma A)}^{\mathbf{0}} d\beta \\
&+(\frac{ds_\alpha}{2}\mathbf{e}_\alpha + \frac{ds_\beta}{2}\mathbf{e}_\beta) \times \overbrace{[(\mathbf{F}_\alpha^\sigma B),_\alpha + (\mathbf{F}_\alpha^\sigma B),_\alpha + \mathbf{q} AB]}^{\mathbf{0}} d\alpha d\beta \\
&+ds_\alpha \mathbf{e}_\alpha \times [\mathbf{F}_\alpha^\sigma B + \frac{1}{2}(\mathbf{F}_\alpha^\sigma B),_\alpha d\alpha] d\beta \\
&+ds_\beta \mathbf{e}_\beta \times [\mathbf{F}_\beta^\sigma A + \frac{1}{2}(\mathbf{F}_\beta^\sigma A),_\beta d\beta] d\alpha = \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \\
&[(\mathbf{M}_\alpha^\sigma B),_\alpha + (\mathbf{M}_\beta^\sigma A),_\beta + AB\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^\sigma + AB\mathbf{e}_\beta \times \mathbf{F}_\beta^\sigma \\
&+\frac{1}{2}A\mathbf{e}_\alpha \times (\mathbf{F}_\alpha^\sigma B),_\alpha \overbrace{d\alpha}^{0} + \frac{1}{2}B\mathbf{e}_\beta \times (\mathbf{F}_\beta^\sigma A),_\beta \overbrace{d\beta}^{0}] d\alpha d\beta = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

ja saa lopulta muodon

$$
(\mathbf{M}_\alpha^\sigma B),_\alpha + (\mathbf{M}_\beta^\sigma A),_\beta + AB(\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^\sigma + \mathbf{e}_\beta \times \mathbf{F}_\beta^\sigma) = \mathbf{0} \qquad (1.112)
$$

Tämä on **kuorialkion vektorimuotoinen momenttitasapainoyhtälö**. Tämän yhtälön komponenttiyhtälöt saadaan kertomalla se puolittain pistemäisesti kantavektoreilla $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_\beta$ ja $\mathbf{n}$ sekä menettelemällä vastaavaan tapaan kuin $\alpha-$viivan suuntaisen voimatasapainoyhtälön johtamisen yhteydessä edellä. Tuloksesi saadaan

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{AB}[(BM_{\alpha}),_{\alpha}+(AM_{\beta\alpha}),_{\beta}+A,_{\beta}M_{\alpha\beta}-B,_{\alpha}M_{\beta}]-Q_{\alpha}=0,\\&\frac{1}{AB}[(AM_{\beta}),_{\beta}+(BM_{\alpha\beta}),_{\alpha}+B,_{\alpha}M_{\beta\alpha}-A,_{\beta}M_{\alpha}]-Q_{\beta}=0,\end{aligned}} \tag{1.113}$$

$$N_{\alpha\beta}-N_{\beta\alpha}+\frac{M_{\alpha\beta}}{R_{\alpha}}-\frac{M_{\beta\alpha}}{R_{\beta}}=0. \tag{1.114}$$

Nämä yhtälöt ovat **kuorialkion momenttitasapainoyhtälöt** $\alpha-$viivan, $\beta-$viivan sekä normaalin suhteen. Yhtälön (1.114) vasemman puolen ensimmäisen ja kolmannen termin summalle saadaan

$$N_{\alpha\beta}+\frac{M_{\alpha\beta}}{R_{\alpha}}=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{\alpha\beta}(1+\frac{\overbrace{\zeta}^{\approx 0}}{R_{\alpha}})d\zeta\approx\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{\alpha\beta}d\zeta=N_{\alpha\beta}.$$

Voidaan siis havaita, että termi $M_{\alpha\beta}/R_{\alpha}$ on tarkastelutarkkuutemme puitteissa häviävän pieni termiin $N_{\alpha\beta}$ nähden. Sama pätee luonnollisesti termiin $M_{\beta\alpha}/R_{\beta}$ ja $N_{\beta\alpha}$ suhteen. Näin yhtälön (1.114) supistuu muotoon $N_{\alpha\beta}-N_{\beta\alpha}=0$, ja toteutuu identtisesti. Tämän vuoksi sitä ei sisällytetä jatkossa kuoren yhtälöihin. Näin kuorialkion tasapainoyhtälöitä on yhteensä viisi kappaletta, kolme voimatasapainoyhtälöä (1.111) ja kaksi momenttitasapainoyhtälöä (1.113).

1.8 Jännitysresultantit ja kuoren muodonmuutos-suureet

1.81 Hooken laki

Homogeenisen, isotrooppisen aineen Hooken laki suorakulmaisessa käyräviivaisessa koordinaatistossa α, β, ζ on

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \nu\sigma_\beta - \nu\sigma_\zeta), \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G}, \\
\varepsilon_\beta &= \frac{1}{E}(\sigma_\beta - \nu\sigma_\alpha - \nu\sigma_\zeta), \quad \gamma_{\alpha\zeta} = \frac{\tau_{\alpha\zeta}}{G}, \\
\varepsilon_\zeta &= \frac{1}{E}(\sigma_\zeta - \nu\sigma_\alpha - \nu\sigma_\beta), \quad \gamma_{\beta\zeta} = \frac{\tau_{\beta\zeta}}{G}.
\end{aligned} \tag{1.115}$$

Otaksuman $\sigma_\zeta = 0$ vuoksi näistä yhtälöistä seuraa

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \nu\sigma_\beta), \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E}(\sigma_\beta - \nu\sigma_\alpha), \\
&\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G}, \quad \gamma_{\alpha\zeta} = \frac{\tau_{\alpha\zeta}}{G}, \quad \gamma_{\beta\zeta} = \frac{\tau_{\alpha\zeta}}{G}.
\end{aligned} \tag{1.116}$$

Ratkaisemalla näistä yhtälöistä jännityskomponentit muodonmuutos-komponenttien avulla saadaan

$$\begin{aligned}
&\sigma_\alpha = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta), \quad \sigma_\beta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha), \\
&\tau_{\alpha\beta} = G\gamma_{\alpha\beta}, \quad \tau_{\alpha\zeta} = G\gamma_{\alpha\zeta}, \quad \tau_{\beta\zeta} = G\gamma_{\beta\zeta}.
\end{aligned} \tag{1.117}$$

Näissä lausekkeissa liukumoduulilla *G*, kimmomoduulilla *E* ja Poissonin vakiolla ν on yhteys

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{1.118}$$

1.82 Jännitysresultanttien ja kuoren muodonmuutossuureiden yhteydet

Normaalijännitys σ_α etäisyydellä ζ kuoren kaskipinnasta saa nyt muodon

$$\sigma_\alpha = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\alpha^\zeta + \nu\varepsilon_\beta^\zeta)$$

Tässä venymät etäisyydellä ζ kaskipinnasta on varustettu yläindeksillä ζ kuten kuoren muodonmuutoksia tarkasteltaessa tehtiin. Sijoittamalla tähän venymien lausekkeet (1.96) saadaan

$$\sigma_\alpha = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta + (\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta)\zeta]. \tag{1.119}$$

Lähtien määrittelykaavasta (1.105a) normaalivoimalle N_α saadaan

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta + (\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta)\zeta]d\zeta \\ &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta)\overbrace{\int_{-h/2}^{h/2} d\zeta}^{h} + \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta)\overbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \zeta d\zeta}^{0} \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta) = C(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta) \end{aligned}$$

Lähtien määrittelykaavasta (1.105d) taivutusmomentilla M_α saadaan

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \zeta d\zeta = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta)\zeta + (\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta)\zeta^2]d\zeta \\ &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta)\overbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \zeta d\zeta}^{0} + \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta)\overbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \zeta^2 d\zeta}^{h^2/12} \\ &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta) = D(\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta). \end{aligned}$$

Tässä otettiin käyttöön lyhennysmerkinnät

$$\boxed{C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.} \tag{1.120}$$

Vastaavat lausekkeet voidaan johtaa myös jännitysresultanteille N_β, $N_{\alpha\beta}$, M_β ja $M_{\alpha\beta}$. Tulokset yhdessä ovat

$$\boxed{\begin{aligned} &N_\alpha = C(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta), \quad N_\beta = C(\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha), \quad N_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{2} C\gamma_{\alpha\beta}, \\ &M_\alpha = D(\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta), \quad M_\beta = D(\kappa_\beta + \nu\kappa_\alpha), \quad M_{\alpha\beta} = (1-\nu) D\kappa_{\alpha\beta}. \end{aligned}} \tag{1.121}$$

Suuretta C voidaan kutsua kuoren **veto-/puristusjäykkyydeksi** ja suure D on kuoren **taivutusjäykkyys**.

1.83 Jännitysten ja jännitysresultanttien yhteydet

Normaalijännitykselle σ_α saadaan lähtien kaavasta (1.119)

$$\sigma_\alpha = \frac{E}{1-\nu^2}[\overbrace{\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta}^{N_\alpha / C} + (\overbrace{\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta}^{M_\alpha / D})\zeta] = \frac{N_\alpha}{h} + \frac{12M_\alpha}{h^3}\zeta .$$

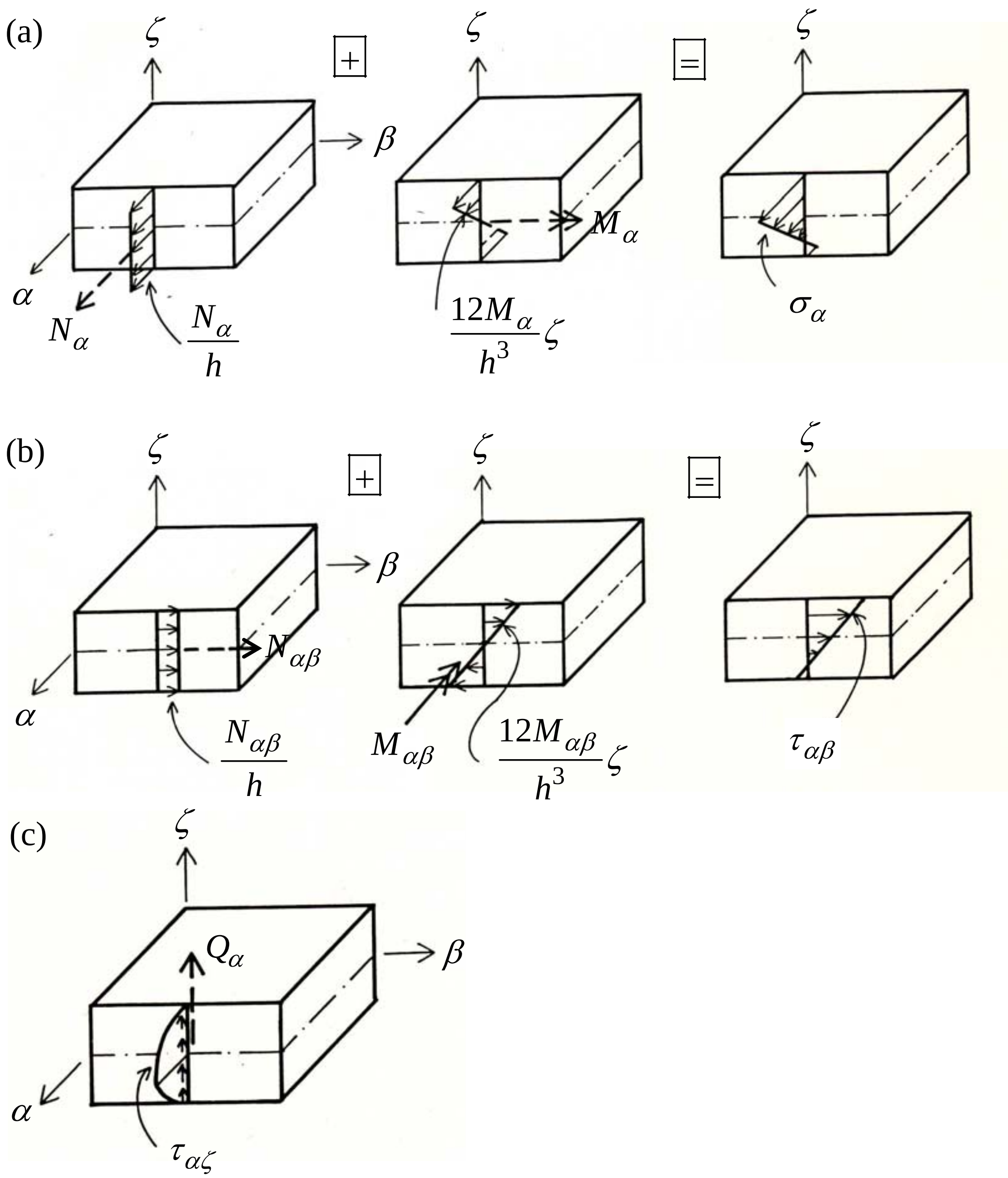
Vastaavaan tapaan saadaan lausekkeet jännityskomponenteille σ_β ja $\tau_{\alpha\beta}$. Tulokset yhdessä ovat

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{N_\alpha}{h} + \frac{12M_\alpha}{h^3}\zeta, \\ \sigma_\beta &= \frac{N_\beta}{h} + \frac{12M_\beta}{h^3}\zeta, \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{N_{\alpha\beta}}{h} + \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3}\zeta. \end{aligned}} \tag{1.122}$$

Poikittaisten leikkausjännitysten $\tau_{\alpha\zeta}$ ja $\tau_{\beta\zeta}$ sekä leikkausvoimien Q_α ja Q_β yhteydet voidaan johtaa vastaavaan tapaan kuin laatan leikkausjännitysten τ_{xz} ja τ_{yz} sekä leikkausvoimien Q_x ja Q_y yhteys. Johto kuitenkin tässä yhteydessä sivuutetaan. Tulos homogeenisen, isotrooppisen kuoren tapauksessa on

$$\boxed{\tau_{\alpha\zeta} = \frac{3}{2}\frac{Q_\alpha}{h}[1-(\frac{2\zeta}{h})^2], \quad \tau_{\beta\zeta} = \frac{3}{2}\frac{Q_\beta}{h}[1-(\frac{2\zeta}{h})^2].} \qquad (1.123)$$

Kaavoja (1.122) ja (1.123) käyttäen voidaan siis märittää jännitys-komponenttien jakautumat paksuussuunnassa kuoren tarkasteltavassa kohdassa, kun jännitysresultantit tunnetaan. Havaitaan, että normaalijännitykset σ_α ja σ_β sekä leikkausjännitys $\tau_{\alpha\beta}$ ovat lineaarisia ζ :n funktioita. Ne siis jakautuvat kuoren paksuussuunnassa lineaarisesti. Poikittaiset leikkausjännitykset $\tau_{\alpha\zeta}$ ja $\tau_{\beta\zeta}$, sen sijaan, jakautuvat kuoren paksuussuunnassa parabolisesti.



Kuva 1.19: Kuoren jännityskomponenttien jakautuminen

Kuva 1.19a esittää kuinka normaalijännitys σ_α koostuu normaalivoimasta N_α aiheutuvasta vakio-osasta ja taivutusmomentista M_α aiheutuvasta lineaarisesta osasta sekä Kuva 1.19b esittää kuinka leikkausjännitys $\tau_{\alpha\beta}$ koostuu leikkausvoimasta $N_{\alpha\beta}$ aiheutuvasta vakio-osasta ja vääntömomentista $M_{\alpha\beta}$ aiheutuvasta lineaarisesta osasta. Kuva 1.19c esittää leikkausvoimasta Q_α aiheutuvan poikittaisen leikkausjännityksen $\tau_{\alpha\zeta}$ parabolista jakaumaa. Sen suurin arvo on kuoren keskipinnalla ja se häviää kuoren ala- ja yläpinnoilla.

Todetaan lopuksi, että normaalijännitysten σ_α ja σ_β jakautuma on analoginen ykkösen levyisen normaalivoiman N ja taivutusmomentin M rasittaman palkin suorakaidepalkin (Kuva 1.20) normaalijännityksen jakautuman

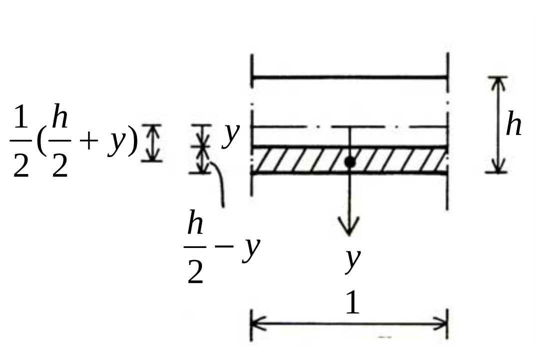
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$$

kanssa, kun huomataan, että $A = 1 \cdot h$, $I = 1 \cdot h^3/12$ ja $y \triangleq \zeta$. Poikittaisten leikkausjännitysten $\tau_{\alpha\zeta}$ ja $\tau_{\beta\zeta}$ jakautuminen on vastaavasti analoginen leikausvoiman Q rasittaman palkin jalautuman

$$\tau = \frac{QS}{I \cdot 1}$$

kanssa, kun huomataan, että

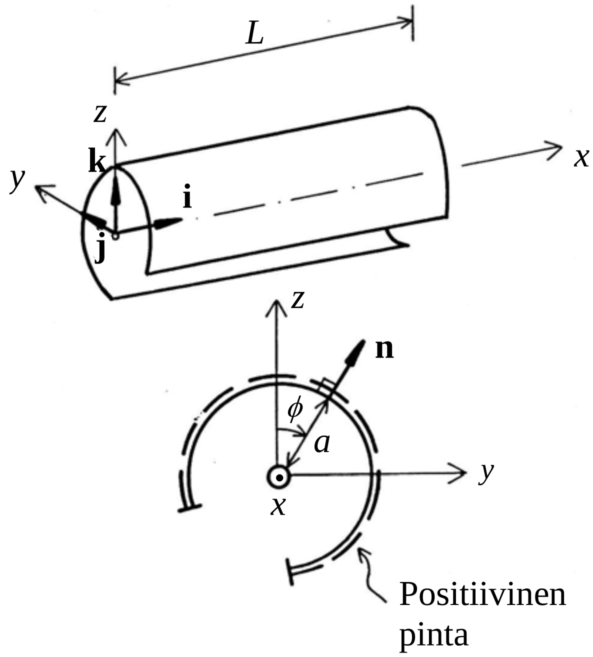
$$S = 1 \cdot (\frac{h}{2} - y) \cdot \frac{1}{2}(\frac{h}{2} + y) = \frac{h^2}{8}[1 - (\frac{2y}{h})^2].$$



Kuva 1.20: Ykkösen levyinen palkin suorakaidepoikkileikkaus

2. Sylinterikuori

2.1 Sylinterikuoren geometriaa



Kuva 2.1: Sylinterikuoren geometriaa

Sylinterikuorta on luontevaa tarkastella kuvan 2.1 koordinaatistossa. Keskipinnan paikkavektori on

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + a\sin\phi\mathbf{j} + a\cos\phi\mathbf{k}\,, \tag{2.1}$$

eli muotoa $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,\phi)$, joten keskipinnan käyräviivaiset koordinaatit α ja β ovat nyt x ja ϕ. Mittakaavatekijöille saadaan

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{A}} = |\mathbf{r},_x| = |\mathbf{i}| = \underline{\underline{1}}, \\ &\underline{\underline{B}} = |\mathbf{r},_\phi| = |a\cos\phi\mathbf{j} - a\sin\phi\mathbf{k}| = \sqrt{a^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi} = \underline{\underline{a}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Koordinaattiviivojen väliselle kulmalle saadaan

$$\cos\chi = \frac{1}{AB}\mathbf{r},_x \bullet \mathbf{r},_\phi = \frac{1}{a}\mathbf{i}\bullet(a\cos\phi\mathbf{j} - a\sin\phi\mathbf{k}) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\chi = 90^\circ}}. \tag{2.3}$$

Keskipinnan yksikkönormaalille saadaan

$$\mathbf{n} = \frac{1}{AB}\mathbf{r},_x \times \mathbf{r},_\phi = \frac{1}{a}\mathbf{i} \times (a\cos\phi\mathbf{j} - a\sin\phi\mathbf{k}) = \sin\phi\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}\,. \qquad (2.4)$$

Kaarevuuksille ja kierevyydelle saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_x} &= \frac{1}{A^2}\overbrace{\mathbf{n},_x}^{\mathbf{0}}\bullet\mathbf{r},_x = 0,\\
\frac{1}{R_\phi} &= \frac{1}{B^2}\mathbf{n},_\phi\bullet\mathbf{r},_\phi = \frac{1}{a^2}(\cos\phi\mathbf{j} - \sin\phi\mathbf{k})\bullet(a\cos\phi\mathbf{j} - a\sin\phi\mathbf{k}) = \frac{1}{a}, \qquad (2.5)\\
\frac{1}{R_{x\phi}} &= -\frac{1}{AB}\overbrace{\mathbf{n},_x}^{\mathbf{0}}\bullet\mathbf{r},_\phi = 0
\end{aligned}$$

eli vastaavat säteet ovat

$$\underline{\underline{R_x = \infty, \quad R_\phi = a, \quad R_{x\phi} = \infty.}} \qquad (2.6)$$

Koska $\chi = 90°$ ja $R_{x\phi} = \infty$ on koordinaatisto x,ϕ **kaarevuusviivojen muodostama koordinaatisto.**

2.2 Sylinterikuoren yhtälöt

2.21 Kiertymien ja muodonmuutossuureiden sekä siirtymien yhteydet

Kiertymien ja siirtymien yhteydet (1.92) saavat muodon

$$\underline{\underline{\varphi_x}} = \frac{1}{A}w,_x - \frac{\overbrace{u}^{0}}{R_x} = \underline{\underline{w,_x}}, \quad \underline{\underline{\varphi_\phi}} = \frac{1}{B}w,_\phi - \frac{v}{R_\phi} = \underline{\underline{\frac{1}{a}(w,_\phi - v).}}$$

Keskipinnan venymien ja liukuman lausekkeet (1.70) ja (1.88) saavat muodon

$$\underline{\underline{\varepsilon_x}} = \frac{1}{A}u,_x + \frac{\overbrace{A,_\phi}^{0}}{AB}v + \overbrace{\frac{1}{R_x}}^{0}w = \underline{\underline{u,_x}},$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_\phi}} = \frac{1}{B}v,_\phi + \frac{\overbrace{B,_x}^{0}}{AB}u + \frac{1}{R_\phi}w = \underline{\underline{\frac{1}{a}(v,_\phi + w)}},$$

$$\underline{\underline{\gamma_{x\phi}}} = \frac{B}{A}(\frac{v}{B}),_x + \frac{A}{B}(\frac{u}{A}),_\phi = \underline{\underline{v,_x + \frac{u,_\phi}{a}}}.$$

Kuoren käyristymien ja vääntymän lausekkeet (1.98) ja (1.101) saavat muodon

$$\underline{\underline{\kappa_x}} = -\frac{1}{A}(\frac{1}{A}w,_x - \overbrace{\frac{1}{R_x}}^{0}u),_x - \frac{\overbrace{A,_\phi}^{0}}{AB}(\frac{1}{B}w,_\phi - \frac{1}{R_\phi}v) = \underline{\underline{-w,_{xx}}},$$

$$\underline{\underline{\kappa_\phi}} = -\frac{1}{B}(\frac{1}{B}w,_\phi - \frac{1}{R_\beta}v),_\phi - \frac{\overbrace{B,_x}^{0}}{AB}(\frac{1}{A}w,_x - \frac{1}{R_x}u) = \underline{\underline{-\frac{1}{a^2}w,_{\phi\phi} + \frac{1}{a^2}v,_\phi}},$$

$$\underline{\underline{\kappa_{x\phi}}} = -\frac{1}{2}[\frac{B}{A}(\frac{1}{B^2}w,_\phi - \frac{1}{BR_\phi}v),_x + \frac{A}{B}(\frac{1}{A^2}w,_x - \overbrace{\frac{1}{AR_x}}^{0}u),_\phi] = \underline{\underline{-\frac{1}{a}w,_{x\phi} + \frac{1}{2a}v,_x}}$$

Sylinterikuoren kiertymien, keskipinnan venymien ja liukuman sekä kuoren käyristymien ja vääntymän lausekkeet siirtymien avulla lausuttuina ovat siis koottuina

$$\boxed{\varphi_x = w,_x\,, \quad \varphi_\phi = \frac{1}{a}(w,_\phi - v),} \tag{2.7}$$

$$\boxed{\varepsilon_x = u,_x\,, \quad \varepsilon_\phi = \frac{1}{a}(v,_\phi + w), \quad \gamma_{x\phi} = v,_x + \frac{u,_\phi}{a}} \tag{2.8}$$

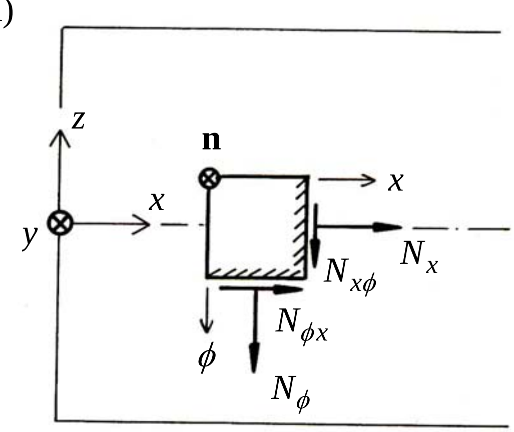
ja

$$\boxed{\kappa_x = -w,_{xx}\,, \quad \kappa_\phi = -\frac{1}{a^2}w,_{\phi\phi} + \frac{1}{a^2}v,_\phi\,, \quad \kappa_{x\phi} = -\frac{1}{a}w,_{x\phi} + \frac{1}{2a}v,_x\,.} \tag{2.9}$$

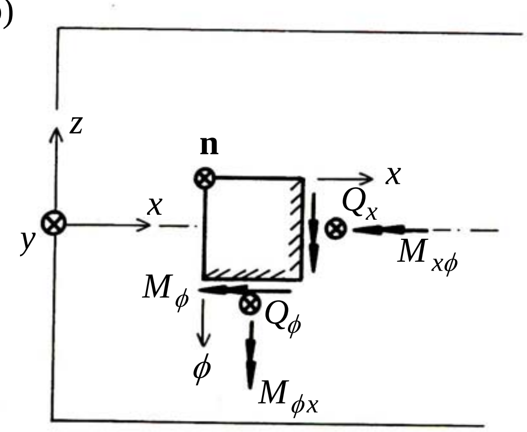
2.22 Jännitysresultanttien ja kuoren muodonmuutossuureiden väliset yhteydet sekä jännitykset

Sylinterikuoren jännitysresultanttien positiiviset suunnat sylinterin sisäpuolelta alaspäin katsottuna ovat kuvien 2.2 mukaiset. (Ajattelemalla alaindeksin ϕ paikalle y, havaitaan ilmeinen analogia laatan vastaavien suureiden kanssa.)

(a)



(b)



Kuva 2.2: Sylinterikuoren jännitysresultanttien positiiviset suunnat: (a) normaalivoimat ja keskipinnan suuntainen leikkausvoima (ns. kalvovoimat) sekä (c) poikittaiset leikkausvoimat, taivutusmomentit ja vääntömomentti.

Sylinterikuoren jännitysresultanttien ja muodonmuutossuureiden väliset yhteydet ovat suoraan kaavojen (1.121) mukaiset, kun $\alpha = x$ ja $\beta = \phi$, eli

$$\boxed{\begin{aligned}&N_x = C(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\phi), \quad N_\phi = C(\varepsilon_\phi + \nu\varepsilon_x), \quad N_{x\phi} = \frac{1-\nu}{2}C\gamma_{x\phi},\\ &M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_\phi), \quad M_\phi = D(\kappa_\phi + \nu\kappa_x), \quad M_{x\phi} = (1-\nu)D\kappa_{x\phi}.\end{aligned}} \tag{2.10}$$

Missä kuoren veto/puristusjäykkyys C ja taivutusjäykkyys D kuoren kimmomoduulin, Poissonin vakion ja paksuuden avulla lausuttuina ovat

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{2.11}$$

Sylinterikuoren jännityskomponentit saadaan jännitysresultanttien avulla kaavoista (vrt. kaavat (1.122) ja (1.123))

$$\boxed{\begin{aligned}&\sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{12M_x}{h^3}\zeta, \\ &\sigma_\phi = \frac{N_\phi}{h} + \frac{12M_\phi}{h^3}\zeta, \qquad \tau_{x\zeta} = \frac{3}{2}\frac{Q_x}{h}[1-(\frac{2\zeta}{h})^2], \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \tau_{\phi\zeta} = \frac{3}{2}\frac{Q_\phi}{h}[1-(\frac{2\zeta}{h})^2]. \\ &\sigma_{x\phi} = \frac{N_{x\phi}}{h} + \frac{12M_{x\phi}}{h^3}\zeta\end{aligned}} \tag{2.12}$$

2.23 Tasapainoyhtälöt

Kuoren yleisistä voimatasapainoyhtälöistä (1.111) saadaan aluksi

$$\frac{1}{AB}[(BN_x),_x + (AN_{\phi x}),_\phi + \overbrace{A,_\phi}^{0} N_{x\phi} - \overbrace{B,_x}^{0} N_\phi] + \frac{\overbrace{Q_x}^{0}}{R_x} + q_x = 0,$$

$$\frac{1}{AB}[(AN_\phi),_\phi + (BN_{x\phi}),_x + \overbrace{B,_x}^{0} N_{\phi x} - \overbrace{A,_x}^{0} N_x] + \frac{Q_\phi}{R_\phi} + q_\phi = 0,$$

$$\frac{1}{AB}[(BQ_x),_x + (AQ_\phi),_\phi] - \frac{\overbrace{N_x}^{0}}{R_x} - \frac{N_\phi}{R_\phi} + q_n = 0$$

ja tulokseksi **sylinterikuoren voimatasapainoyhtälöt**

$$
\boxed{\begin{aligned}
&N_x,_x + \frac{1}{a} N_{\phi x},_\phi + q_x = 0,\\
&N_{x\phi},_x + \frac{1}{a} N_\phi,_\phi + \frac{Q_\phi}{a} + q_\phi = 0,\\
&Q_x,_x + \frac{1}{a} Q_\phi,_\phi - \frac{N_\phi}{a} + q_n = 0.
\end{aligned}}
\tag{2.13}
$$

Kuoren yleisistä momenttitasapainoyhtälöistä (1.112) saadaan aluksi

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{AB}[(BM_x),_x + (AM_{\phi x}),_\phi + \overbrace{A,_\phi}^{0} M_{x\phi} - \overbrace{B,_x}^{0} M_\phi] - Q_x = 0,\\
&\frac{1}{AB}[(AM_\phi),_\phi + (BM_{x\phi}),_x + \overbrace{B,_x}^{0} M_{\phi x} - \overbrace{A,_\phi}^{0} M_x] - Q_\phi = 0
\end{aligned}
$$

ja tulokseksi **sylinterikuoren momenttitasapainoyhtälöt**

$$
\boxed{\begin{aligned}
&M_x,_x + \frac{1}{a} M_{\phi x},_\phi - Q_x = 0,\\
&\frac{1}{a} M_\phi,_\phi + M_{x\phi},_x - Q_\phi = 0.
\end{aligned}}
\tag{2.14}
$$

Näistä yhtälöistä voidaan helposti ratkaista poikittaiset leikkausvoimat

$$
\begin{aligned}
&Q_x = M_x,_x + \frac{1}{a} M_{\phi x},_\phi ,\\
&Q_\phi = \frac{1}{a} M_\phi,_\phi + M_{x\phi},_x .
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Sijoittamalla ne voimatasapainoyhtälöihin saadaan yhtälöt

$$
\boxed{\begin{aligned}
&N_x,_x + \frac{1}{a} N_{\phi x},_\phi + q_x = 0,\\
&N_{x\phi},_x + \frac{1}{a} N_\phi,_\phi + \frac{1}{a} M_{x\phi},_x + \frac{1}{a^2} M_\phi,_\phi + q_\phi = 0,\\
&M_x,_{xx} + \frac{2}{a} M_{x\phi},_{x\phi} + \frac{1}{a^2} M_\phi,_{\phi\phi} - \frac{N_\phi}{a} + q_n = 0.
\end{aligned}}
\tag{2.16}
$$

Nämä ovat sylinterikuoren tasapainoyhtälöt, joista on eliminoitu leikkausvoimat.

2.3 Pyörähdyssymmetrinen sylinterikuori

2.31 Yhtälöt

Tarkastellaan suljettua, putkimaista sylinterikuorta. Otaksutaan, että siihen kohdistuva kuormitus on $x-$akselin suhteen symmetrinen. Tämä pyörähdyssymmetrisyys merkitsee sitä, että suureet eivät voi riippua koordinaatista ϕ ja vektorisuureiden $\phi-$viivan suuntaisen komponenttien tulee hävitä. Kuoren jakautuneen kuorman komponentit ovat siten

$$q_x = q_x(x), \quad q_\phi = 0, \quad q_n = q_n(x). \tag{2.17}$$

ja siirtymät ovat

$$u = u(x), \quad v = 0, \quad w = w(x). \tag{2.18}$$

Lausekkeista (2.7), (2.8) ja (2.9) saadaan nyt

$$\varphi_x = \frac{dw}{dx}, \quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{w}{a}, \quad \kappa_x = -\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{2.19}$$

ja $\varphi_\phi = 0,\ \gamma_{x\phi} = 0,\ \kappa_\phi = 0,\ \kappa_{x\phi} = 0$. Yhteyksistä (2.10), (2.11), (2.12) ja (2.19) seuraa

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dx} + \nu\frac{w}{a}\right), \quad N_\phi = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{w}{a} + \nu\frac{du}{dx}\right), \\ M_x &= -D\frac{d^2w}{dx^2}, \quad M_\phi = \nu M_x, \\ Q_x &= M_{x,x} = -\frac{d}{dx}\left(D\frac{d^2w}{dx^2}\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

ja $N_{x\phi} = 0,\ M_{x\phi} = 0,\ Q_\phi = 0$. Koska tarkasteltavat funktiot riippuvat vain yhdestä muuttujasta x osittaisderivaattojen paikalle tulivat tavalliset derivaatat. Yhtälöistä (2.16) seuraa

$$\begin{aligned} &\frac{dN_x}{dx} + q_x = 0, \\ &\frac{d^2M_x}{dx^2} - \frac{N_\phi}{a} + q_n = 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.32 Pyörähdyssymmetrisen sylinterikuoren differentiaaliyhtälö

Yhtälöstä (2.20a) seuraa

$$\frac{du}{dx} = \frac{1-\nu^2}{Eh} N_x - \nu \frac{w}{a}. \tag{2.22}$$

Sijoittamalla tämä lausekkeeseen (2.20b) saadaan

$$\boxed{N_\phi = \frac{Eh}{a} w + \nu N_x.} \tag{2.23}$$

Sijoittamalla tämä ja lauseke (2.20) tasapainoyhtälöön (2.21b) saadaan

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \frac{Eh}{a^2} w = q_n - \frac{\nu}{a} N_x. \tag{2.24}$$

Tämä on pyörähdyssymmetrisen umpinaisen sylinterikuoren keskipinnan poikittaisen siirtymän (eli taipuman) $w(x)$ differentiaaliyhtälö. Normaalivoima $N_x(x)$ yhtälön oikealla puolella on ratkaistava etukäteen yhtälöstä (2.21a), joten se on muotoa

$$\boxed{N_x = -\int q_x dx + C,} \tag{2.25}$$

Missä integrointivakio C määräytyy normaalivoimalle $N_x(x)$ asetettavasta reunaehdosta kuoren jommassakummassa päässä. Yhtälön (2.24) oikea puoli voidaan myös ymmärtää muunnetuksi jakautuneeksi kuormaksi

$$\boxed{q_n^* = q_n - \frac{\nu}{a} N_x.} \tag{2.26}$$

Jos kuori on tasajäykkä, yhtälö (2.24) saadaan muodon

$$w^{(4)} + \frac{Eh}{a^2 D} w = \frac{q_n^*}{D}, \tag{2.27}$$

missä $w^{(4)} = d^4 w / dx^4$, ja edelleen

$$\boxed{w^{(4)} + 4\beta^4 w = \frac{q_n^*}{D},} \tag{2.28}$$

missä

$$\boxed{\beta = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4Da^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2 a^2}}} \tag{2.29}$$

on niin sanottu **vaimennusluku**.

Pyörähdyssymmetrisen umpinaisen sylinterikuoren differentiaaliyhtälö (2.28) on analoginen kimmoisalla alustalla olevan palkin differentiaaliyhtälön

$$v^{(4)} + 4\beta^4 v = \frac{q}{EI} \tag{2.30}$$

kanssa. Tässä analogiassa palkin taipumaa $v(x)$ vastaa kuoren taipuma $w(x)$, palkin taivutusjäykkyyttä EI vastaa kuoren taivutusjäykkyys D ja palkin jakautunutta kuormaa $q(x)$ vastaa kuoren muunnettu poikittainen jakautunut kuorma $q_n^*(x)$. Kimmoisalla alustalla olevalla palkilla vaimennusluvulla on kaavalla

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}, \tag{2.31}$$

missä k on alustaluku. Merkitsemällä vaimennuslukujen lausekkeet (2.29) ja (2.32) yhtä suuriksi ja ratkaisemalla alustaluku, saadaan

$$k = \frac{Eh}{a^2}. \tag{2.32}$$

Esitetty analogia antaa mahdollisuuden sylinterikuorta analysoitaessa hyödyntää suoraan olemassa olevia kimmoisalla alustalla olevan palkin ratkaisuja, joita löytyy kirjallisuudessa.

Vastaavaan tapaan kuin kimmoisalla alustalla olevan palkin tapauksessa, myös sylinterikuoret jaotellaan niiden ratkaisemista silmälläpitäen puoliäärettömiin ja äärellisiin sylinterikuoriin. Seuraavassa tarkastellaan sylinterikuoren ratkaisemista käyttäen osittain hyväksi rakenteiden mekaniikan perusteiden kurssissa kimmoisalla alustalla olevalle pakille johdettuja tuloksia.

2.33 Pyörähdyssymmetrisen sylinterikuoren puoliääretön ratkaisu

Kun sylinterikuoren pituus L on riittävä eli se toteuttaa ehdon

$$\beta L > 5, \tag{2.33}$$

kuoren päiden tuennasta tai niissä vaikuttavista kuormista aiheutuvat **reunahäiriöt** ovat niin paikallisia, että päihin liittyvät ratkaisut voidaan muodostaa toisistaan riippumatta. Tällöin voidaan käyttää ns. **puoliääretöntä** ratkaisua.

Sijoitetaan koordinaatiston origo $x = 0$ tarkasteltavaan kuoren päähän. Tällöin palkki jää joko positiivisen tai negatiivisen $x -$akselin puolelle. Pyörähdyssymmetrisen sylinterikuoren puoliääretön ratkaisu on muotoa

$$\boxed{w(x) = e^{\mp\beta x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) + w_0(x),} \tag{2.34}$$

(vrt. Rakenteiden lujuusopin luentomonisteen kaava (9.26) ja esillä ollut analogia). Kaavassa (2.34) ylempi merkki vastaa positiivista x-akselia ($x \geq 0$) ja alempi merkki negatiivista x-akselia ($x \leq 0$) sekä $w_0(x)$ on muunnetusta jakautuneesta kuormituksesta $q_n^*(x)$ aiheutuva yksityisratkaisu. Integroimisvakiot C_1 ja C_2 määräytyvät reunaehdoista.

2.34 Pyörähdyssymmetrisen sylinterikuoren äärellinen ratkaisu

Kun sylinterikuoren pituus L toteuttaa ehdon

$$\beta L < 5, \tag{2.35}$$

käytetään ns. **äärellistä** ratkaisua.

Pyörähdyssymmetrisen sylinterikuoren äärellinen ratkaisu on

$$\boxed{w(x) = C_1 Y_1(\beta x) + C_2 Y_2(\beta x) + C_3 Y_3(\beta x) + C_4 Y_4(\beta x) + w_0(x),} \tag{2.36}$$

(vrt. Rakenteiden lujuusopin luentomonisteen kaava (9.28) ja esillä ollut analogia). Apufunktiot Y_i kaavassa (2.36) ovat

$$\boxed{\begin{aligned}
Y_1(\xi) &= \cosh\xi\cos\xi,\\
Y_2(\xi) &= \frac{1}{2}(\cosh\xi\sin\xi + \sinh\xi\cos\xi),\\
Y_3(\xi) &= \frac{1}{2}\sinh\xi\sin\xi,\\
Y_4(\xi) &= \frac{1}{4}(\cosh\xi\sin\xi - \sinh\xi\cos\xi).
\end{aligned}} \tag{2.37}$$

Ne derivoituvat taulukon 2.1 mukaisesti ja niille pätee

$$\boxed{Y_1(0) = 1,\; Y_2(0) = Y_3(0) = Y_4(0) = 0.} \tag{2.38}$$

Taulukko 2.1: Apufunktioiden $Y_i(\xi)$ derivaatat.

i	Y_i	Y_i'	Y_i''	Y_i'''	$Y_i^{(4)}$
1	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$	$-4Y_1$
2	Y_2	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$
3	Y_3	Y_2	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$
4	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	$-4Y_4$

Ratkaisussa (2.36) esiintyvät integroimisvakiot C_1, C_2, C_3 ja C_4 määräytyvät reunaehdoista.

2.35 Yksityisratkaisu

Yksityisratkaisu $w_0(x)$ aiheutuu muunnetusta jakautuneesta kuormasta $q_n^*(x)$. Kuoren osalla, jossa $q_n^* = 0$ pätee täten $w_0(x) = 0$. Jos jakautunut kuorma $q_n^*(x)$ on polynomimuotoinen ja korkeintaan kolmatta astetta, voidaan myös yksityisratkaisulle ottaa samanasteinen yrite $w_0(x)$. Tällöin $w_0^{(4)}(x) = 0$ ja sijoitus differentiaaliyhtälöön (2.30) antaa

$$4\beta^4 w_0(x) = \frac{q_n^*(x)}{D}, \tag{2.39}$$

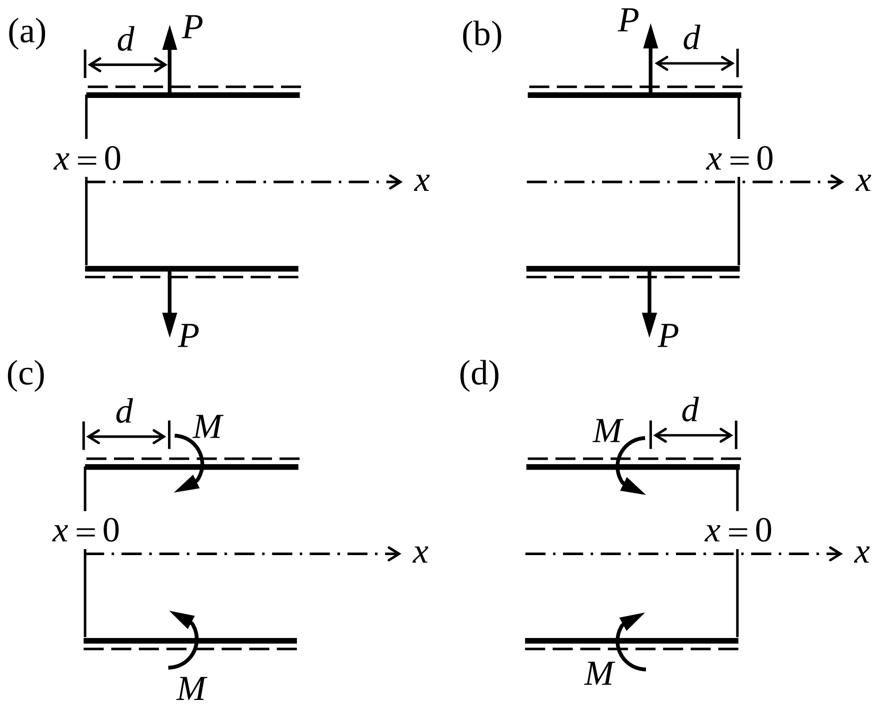
josta seuraa yksityisratkaisulle välittömästi tulos

$$\boxed{w_0(x) = \frac{q_n^*(x)}{4\beta^4 D} = \frac{a^2}{Eh} q_n^*(x).} \tag{2.40}$$

Tämä yksinkertainen yksityisratkaisun lauseke pätee siis, jos **muunnettu jakautunut kuorma** $q_n^*(x)$ on **polynomimuotoinen ja korkeintaan kolmatta astetta**. Taulukossa 2.2 esitetään yksityisratkaisut tapauksissa, jossa kuorta kuormittaa etäisyydellä d sen päästä sijaitseva tasan jakautunut ”rengaskuorma” P tai tasan jakautunut ”rengasmomentti” M. Näiden tulosten johtoa tarkastellaan esimerkissä 2.2.

Taulukko 2.2: Eräitä pyörähdyssymmetrisen sylinterikuoren yksityis-ratkaisuja.

Tasan jakautunut rengaskuorma P kohdassa $x = d$ (vrt. kuva 2.3a)	$w_0(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{8D\beta^3} e^{-\beta(d-x)}[\cos\beta(d-x) + \sin\beta(d-x)], & 0 \le x < d, \\ \dfrac{P}{8D\beta^3} e^{-\beta(x-d)}[\cos\beta(x-d) + \sin\beta(x-d)], & x > d. \end{cases}$
Tasan jakautunut rengaskuorma P kohdassa $x = -d$ (vrt. kuva 2.3b)	$w_0(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{8D\beta^3} e^{-\beta(d+x)}[\cos\beta(d+x) + \sin\beta(d+x)], & -d \le x \le 0, \\ \dfrac{P}{8D\beta^3} e^{\beta(x+d)}[\cos\beta(x+d) - \sin\beta(d+x)], & x \le -d. \end{cases}$
Tasan jakautunut rengasmomentti M kohdassa $x = d$ (vrt. kuva 2.3c)	$w_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{M}{4D\beta^2} e^{-\beta(d-x)} \sin\beta(d-x), & 0 \le x < d, \\ \dfrac{M}{4D\beta^2} e^{-\beta(x-d)} \sin\beta(x-d)], & x > d. \end{cases}$
Tasan jakautunut rengasmomentti M kohdassa $x = -d$ (vrt. kuva 2.3d)	$w_0(x) = \begin{cases} \dfrac{M}{4D\beta^2} e^{-\beta(d+x)} \sin\beta(d+x), & -d < x \le 0, \\ \dfrac{M}{4D\beta^2} e^{\beta(x+d)} \sin\beta(x+d)], & x < -d. \end{cases}$



Kuva 2.3: Tasan jakautunut rengaskuorma P tai rengasmomentti M etäisyydellä d kuoren päästä.

2.4 Sylinterikuoren kalvotila

Yhtälöistä (2.13) seuraa sylinterikuoren kalvotilan ($M_x = 0$, $M_\phi = 0$ $M_{x\phi} = 0$, $Q_x = 0$ ja $Q_y = 0$) tasapainoyhtälöiksi

$$
\begin{aligned}
&N_{x},_{x} + \frac{1}{a} N_{\phi x},_{\phi} + q_x = 0,\\
&N_{x\phi},_{x} + \frac{1}{a} N_{\phi},_{\phi} + q_\phi = 0, \qquad (2.41)^1\\
&-\frac{N_\phi}{a} + q_n = 0.
\end{aligned}
$$

Yhtälöt (2.41) voidaan integroida peräkkäin, jolloin **sylinterikuoren kalvotilan jännitysresultanteille** saadaan lausekkeet

$$
\begin{aligned}
&N_\phi = a q_n,\\
&N_{x\phi} = -\int (q_\phi + \frac{1}{a} N_{\phi},_{\phi}) dx + f_1(\phi), \qquad (2.42)\\
&N_x = -\int (\frac{1}{a} N_{\phi x},_{\phi} + q_x) dx + f_2(\phi).
\end{aligned}
$$

Integrointifunktiot $f_1(\phi)$ ja $f_2(\phi)$ voidaan määrittää kalvovoimille N_x ja $N_{x\phi}$ asetettavien reunaehtojen avulla.

Kalvotilan muodonmuutosten ja siirtymien yhteydet saadaan suoraan yhteyksistä (2.8)

$$
\varepsilon_x = u,_x, \quad \varepsilon_\phi = \frac{1}{a}(v,_\phi + w), \quad \gamma_{x\phi} = v,_x + \frac{u,_\phi}{a}.
$$

Ne voidaan taas integroida peräkkäin, jolloin **sylinterikuoren kalvotilan siirtymille** saadaan lausekkeet

[1] Voidaan osoittaa, että yhtälöt (2.41) ovat voimassa myös kuorille, joiden poikkileikkaus ei ole ympyrä eli säde a on kulman ϕ funktio.

$$
\begin{aligned}
u &= \int \varepsilon_x dx + f_3(\phi), \\
v &= \int (\gamma_{xy} - \frac{1}{a} u,_x) dx + f_4(\phi), \qquad (2.43) \\
w &= a\varepsilon_\phi - v,_\phi ,
\end{aligned}
$$

missä funktiot $f_3(\phi)$ ja $f_4(\phi)$ voidaan määrittää siirtymille u ja v asetettavien reunaehtojen avulla. Kun kaavoja (2.42) sovelletaan ensin, kaavoissa (2.43) esiintyvät keskipinnan muodonmuutokset

$$
\varepsilon_x = \frac{1}{Eh}(N_x - \nu N_y), \quad \varepsilon_\phi = \frac{1}{Eh}(N_\phi - \nu N_x)\varepsilon\gamma_{x\phi} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{x\phi} \qquad (2.44)
$$

voidaan sen jälkeen määrittää ja ne ovat kaavoja (2.43) sovellettaessa jo tunnettuja funktioita.

2.5 Yleisen kuormituksen alainen sylinterikuori

2.51 Sylinterikuoren teknisen teorian mukaiset yhtälöt

Seuraavassa johdetaan sylinterikuoren ratkaisemiseksi kolme osittaisdifferentiaaliyhtälön muodostama yhtälöryhmä, jossa on tuntemattomina siirtymäkomponentit u, v ja w. Kysymyksessä on silloin ns. **siirtymämenetelmä**. Johdettaessa tehdään ns. **sylinterikuoren teknisen teorian** mukaiset yksinkertaistavat olettamukset, joiden tuloksena päästään jonkin verran yleiseen tapaukseen nähden yksinkertaisempiin yhtälöihin. Nämä ovat osoittautuneet varsin käyttökelpoisiksi käytännön tehtäviä ratkaistaessa.

Sylinterikuoren yhtälöihin tulevia teknisen teorian mukaisia yksinkertaistuksia ei tässä yhteydessä seikkaperäisesti perustella, vaan ne lähinnä luetellaan lyhyesti. Teknisessä teoriassa otaksutaan, että kuoren käyristymät ja vääntymä eivät riipu keskipinnan suuntaisista siirtymäkomponenteista (u ja v), joten käyristymien ja vääntymän lausekkeet (2.9) yksinkertaistuvat muotoon

$$\boxed{\kappa_x = -w,_{xx}\,, \quad \kappa_\phi = -\frac{1}{a^2}w,_{\phi\phi}\,, \quad \kappa_{x\phi} = -\frac{1}{a}w,_{x\phi}\,.} \tag{2.45}$$

Toinen teknisessä teoriassa tehtävä yksinkertaistus tehdään tasapainoyhtälöihin (2.13). Toisesta yhtälöstä (2.13b) leikkausvoiman Q_ϕ sisältävän termin voidaan perustella olevan yhtälön muihin termeihin nähden niin pieni, että se voidaan jättää pois. Näin tasapainoyhtälöt (2.13) ja (2.14) saavat muodon

$$\boxed{\begin{aligned}
&N_x,_x + \frac{1}{a}N_{\phi x},_\phi + q_x = 0,\\
&N_{x\phi},_x + \frac{1}{a}N_\phi,_\phi + q_\phi = 0,\\
&Q_x,_x + \frac{1}{a}Q_\phi,_\phi - \frac{N_\phi}{a} + q_n = 0,\\
&M_x,_x + \frac{1}{a}M_{\phi x},_\phi - Q_x = 0,\\
&\frac{1}{a}M_\phi,_\phi + M_{x\phi},_x - Q_\phi = 0.
\end{aligned}} \tag{2.46}$$

Eliminoimalla leikkausvoimat, saadaan kalvovoimien ja taivutus-momenttien avulla lausutut tasapainoyhtälöt

$$\boxed{\begin{aligned} &N_{x},_{x} + \frac{1}{a} N_{\phi x},_{\phi} + q_{x} = 0, \\ &N_{x\phi},_{x} + \frac{1}{a} N_{\phi},_{\phi} + q_{\phi} = 0, \\ &M_{x},_{xx} + \frac{2}{a} M_{\phi x},_{x\phi} + \frac{1}{a^2} M_{\phi},_{\phi\phi} - \frac{N_{\phi}}{a} + q_{n} = 0. \end{aligned}} \tag{2.47}$$

Sijoittamalla nyt muodonmuutossuureiden lausekkeet (2.8) ja (2.45) jännitysresultanttien lausekkeisiin (2.10) saadaan sylinterikuoren jännitysresultanttien ja siirtymien yhteydet muotoon

$$\boxed{\begin{aligned} &N_{x} = C(u,_{x} + \nu \frac{v,_{\phi} + w}{a}), \\ &N_{\phi} = C(\frac{v,_{\phi} + w}{a} + \nu u,_{x}), \\ &N_{x\phi} = C \frac{1-\nu}{2}(v,_{x} + \frac{u,_{\phi}}{a}), \\ &M_{x} = -D(w,_{xx} + \nu \frac{w,_{\phi\phi}}{a^2}), \\ &M_{\phi} = -D(\frac{w,_{\phi\phi}}{a^2} + \nu w,_{xx}), \\ &M_{x\phi} = -D(1-\nu)\frac{w,_{x\phi}}{a}. \end{aligned}} \tag{2.48}$$

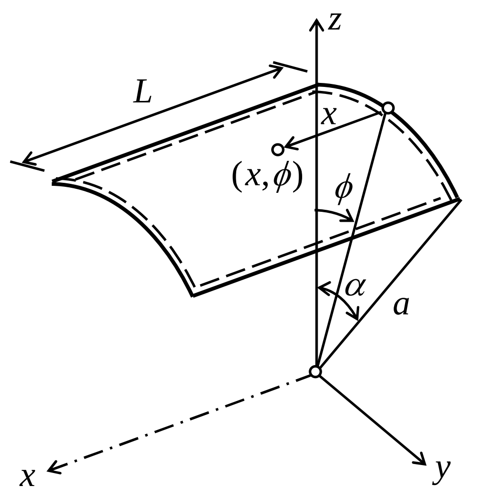
Sijoittamalla nämä sylinterikuoren tasapainoyhtälöihin (2.47) ja käyttämällä jäykkyyksien *C* ja *D* lausekkeita (2.11) saadaan

$$\boxed{\begin{aligned} &u,_{xx} + \frac{1-\nu}{2}\frac{u,_{\phi\phi}}{a^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{v,_{x\phi}}{a} + \nu \frac{w,_{x}}{a} = -q_{x}\frac{1-\nu^2}{Eh}, \\ &\frac{1+\nu}{2a} u,_{x\phi} + \frac{1-\nu}{2} v,_{xx} + \frac{1}{a^2} v,_{\phi\phi} + \frac{1}{a^2} w,_{\phi} = -q_{\phi}\frac{1-\nu^2}{Eh}, \\ &\frac{\nu}{a} u,_{x} + \frac{1}{a^2} v,_{\phi} + \frac{w}{a^2} + \frac{h^2}{12}(w,_{xxxx} + \frac{2}{a^2} w,_{xx\phi\phi} + \frac{1}{a^4} w,_{\phi\phi\phi\phi}) = \frac{1-\nu^2}{Eh} q_{n}. \end{aligned}} \tag{2.49}$$

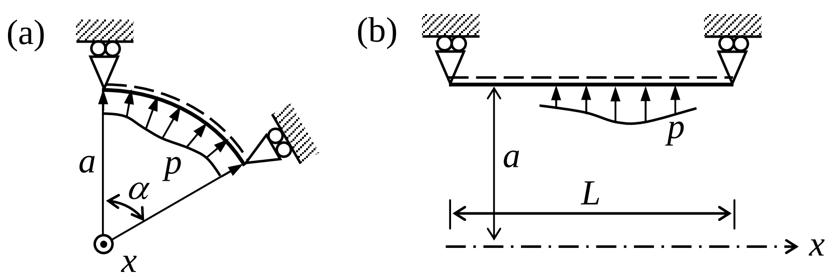
Yhtälöt (2.49) muodostavat ns. **teknisen teorian** mukaiset sylinterikuoren siirtymien $u(x,\phi)$, $v(x,\phi)$ ja $w(x,\phi)$ differentiaaliyhtälöt. Yhtälöt (2.48) ovat vastaavat kuoren jännitysresultanttien ja siirtymien yhteydet, joita tarvitaan reunaehtojen esittämisessä ja jännitysresultanttien määrittämisessä, kun siirtymät on ratkaistu.

2.52 Reunoiltaan vapaasti tuetun, avoimen sylinterikuoren kaksoissarjaratkaisu

Tarkastellaan sylinterikuorta, joka on reunoiltaan vapaasti tuettu ja sitä kuormittaa jakautunut painekuorma $p(x,\phi)$. Kuoren geometrian määrittelee tällöin kuoren pituus L, keskuskulma α ja säde a (vrt. kuva 2.4).



Kuva 2.4: Reunoiltaan vapaasti tuettu, avoin sylinterikuori



Kuva 2.5: Vapaasti tuetut reunat (a) pääty ja (b) sivu

Kuoren reunaehdot (kuva 2.5) ovat

$$
\begin{aligned}
&v = 0 \quad N_x = 0 \quad w = 0 \quad M_x = 0 \quad (x = 0,\, x = L),\\
&u = 0 \quad N_\phi = 0 \quad w = 0 \quad M_\phi = 0 \quad (\phi = 0,\, \phi = \alpha).
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

Otetaan siirtymille seuraavat kaksoissarjalausekkeet (vrt. Liite A)

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} \cos\alpha_i x \sin\beta_j\phi,\\
v &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} v_{ij} \sin\alpha_i x \cos\beta_j\phi,\\
w &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \sin\alpha_i x \sin\beta_j\phi,
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

missä

$$
\alpha_i = \frac{i\pi}{L}, \quad \beta_i = \frac{j\pi}{\alpha}. \tag{2.52}
$$

Helposti voidaan osoittaa, että nämä siirtymät toteuttavat automaattisesti tehtävämme reunaehdot (2.50). Otetaan paineelle vastaavan tyyppinen esitys, jolloin kuoreen kohdistuvan jakautuneen kuorman komponentit ovat

$$
q_x = q_\theta = 0, \quad q_n = p = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \sin\alpha_i x \sin\beta_j\phi, \tag{2.53}
$$

missä kertoimet p_{ij} voidaan määrittää tavanomaiseen tapaan. Sijoittamalla lausekkeet (2.51) ja (2.53) differentiaaliyhtälöihin (2.49) saadaan yhtälöt

$$
\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \cos\alpha_i x \sin\beta_j\phi [(\alpha_i^2 + \frac{1-\nu}{2a^2}\beta_j^2) \cdot u_{ij} + \frac{1+\nu}{2a}\alpha_i\beta_j \cdot v_{ij} - \frac{\nu}{a}\alpha_i \cdot w_{ij}] = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \sin\alpha_i x \cos\beta_j\phi [-\frac{1+\nu}{2a}\alpha_i\beta_j \cdot u_{ij} - (\frac{1-\nu}{2}\alpha_i^2 + \frac{1}{a^2}\beta_j^2) \cdot v_{ij}&\\
+ \frac{1}{a^2}\beta_j \cdot w_{ij}] = 0,&
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sin\alpha_i x\sin\beta_j\phi\{-\frac{\nu}{a}\alpha_i u_{ij}-\frac{1}{a^2}\beta_j v_{ij}$$

$$+[\frac{1}{a^2}+\frac{h^2}{12}(\alpha_i^4+\frac{2}{a^2}\alpha_i^2\beta_j^2+\frac{1}{a^4}\beta_j^4)]w_{ij}-\frac{1-\nu^2}{Eh}p_{ij}\}=0,$$

jotka toteutuvat, jos

$$\begin{cases}(\alpha_i^2+\frac{1-\nu}{2a^2}\beta_j^2)\cdot u_{ij}+\frac{1+\nu}{2a}\alpha_i\beta_j\cdot v_{ij}-\frac{\nu}{a}\alpha_i\cdot w_{ij}=0,\\ \frac{1+\nu}{2a}\alpha_i\beta_j\cdot u_{ij}+(\frac{1-\nu}{2}\alpha_i^2+\frac{1}{a^2}\beta_j^2)\cdot v_{ij}-\frac{1}{a^2}\beta_j\cdot w_{ij}=0,\\ -\frac{\nu}{a}\alpha_i u_{ij}-\frac{1}{a^2}\beta_j v_{ij}+[\frac{1}{a^2}+\frac{h^2}{12}(\alpha_i^2+\frac{\beta_j^2}{a^2})^2]w_{ij}=\frac{1-\nu^2}{Eh}p_{ij}.\end{cases} \tag{2.54}$$

Nämä yhtälöt muodostavat kolmen yhtälön yhtälöryhmän, jonka avulla siirtymien sarjan kertoimet u_{ij}, v_{ij} ja w_{ij} kullakin i:n ja j:n arvolla saadaan määritetyksi. Kun nämä sitten tunnetaan saadaan siirtymät kaavoista (2.51). Jännitysresultanttien määrittämiseksi saadaan kaavat

$$N_x=\frac{Eh}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(-\alpha_i u_{ij}+\nu\frac{-\beta_j v_{ij}+w_{ij}}{a})\sin\alpha_i x\sin\beta_j\phi,$$

$$N_\phi=\frac{Eh}{1-\nu^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{-\beta_j v_{ij}+w_{ij}}{a}-\nu\alpha_i u_{ij})\sin\alpha_i x\sin\beta_j\phi,$$

$$N_{x\phi}=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_i v_{ij}+\frac{\beta_j u_{ij}}{a})\cos\alpha_i x\cos\beta_j\phi,$$

$$M_x=D\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_i^2+\nu\frac{\beta_j^2}{a^2})w_{ij}\sin\alpha_i x\sin\beta_j\phi,$$

$$M_\phi=D\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{\beta_j^2}{a^2}+\nu\alpha_i^2)w_{ij}\sin\alpha_i x\sin\beta_j\phi,$$

$$M_{x\phi}=-D(1-\nu)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_i\beta_j}{a}w_{ij}\cos\alpha_i x\cos\beta_j\phi. \tag{2.55}$$

2.53 Yksinkertaistettu likiteoria avoimille sylinterikuorille

Edellä on käynyt ilmi, että avointen sylinterikuorten analysointi jo yksinkertaisissa tapauksissa on sangen monimutkaista. Tällaisten kuorten jännitystilan määrittäminen riittävällä tarkkuudella kalvoteoriaa käyttäen ei myöskään ole mahdollista. Tämän vuoksi käytännön sovellutuksiin tarvittavia ratkaisuja on jouduttu kehittämään ottamalla käyttöön yksinkertaistavia olettamuksia. Tässä luvussa tarkastellaan mahdollisimman yksinkertaista menetelmää, jonka on kehittänyt H. Schorer 1935. Tämä **Schorer'in menetelmä** perustuu seuraaviin otaksumiin:

1. Taivutus aksiaalisissa tasoissa voidaan jättää huomiotta, ts. $M_x = 0$ ja $Q_x = 0$.
2. Vääntömomentti M_{xy} voidaan jättää huomiotta.
3. Keskipinnan tangentiaalinen venymä ε_θ ja liukuma $\gamma_{x\theta}$ ovat pieniä aksiaaliseen venymään ε_x nähden ja voidaan siten jättää huomiotta.
4. Poisson'in vakio voidaan jättää huomiotta, ts. $\nu = 0$.

On olemassa asianmukaista teoreettista ja kokeellista aineistoa, joka puoltaa näiden olettamusten tekemistä. Niiden avulla sylinterikuoren yhtälöt yksinkertaistuvat huomattavasti.

Sijoittamalla $M_x = 0$, $M_{x\phi} = 0$ ja $\nu = 0$ jännitysresultanttien ja siirtymien yhteyksiin (2.48), saadaan

$$
\begin{aligned}
N_x &= Ehu,_x \,, \\
N_\phi &= \frac{Eh}{a}(v,_\phi + w), \\
N_{x\phi} &= \frac{Eh}{2}(v,_x + \frac{u,_\phi}{a}), \\
M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12a^2} w,_{\phi\phi} \,.
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Sijoittamalla $M_x = 0$, $M_{x\phi} = 0$ tasapainoyhtälöihin (2.46) saadaan

$$
\begin{aligned}
&aN_x{,}_x + N_{x\phi}{,}_\phi + q_x a = 0,\\
&aN_{x\phi}{,}_x + N_\phi{,}_\phi + q_\phi a = 0,\\
&Q_\phi{,}_\phi - N_\phi + q_n a = 0,\\
&M_\phi{,}_\phi - aQ_\phi = 0.
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Kahdesta viimeisestä yhtälöstä (2.57) voidaan eliminoida leikkausvoima Q_ϕ, jolloin saadaan

$$
\frac{1}{a}M_\phi{,}_{\phi\phi} - N_\phi + q_n a = 0. \tag{2.58}
$$

Derivoimalla yhtälö (2.57a) puolittain x:n suhteen yhtälö (2.57b) puolittain ϕ:n suhteen, voidaan syntyneestä yhtälöparista eliminoida $N_{x\phi}$, jolloin saadaan

$$
N_x{,}_{xx} - \frac{1}{a^2}N_\phi{,}_{\phi\phi} + q_{x,x} - \frac{1}{a}q_\phi{,}_\phi = 0. \tag{2.59}
$$

Yhtälöistä (2.58) ja (2.59) voidaan edelleen eliminoida kalvovoima N_ϕ, jolloin saadaan yhtälö

$$
-\frac{1}{a^3}M_\phi{,}_{\phi\phi\phi\phi} + N_x{,}_{xx} + q_{x,x} - \frac{1}{a}q_\phi{,}_\phi - \frac{1}{a}q_n{,}_{\phi\phi} = 0. \tag{2.60}
$$

Tämä yhtälö esittää kuoren tasapainoyhtälön taivutusmomentin M_ϕ ja normaalivoiman N_x avulla.

Kaavoista (2.8b ja c) ja otaksumasta 3 seuraa yhteydet

$$
v{,}_\phi = -w, \quad v{,}_x = -\frac{u{,}_\phi}{a} \tag{2.61}
$$

joista voidaan eliminoida v, jolloin saadaan yhteys

$$
w{,}_x = \frac{u{,}_{\phi\phi}}{a}. \tag{2.62}
$$

Derivoimalla yhtälö (2.60) kahdesti muuttujan ϕ suhteen saadaan

$$-\frac{1}{a^3}M_\phi,_{\phi\phi\phi\phi\phi\phi} + N_x,_{xx\phi\phi} + q_{x,x\phi\phi} - \frac{1}{a}q_\phi,_{\phi\phi\phi} - \frac{1}{a}q_n,_{\phi\phi\phi\phi} = 0. \qquad (2.63)$$

Sijoittamalla tähän yhtälöön M_ϕ ja N_x lausekkeista (2.56 a ja d) sekä ottamalla huomioon yhteys (2.62) saadaan tulos

$$w,_{\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi} + \frac{12a^6}{Eh^3}Ehaw,_{xxxx} = \frac{12a^4}{Eh^3}(-aq_{x,x\phi\phi} + q_\phi,_{\phi\phi\phi} + q_n,_{\phi\phi\phi\phi}) \qquad (2.65)$$

eli tavanomaisia osittaisderivaattamerkintöjä käyttäen

$$\frac{\partial^8 w}{\partial\phi^8} + \frac{12a^6}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{12a^4}{Eh^3}(-a\frac{\partial^3 q_x}{\partial x\partial\phi^2} + \frac{\partial^3 q_\phi}{\partial\phi^3} + \frac{\partial^4 q_n}{\partial\phi^4}). \qquad (2.66)$$

Tämä on päistään tuetun **avoimen sylinterikuoren taipuman differentiaaliyhtälö.** Jos kuoreen ei vaikuta jakautunutta kuormaa, se yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{\partial^8 w}{\partial\phi^8} + \frac{12a^6}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \qquad (2.67)$$

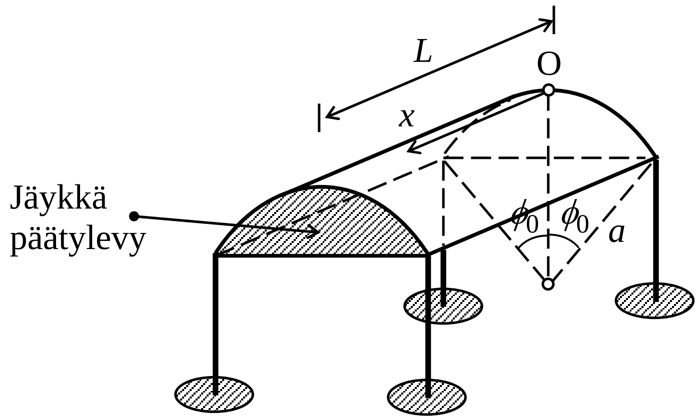
Jännitysresultanttien sekä **aksiaalisen ja tangentiaalisen siirtymän lausekkeet** saadaan soveltamalla yhtälöitä (2.56), (2.57) ja (2.61b). Ne saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12a^2}w,_{\phi\phi}, \\
Q_\phi &= \frac{1}{a}M_\phi,_\phi, \\
N_\phi &= Q_\phi,_\phi + q_n a, \qquad (2.68)\\
N_{x\phi} &= -\int(\frac{1}{a}N_\phi,_\phi + q_\phi)dx, \\
N_x &= -\int(\frac{1}{a}N_{x\phi},_\phi + q_x)dx,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{Eh}\int N_x dx, \\
v &= -\frac{1}{Eha}\int N_{x,\phi}\, dx.
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

Yhtälöistä (2.68) ja (2.69) havaitaan, että avain kuoren jännitysresultanttien ja siirtymien määrittämiseen on taipuman $w(x,\phi)$ ratkaiseminen osittaisdifferentiaaliyhtälöstä (2.65). Tätä demonstroidaan tarkastelemalla seuraavassa kappaleessa tyypillisen sylinterikuorikaton ratkaisemista.

2.54 Päädyistään vapaasti tuetun ja sivuiltaan vapaan sylinterikuoren ratkaisu



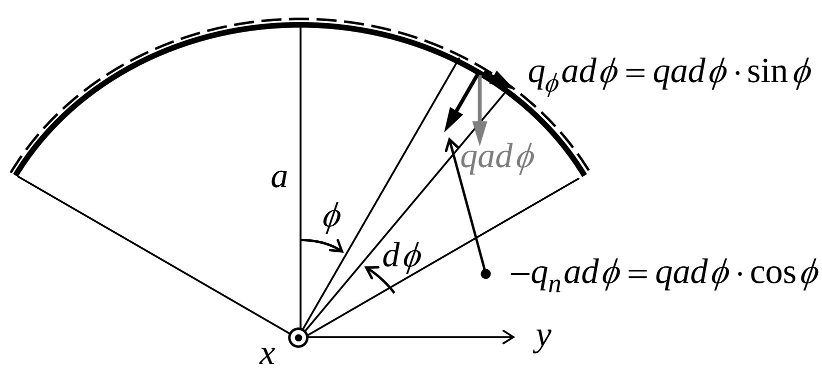
Kuva 2.6: Päädyistään vapaasti tuettu ja sivuiltaan vapaa, avoin sylinterikuori

Kuva 2.6 esittää tyypillistä kattorakenteena käytettävää sylinterikuorta. Sen päädyt ovat vapaasti tuetut ja sivut ovat vapaat, joten reunaehdot ovat

$$
\begin{aligned}
&v = 0 \quad N_x = 0 \quad w = 0 \quad M_x = 0 \quad (x = 0, x = L), \\
&N_{x\phi} = 0 \quad N_\phi = 0 \quad V_\phi = 0 \quad M_\phi = 0 \quad (\phi = -\phi_0,\ \phi = \phi_0).
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

Kuorta kuormittaa alaspäin suuntautunut sen pintayksikköä kohti jakautunut kuorma q, joka on tangentiaalisessa suunnassa ($\phi -$suunnassa) tasan jakautunut, mutta voi vaihdella pituussuunnassa ts. $q = q(x)$. Kuvan 2.7 perusteella tällöin

$$
q_x = 0, \quad q_\phi = q(x)\sin\phi, \quad q_n = -q(x)\cos\phi. \tag{2.71}
$$



Kuva 2.7: Kuormakomponenttien q_ϕ ja q_n määrittäminen

Kuormituksen (2.71) tapauksessa differentiaaliyhtälö (2.66) saa muodon

$$\frac{\partial^8 w}{\partial \phi^8} + \frac{12a^6}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\frac{24a^4}{Eh^3} q(x)\cos\phi \tag{2.72}$$

Otaksutaan tunnetulle kuormalle $q(x)$ sinisarjaesitys

$$q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sin\alpha_i x\,, \tag{2.73}$$

missä

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{L} \tag{2.74}$$

ja sarjan kertoimet saadaan kaavalla

$$q_i = \frac{2}{L}\int_0^L q(x)\sin\alpha_i x dx\,. \tag{2.75}$$

Otaksutaan täydellisen yhtälön kuormitusta $q(x)$ vastaavalle **yksityisratkaisulle** $w_q(x,\phi)$ esitys

$$w_q(x,\phi) = -\sum_{i=1}^{\infty} k_i q_i \cos\phi \sin\alpha_i x \tag{2.76}$$

Sijoittamalla lausekkeet (2.73) ja (2.76) täydelliseen yhtälöön (2.72) saadaan

$$\sum_{i=1}^{\infty}[-(1+\frac{12a^6}{h^2}\alpha_i^4)k_i q_i + \frac{24a^4}{Eh^3} q_i]\sin\alpha_i x = 0 \tag{2.77}$$

ja kertoimelle k_i tulos

$$k_i = \frac{24a^4}{Eh^3}\frac{1}{1+\dfrac{12a^6}{h^2}\alpha_i^4}\,. \tag{2.78}$$

Otaksutaan homogeenisen yhtälön **yleiselle ratkaisulle** $\overline{w}(x,\phi)$ esitys

$$\overline{w}(x,\phi)=\sum_{i=1}^{\infty}W_i(\phi)\sin\alpha_i x \tag{2.79}$$

Sijoittamalla se homogeeniseen yhtälöön (2.67) saadaan

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{d^8W_i}{d\phi^8}+\frac{12a^6\alpha_i^4}{h^2}W_i\right)\sin\alpha_i x=0 \tag{2.80}$$

ja homogeenisen yhtälön sarjan kerroinfunktiolle $W_i(\phi)$ tavallinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^8W_i}{d\phi^8}+\lambda_i^8W_i=0\,, \tag{2.81}$$

missä

$$\lambda_i=\sqrt[8]{\frac{12a^6\alpha_i^4}{h^2}}\,. \tag{2.82}$$

Kun sarjan kerroinfunktiot $W_i(\phi)$ on ratkaistu, saadaan probleeman lopulliseksi ratkaisuksi täydellisen yhtälön yksityisratkaisun ja homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun summana eli $w=w_q+\overline{w}$. Näin taipumalle saadaan tulos

$$w=\sum_{i=1}^{\infty}[-k_iq_i\cos\phi+W_i(\phi)]\sin\alpha_i x\,. \tag{2.83}$$

Kaavoista (2.68) ja (2.69) saadaan edelleen jännitysresultanteille sekä aksiaaliselle ja tangentiaaliselle siirtymälle

$$M_\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Eh^3}{12a^2}[-k_i q_i \cos\phi - \frac{d^2 W_i}{d\phi^2}]\sin\alpha_i x,$$

$$Q_\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Eh^3}{12a^3}[k_i q_i \sin\phi - \frac{d^3 W_i}{d\phi^3}]\sin\alpha_i x,$$

$$N_\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Eh^3}{12a^3}[(k_i - \frac{12a^4}{Eh^3})q_i \cos\phi - \frac{d^4 W_i}{d\phi^4}]\sin\alpha_i x, \tag{2.84}$$

$$N_{x\phi} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i}[-(\frac{Eh^3}{12a^4}k_i - 2)q_i \sin\phi - \frac{Eh^3}{12a^4}\frac{d^5 W_i}{d\phi^5}]\cos\alpha_i x,$$

$$N_x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^2 a}[(\frac{Eh^3}{12a^4}k_i - 2)q_i \cos\phi + \frac{Eh^3}{12a^4}\frac{d^6 W_i}{d\phi^6}]\sin\alpha_i x.$$

ja

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^3 ah}[-\frac{1}{E}(\frac{Eh^3}{12a^4}k_i - 2)q_i \cos\phi - \frac{h^3}{12a^4}\frac{d^6 W_i}{d\phi^6}]\cos\alpha_i x, \\ v &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^4 a^2 h}[-\frac{1}{E}(\frac{Eh^3}{12a^4}k_i - 2)q_i \sin\phi + \frac{h^3}{12a^4}\frac{d^7 W_i}{d\phi^7}]\sin\alpha_i x. \end{aligned} \tag{2.85}$$

missä

$$c_i = \frac{Eh^3}{12a^3}k_i - 2\,. \tag{2.86}$$

Liitteessä B on johdettu differentiaaliyhtälön (2.81) ratkaisu kerroinfunktioille $W_i(\phi)$. Siinä olevat neljä integrointivakiota määritetään reunaehdoista kuoren vapaalla reunalla $\phi = \phi_0$. Nämä reunaehdot ovat $M_\phi(\phi_0) = 0$, $Q_\phi(\phi_0) = 0$, $N_\phi(\phi_0) = 0$ ja $N_{x\phi}(\phi_0) = 0$. Lausekkeita (2.84 a, b, c ja d) käyttäen niistä seuraa yhtälöt

$$\frac{d^2W_i}{d\phi^2}(\phi_0) = -k_i q_i \cos\phi_0,$$
$$\frac{d^3W_i}{d\phi^3}(\phi_0) = k_i q_i \sin\phi_0,$$
$$\frac{d^4W_i}{d\phi^4}(\phi_0) = (k_i - \frac{12a^4}{Eh^3})q_i \cos\phi_0, \tag{2.87}$$
$$\frac{d^5W_i}{d\phi^5}(\phi_0) = -(k_i - \frac{24a^4}{Eh^3})q_i \sin\phi_0.$$

Käyttämällä hyväksi liitteen B kaavoja (B.5), järjestelemällä termejä sekä siirtymällä matriisiesitykseen saadaan lopullinen yhtälöryhmä integrointivakioiden A_i, B_i, C_i ja D_i määrittämiseksi muotoon

$$[A]\{X\} = \{B\}, \tag{2.88}$$

missä

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{Bmatrix}. \tag{2.89}$$

Kerroinmatriisin $[A]$ alkiot ovat

$$\begin{aligned}
A_{11} &= +a_2 \cos\beta\phi_0 \cosh\alpha\phi_0 - b_2 \sin\beta\phi_0 \sinh\alpha\phi_0 \\
A_{12} &= -b_2 \cos\beta\phi_0 \cosh\alpha\phi_0 - a_2 \sin\beta\phi_0 \sinh\alpha\phi_0 \\
A_{13} &= +c_2 \cos\alpha\phi_0 \cosh\beta\phi_0 - d_2 \sin\alpha\phi_0 \sinh\beta\phi_0 \\
A_{14} &= -d_2 \cos\alpha\phi_0 \cosh\beta\phi_0 - c_2 \sin\alpha\phi_0 \sinh\beta\phi_0 \\[6pt]
A_{21} &= +a_3 \cos\beta\phi_0 \sinh\alpha\phi_0 - b_3 \sin\beta\phi_0 \cosh\alpha\phi_0 \\
A_{22} &= -b_3 \cos\beta\phi_0 \sinh\alpha\phi_0 - a_3 \sin\beta\phi_0 \cosh\alpha\phi_0 \\
A_{23} &= +c_3 \cos\alpha\phi_0 \sinh\beta\phi_0 - d_3 \sin\alpha\phi_0 \cosh\beta\phi_0 \\
A_{24} &= -d_3 \cos\alpha\phi_0 \sinh\beta\phi_0 - c_3 \sin\alpha\phi_0 \cosh\beta\phi_0
\end{aligned} \tag{2.90}$$

$$
\begin{aligned}
A_{31} &= +a_4 \cos\beta\phi_0 \cosh\alpha\phi_0 - b_4 \sin\beta\phi_0 \sinh\alpha\phi_0 \\
A_{32} &= -b_4 \cos\beta\phi_0 \cosh\alpha\phi_0 - a_4 \sin\beta\phi_0 \sinh\alpha\phi_0 \\
A_{33} &= +c_4 \cos\alpha\phi_0 \cosh\beta\phi_0 - d_4 \sin\alpha\phi_0 \sinh\beta\phi_0 \\
A_{34} &= -d_4 \cos\alpha\phi_0 \cosh\beta\phi_0 - c_4 \sin\alpha\phi_0 \sinh\beta\phi_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{41} &= +a_5 \cos\beta\phi_0 \sinh\alpha\phi_0 - b_5 \sin\beta\phi_0 \cosh\alpha\phi_0 \\
A_{42} &= -b_5 \cos\beta\phi_0 \sinh\alpha\phi_0 - a_5 \sin\beta\phi_0 \cosh\alpha\phi_0 \\
A_{43} &= +c_5 \cos\alpha\phi_0 \sinh\beta\phi_0 - d_5 \sin\alpha\phi_0 \cosh\beta\phi_0 \\
A_{44} &= -d_5 \cos\alpha\phi_0 \sinh\beta\phi_0 - c_5 \sin\alpha\phi_0 \cosh\beta\phi_0
\end{aligned}
$$

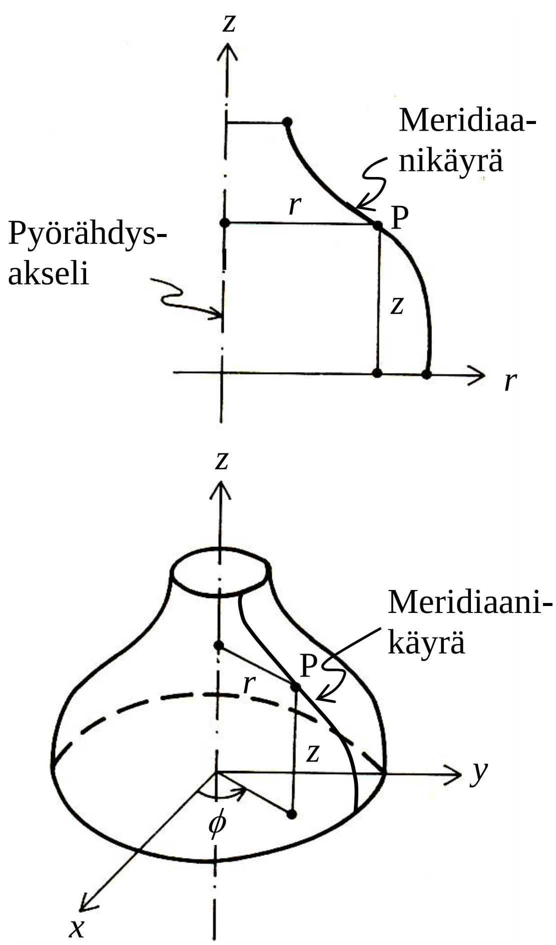
missä kertoimet a_n, b_n, c_n ja d_n saadaan liitteen B taulukosta B.1, sekä vakiovektorin $\{B\}$ alkiot ovat

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{k_i q_i}{2\lambda_i^2} \cos\phi_0 , \\
B_2 &= \frac{k_i q_i}{2\lambda_i^3} \sin\phi_0 , \\
B_3 &= (k_i - \frac{12a^4}{Eh^3}) \frac{q_i}{2\lambda_i^4} \cos\phi_0 , \\
B_4 &= -(k_i - \frac{24a^4}{Eh^3}) \frac{q_i}{2\lambda_i^5} \sin\phi_0 .
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

3. Pyörähdyskuori

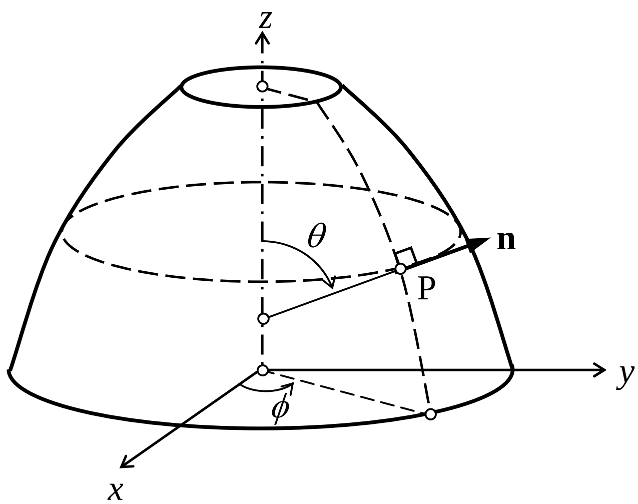
3.1 Pyörähdyskuoren geometriaa

Pyörähdyspinnalla ymmärretään pintaa, joka syntyy, kun ns. **meridiaanikäyrä** (tasokäyrä) pyörähtää tietyn akselin (tässä $z-$akseli) ympäri (vrt. kuva 3.1). **Pyörähdyskuori** on kuori, jonka keskipinta on pyörähdyspinta.

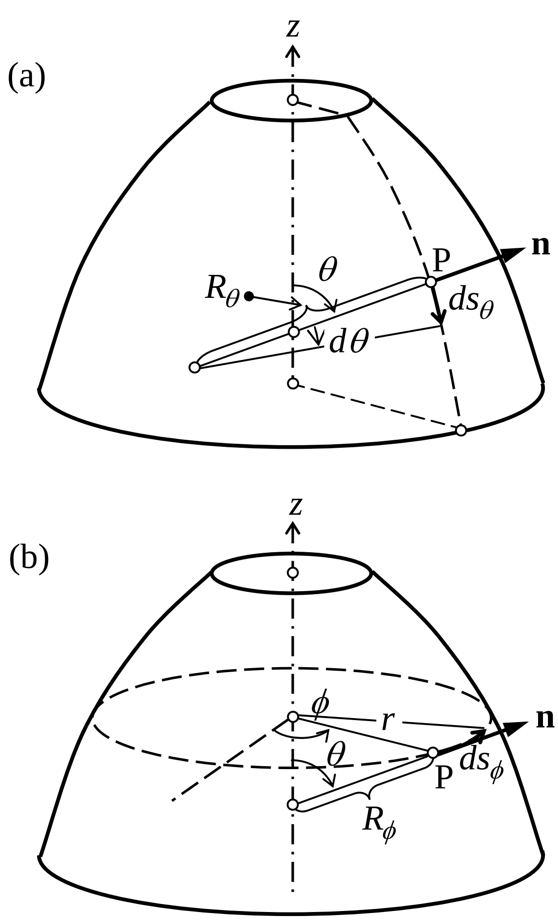


Kuva 3.1: Pyörähdyspinta

Pyörähdyskuoren käyräviivaisiksi koordinaateiksi on tarkoituksen mukaista valita meridiaanikäyrän normaalin ja pyörähdysakselin välinen kulma θ, sekä pyörähdyskulma ϕ kuvan 3.2 mukaisesti. Kuvat 3.3 esittävät, kuinka mittakaavatekijöille keskipinnan tarkasteltavassa pisteessä P saadaan tulokset



Kuva 3.2: Pyörähdyskuoren käyräviivaiset koordinaatit θ ja ϕ



$$\left.\begin{aligned} ds_\theta &= R_\theta d\theta \\ ds_\theta &= A d\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = R_\theta$$

$$\left.\begin{aligned} ds_\phi &= r d\phi \\ ds_\phi &= B d\phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow B = r$$

$$r = R_\phi \sin\theta$$

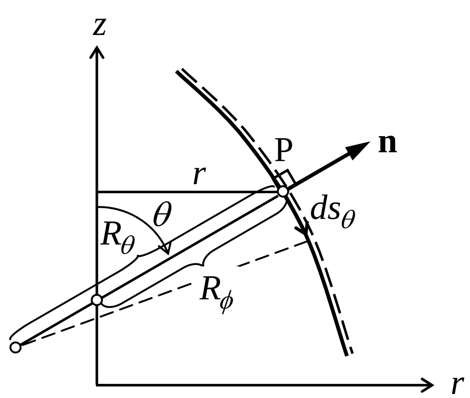
Kuva 3.3: Pyörähdyskuoren mittakaavatekijät ja kaarevuussäteet

$$\boxed{A = R_\theta,\ B = r,} \tag{3.1}$$

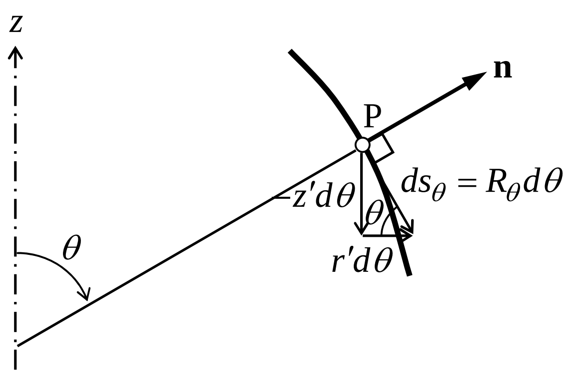
missä R_θ on meridiaaniviivan ($\theta -$viivan) kaarevuussäde ja r on pisteen P etäisyys $z -$akselista. Kuvasta 3.3b selviää myös, että etäisyydellä r ja $\phi -$viivan kaarevuussäteellä R_ϕ on yhteys

$$\boxed{R_\phi = \frac{r}{\sin\theta}.} \tag{3.2}$$

Kuva 3.4 havainnollistaa vielä pyörähdyskuoren kaarevuussäteitä meridiaanitasossa. Havaitaan, että kaarevuussäde R_ϕ ulottuu pisteestä P $z -$akselille. Kaarevuussäteen R_θ toinen päätepiste ei sen sijaan osu pyörähdysakselille, vaan sen asema riippuu meridiaanikäyrän kaarevuudesta tarkasteltavassa pisteessä. Kuvaan on myös merkitty katkoviivalla kuoren positiivinen pinta.



Kuva 3.4: Pyörähdyskuoren kaarevuussäteet meridiaanitasossa



$$r'd\theta = ds_\theta \cdot \cos\theta = R_\theta \cos\theta d\theta$$
$$-z'd\theta z = ds_\theta \cdot \sin\theta = R_\theta \sin\theta d\theta$$
$$R_\theta = \sqrt{(r')^2 + (z')^2}$$

Kuva 3.5: Pyörähdyskuoren geometriayhteyksiä

Kuvan 3.5 perusteella saadaan vielä käyttökelpoiset yhteydet

$$\boxed{R_\theta = \sqrt{(r')^2 + (z')^2},\ r' = R_\theta \cos\theta,\ z' = -R_\theta \sin\theta.} \tag{3.3}$$

Symmetrian vuoksi voidaan lopuksi todeta, että $\theta,\phi-$koordinaatisto on **pääkaarevuuskoordinaatisto**, jossa $R_{\theta\phi} = 0$.

3.2 Pyörähdyskuoren yhtälöt

3.21 Kinemaattiset yhtälöt

Keskipinnan $\theta-$ ja $\phi-$viivojen suuntaiset siirtymät ja taipuma ovat tavanomaiseen tapaan u, v ja w. Kuoren yleisistä kiertymien lausekkeista (1.92) seuraa helposti **pyörähdyskuoren kiertymien lausekkeet**

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_\theta &= \frac{1}{R_\theta}(w,_\theta - u), \\ \varphi_\phi &= \frac{1}{r}(w,_\phi - v\sin\theta). \end{aligned}} \tag{3.4}$$

Kuoren yleisistä keskipinnan venymien ja liukumien sekä kuoren käyristymien ja vääntymän lausekkeista (1.70), (1.88), (1.98) ja (1.102) saadaan, kun otetaan huomioon, että geometriasuureet eivät riipu koordinaatista ϕ, **pyörähdyskuoren keskipinnan venymien ja liukumien sekä kuoren käyristymien ja vääntymän lausekkeet**

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R_\theta}(u,_\theta + w), \\ \varepsilon_\phi &= \frac{1}{r}(v,_\phi + u\cos\theta + w\sin\theta), \\ \gamma_{\theta\phi} &= \frac{v,_\theta}{R_\theta} + \frac{u,_\phi}{r} - \frac{v\cos\theta}{r}, \\ \kappa_\theta &= -\frac{1}{R_\theta}[\frac{1}{R_\theta}(w,_\theta - u)],_\theta, \\ \kappa_\phi &= -\frac{1}{r^2}[w,_{\phi\phi} - v,_\phi \sin\theta + \frac{r\cos\theta}{R_\theta}(w,_\theta - u)], \\ \kappa_{\theta\phi} &= -\frac{1}{rR_\theta}[w,_{\theta\phi} - \frac{R_\theta\cos\theta}{r}w,_\phi - \frac{\sin\theta}{2}v,_\theta - (\frac{1}{2} - \frac{R_\theta}{R_\phi})\cos\theta v - \frac{u,_\phi}{2}]. \end{aligned}} \tag{3.5}$$

3.22 Tasapainoyhtälöt

Lähtien kuoren yleisistä voima- ja momenttitasapainoyhtälöitä (1.111) ja (1.113) saadaan, kun otetaan huomioon, että geometriasuureet eivät riipu koordinaatista ϕ, **pyörähdyskuoren voima- ja momenttitasapaino-yhtälöt** muotoon

$$\boxed{\begin{aligned}
&(rN_\theta)_{,\theta} + R_\theta N_{\phi\theta,\phi} - R_\theta \cos\theta N_\phi + rQ_\theta + rR_\theta q_\theta = 0,\\
&R_\theta N_{\phi,\phi} + (rN_{\theta\phi})_{,\theta} + R_\theta \cos\theta N_{\phi\theta} + R_\theta \sin\theta Q_\phi + rR_\theta q_\phi = 0,\\
&(rQ_\theta)_{,\theta} + R_\theta Q_{\phi,\phi} - rN_\theta - R_\theta \sin\theta N_\phi + rR_\theta q_n = 0,\\
&(rM_\theta)_{,\theta} + R_\theta M_{\phi\theta,\phi} - R_\theta \cos\theta M_\phi - rR_\theta Q_\theta = 0,\\
&R_\theta M_{\phi,\phi} + (rM_{\theta\phi})_{,\theta} + R_\theta \cos\theta M_{\phi\theta} - rR_\theta Q_\phi = 0.
\end{aligned}} \tag{3.6}$$

3.23 Jännitysresultanttien ja muodonmuutossuureiden yhteydet

Lähtien kuoren yleisistä jännitysresultanttien ja muodonmuutossuureiden yhteyksistä, saadaan helposti **pyörähdyskuoren jännitysresultanttien ja muodonmuutossuureiden yhteydet**

$$\boxed{\left\{\begin{aligned}
N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\phi),\\
N_\phi &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\phi + \nu\varepsilon_\theta),\\
N_{\theta\phi} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)}\gamma_{\theta\phi},
\end{aligned}\right. \qquad
\left\{\begin{aligned}
M_\theta &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_\theta + \nu\kappa_\phi),\\
M_\phi &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_\phi + \nu\kappa_\theta),\\
M_{\theta\phi} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\kappa_{\theta\phi}.
\end{aligned}\right.} \tag{3.7}$$

3.24 Siirtymien differentiaaliyhtälöt pyörähdyskuorelle

Tasapainoyhtälöistä (3.6) voidaan helposti eliminoida leikkausvoimat Q_θ ja Q_ϕ, jolloin saadaan kolme tasapainoyhtälöä, joissa on tuntemattomina jännitysresultantit N_θ, N_ϕ, $N_{\theta\phi}$, M_θ, $M\phi$ ja $M_{\theta\phi}$. Sijoittamalla siirtymien u v ja w avulla lausutut muodonmuutossuureet (3.5) jännitysresultanttien ja muodonmuutossuureiden yhteyksiin (3.7), nämä edelleen kolmeen tasapainoyhtälöön, saadaan kolmen yhtälön osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmä, jossa on tuntemattomina siirtymät u v ja w. Nämä ovat pyörähdyskuoren s**iirtymien differentiaaliyhtälöt**. Niitä ei kuitenkaan tässä esitetä.

3.3 Pyörähdyskuoren kalvotila

3.31 Pyörähdyskuoren yhtälöt kalvotilassa

Kalvotilassa $\kappa_\theta = 0$, $\kappa_\phi = 0$ ja $\kappa_{\theta\phi} = 0$, joten kaavojen (3.7) perusteella myös $M_\theta = 0$, $M_\phi = 0$ ja $M_{\theta\phi} = 0$ sekä kaavojen (3.6d) ja (3.6e) perusteella edelleen $Q_\theta = 0$ ja $Q_\phi = 0$. Kiertymien lausekkeet (3.4), keskipinnan venymien ja liukuman lausekkeet (3.5a, b ja c) sekä normaalivoimien ja keskipinnan leikkausvoiman lausekkeet (3.7a, b ja c) ovat sellaisenaan käytettävissä myös kalvotilassa. Tasapainoyhtälöt (3.6a, b ja c) yksinkertaistuvat kalvotilassa muotoon

$$\boxed{\begin{aligned} &(rN_\theta),_\theta + R_\theta N_{\phi\theta},_\phi - R_\theta \cos\theta N_\phi + rR_\theta q_\theta = 0, \\ &R_\theta N_\phi,_\phi + (rN_{\theta\phi}),_\theta + R_\theta \cos\theta N_{\phi\theta} + rR_\theta q_\phi = 0, \\ &-\frac{N_\theta}{R_\theta} - \frac{N_\phi}{R_\phi} + q_n = 0. \end{aligned}} \tag{3.8}$$

Tasapainoyhtälöissä (3.8), joita on kolme kappaletta, on kolme tuntematonta **kalvovoimat** N_θ, N_ϕ ja $N_{\theta\phi}$, jotka voidaan reunaehdot huomioiden ratkaista. Koska tehtävän ratkaisemiseen riittää pelkästään tasapainoyhtälöt, se on **staattisesti määrätty**.

Jos kalvotilan siirtymät myös kiinnostavat, ne saadaan määrittämällä ensin keskipinnan venymät ja liukuma kaavoista (3.7 a, b ja c) kääntämällä saaduista kaavoista

$$\boxed{\varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh}(N_\theta - \nu N_\phi),\ \varepsilon_\phi = \frac{1}{Eh}(N_\phi - \nu N_\theta),\ \gamma_{\theta\phi} = \frac{2(1+\nu)}{Eh}N_{\theta\phi}.} \tag{3.9}$$

Kun nämä tunnetaan, **kalvotilan siirtymät** u, v ja w voidaan ratkaista yhtälöistä

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{R_\theta}(u,_\theta + w) = \varepsilon_\theta, \quad \frac{1}{r}(v,_\phi + u\cos\theta + w\sin\theta) = \varepsilon_\phi, \\ &\frac{v,_\theta}{R_\theta} + \frac{u,_\phi}{r} - \frac{v\cos\theta}{r} = \gamma_{\theta\phi}. \end{aligned}} \tag{3.10}$$

jotka on saatu suoraan lausekkeista (3.5 a, b ja c).

3.31 Pyörähdyskuoren kalvotilan ratkaiseminen, kun kuormitus on pyörähdyssymmetrinen

Kuormituksen ollessa pyörähdyssymmetrinen q_θ ja q_n ovat pelkästään θ:n funktioita ja $q_\phi \equiv 0$. Tämän seurauksena myös siirtymätila on pyörähdyssymmetrinen, joten u ja w ovat pelkästään θ:n funktioita ja $v \equiv 0$. Tämän johdosta (kaavan (3.5c) perusteella) $\gamma_{\theta\phi} \equiv 0$ ja edelleen (kaavan (3.7) perusteella $N_{\theta\phi} \equiv 0$. Tasapainoyhtälöistä (3.8) seuraa

$$\boxed{\begin{aligned} &(rN_\theta)' - R_\theta \cos\theta N_\phi + rR_\theta q_\theta = 0, \\ &-\frac{N_\theta}{R_\theta} - \frac{N_\phi}{R_\phi} + q_n = 0, \end{aligned}} \tag{3.11}$$

missä yläpilkku tarkoittaa tavallista derivaattaa koordinaatin θ suhteen.

Kaavasta (3.11b) saadaan

$$\boxed{N_\phi = -\frac{R_\phi}{R_\theta} N_\theta + q_n R_\phi} \tag{3.12}$$

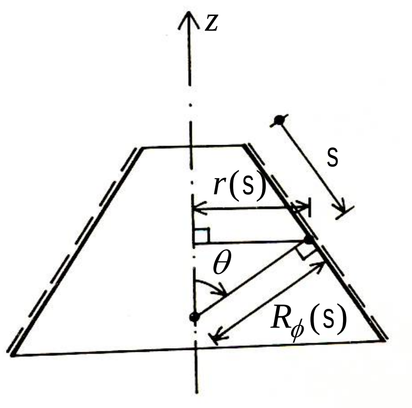
ja sijoittamalla tämä kaavaan (3.11a), soveltamalla kaavaa (3.2) sekä tulon derivointia takaperin saadaan

$$(r \sin\theta N_\theta)' = -(q_\theta \sin\theta - q_n \cos\theta) R_\theta r$$

ja integroimalla tulos

$$\boxed{r \sin\theta N_\theta = -\int (q_\theta \sin\theta - q_n \cos\theta) R_\theta r d\theta + C,} \tag{3.13}$$

missä C on integrointivakio. Kaavojen (3.12) ja (3.13) avulla voidaan määrittää pyörähdyskuoren **kalvovoimat** (kalvotilan jännitysresultantit) N_θ ja N_ϕ, kun kuormitus on pyörähdyssymmetrinen. Ensin määritetään N_θ kaavan (3.13) avulla. Integrointivakio C määräytyy reunaehdosta. Lopuksi määritetään N_θ kaavan (3.12) avulla.



Kuva 3.6: Kartiokuoren koordinaatti s

Erikoistapauksessa, jossa pyörähdyskuoren meridiaanikäyrä on suora (kartiokuori), jolloin $R_\theta = \infty$ ja $\theta = \text{vakio}$ (vrt. kuva 3.6), ei kulman θ käyttö riippumattomana muuttujana ole mahdollista. Tällöin voidaan riippumattomaksi muuttujaksi valita esimerkiksi pituuskoordinaatti s pitkin meridiaanikäyrää[1]. Suorittamalla yhtälöihin (3.12) ja (3.13) sijoitukset $R_\theta = \infty$ ja $d\mathsf{s} = ds_\theta = R_\theta d\theta$ saadaan

$$\boxed{N_\phi = q_n R_\phi} \tag{3.14}$$

ja

$$\boxed{rN_{\mathsf{s}} = -\int (q_{\mathsf{s}} - q_n \cot\theta) r d\mathsf{s} + C.} \tag{3.15}$$

(Kaavassa (3.15) integrointivakio C ei ole sama kuin kaavassa (3.13), vaikka kumpaakin on merkitty samalla symbolilla.)

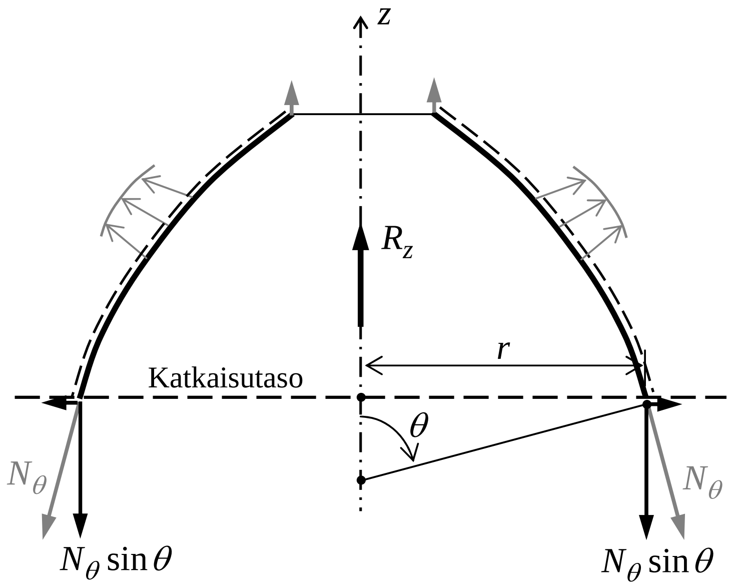
Vaihtoehtona kaavalle (3.13) (tai (3.15)) voidaan kalvovoima N_θ (tai N_{s}) määrittää ajattelemalla kuori katkaistuksi tarkasteltavasta kohdasta θ (tai s) vaakatason suuntaisella leikkauksella sekä kirjoittamalla leikkauksen joko ylä- tai alapuoleisen kuoren osan pystysuuntainen ($z-$suuntainen) tasapainoyhtälö. Kuva 3.7, esittää katkaisutason yläpuoleisen kuoren osan vapaakappalekuviota. Siinä R_z on kuoren osaan vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti. Pystysuuntaiseksi tasapainoyhtälöksi saadaan

$$\uparrow \quad -2\pi r N_\theta \sin\theta + R_z = 0, \tag{3.16}$$

[1] Pituuskoordinaatille käytetään tässä symbolia s tavallisen symbolin s sijasta.

josta seuraa kalvovoimalle N_θ tulos

$$N_\theta = \frac{R_z}{2\pi r}. \tag{3.18}$$



Kuva 3.7: Kuoren yläosan vapaakappalekuvio

Kun kalvovoimat N_θ ja N_ϕ tunnetaan, voidaan myös kalvotilan siirtymät u ja w määrittää siten, että ensin lasketaan keskipinnan venymät ε_θ ja ε_ϕ kaavoista

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{Eh}(N_\theta - \nu N_\phi), \\ \varepsilon_\phi &= \frac{1}{Eh}(N_\phi - \nu N_\theta), \end{aligned}} \tag{3.19}$$

(vrt. kaavat (3.9)). Suoran meridiaaniviivan tapauksessa käytetään vastaavia kaavoja, joissa alaindeksin θ paikalla on s.

Seuraavassa johdetaan kaavat, joilla voidaan laskea kalvotilan siirtymät, kun keskipinnan venymät tunnetaan. Pyörähdyssymmetrisen kuormituksen tapauksessa kaavoista (3.10 a ja b) seuraa

$$u' + w = R_\theta \varepsilon_\theta,$$
$$u \cot\theta + w = R_\phi \varepsilon_\phi. \tag{3.20}$$

Vähentämällä nämä yhtälöt puolittain saadaan

$$u' - u\cot\theta = R_\theta\varepsilon_\theta - R_\phi\varepsilon_\phi \tag{3.21}$$

ja soveltamalla tulon derivointia takaperin edelleen

$$\left(\frac{u}{\sin\theta}\right)' = \frac{R_\theta\varepsilon_\theta - R_\phi\varepsilon_\phi}{\sin\theta}. \tag{3.22}$$

Integroimalla saadaan nyt tulos

$$\boxed{\frac{u}{\sin\theta} = \int \frac{R_\theta\varepsilon_\theta - R_\phi\varepsilon_\phi}{\sin\theta} d\theta + C.} \tag{3.23}$$

Kaavasta (3.20b) seuraa

$$\boxed{w = -u\cot\theta + R_\phi\varepsilon_\phi.} \tag{3.24}$$

Kaavan (3.23) avulla voidaan siis määrittä tangentiaalinen siirtymä u. Integrointivakio määräytyy reunaehdosta. Taipuma (normaalin suuntainen siirtymä) w saadaan tämän jälkeen kaavasta (3.24). Suoran meridiaaniviivan tapauksessa kaava (3.23) saa muodon

$$\boxed{u = \int \varepsilon_s ds + C.} \tag{3.26}$$

Johdetaan vielä kaava kalvotilan kiertymän φ_θ laskemiseksi. Kaavasta (3.4a) saadaan

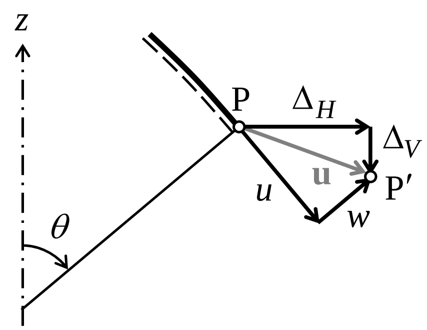
$$\varphi_\theta = \frac{1}{R_\theta}(w' - u) \tag{3.27}$$

sekä kaavoja (3.24) ja (3.22) hyväksi käyttäen edelleen

$$\boxed{\varphi_\theta = \cot\theta(\varepsilon_\phi - \varepsilon_\theta) + \frac{R_\phi}{R_\theta}\varepsilon'_\phi.} \tag{3.28}$$

Suoran meridiaaniviivan tapauksessa kaava (3.28) yksinkertaisemman muodon

$$\boxed{\varphi_s = \cot\theta(\varepsilon_\phi - \varepsilon_s) + R_\phi \frac{d\varepsilon_\phi}{ds}.} \tag{3.29}$$



Kuva 3.8: Siirtymävektorin **u** radiaali- ja aksiaalikomponentit Δ_H ja Δ_V.

Usein on tarkoituksenmukaista käyttää siirtymävektorin **u** komponenttien u ja w sijasta vaakasuoraa radiaalikomponenttia Δ_H[2] ja pystysuoraa aksiaalikomponenttia Δ_V (vrt. kuva 3.8). Näille saadaan helposti

$$\begin{aligned} \Delta_H &= u\cos\theta + w\sin\theta, \\ \Delta_V &= u\sin\theta - w\cos\theta \end{aligned} \tag{3.30}$$

ja kaavaa (3.24) ja (3.2) hyväksi käyttäen edelleen

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_H &= r\varepsilon_\phi, \\ \Delta_V &= \frac{u}{\sin\theta} - r\varepsilon_\phi \cot\theta. \end{aligned}} \tag{3.31}$$

Kun siirtymäkomponentit Δ_H ja Δ_V on määritetty, voidaan u ja w tarvittaessa määrittää yhtälöihin (3.30) nähden käänteisistä lausekkeista

$$\begin{aligned} u &= \Delta_H \cos\theta + \Delta_V \sin\theta, \\ w &= \Delta_H \sin\theta - \Delta_V \cos\theta. \end{aligned} \tag{3.32}$$

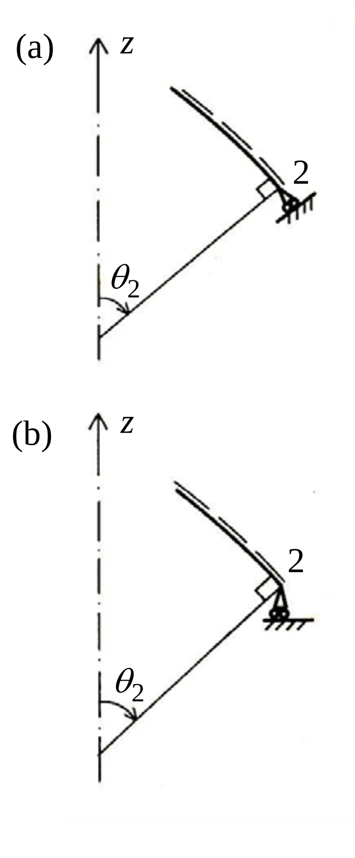
[2] Vaakasuoran siirtymäkomponentin merkinnästä Δ_H jätetään jatkossa usein alalindeksi H pois, eli sitä merkitään myös symbolilla Δ.

Seuraavassa omaksutaan käytäntö, jossa kuoren (tai kuoren osan) reunat numeroidaan ykkösellä ja kakkosella siten, että reuna 1 vastaa pienintä koordinaatin arvoa $\theta = \theta_1$ (tai $s = s_1$) ja reuna 2 vastaa suurinta koordinaatin arvoa $\theta = \theta_2$ (tai $s = s_2$). Siinäkin tapauksessa, että kuorella (tai kuoren osalla) on vain yksi reuna, sijaitessaan koordinaatin θ (tai s) suuntaan nähden kuoren negatiivisella puolella sen numero on 1 ja sijaitessaan koordinaatin θ (tai s) suuntaan nähden kuoren positiivisella puolella sen numero on 2.

Tarkastellaan nyt kuinka kaavassa (3.23) (tai (3.25)) esiintyvä integrointivakio C saadaan määritettyä tukiehdosta kuoren (tai kuoren osan) reunalla. Kuva 3.9a esittää kuoren alareunan 2 tuentaa, jossa meridiaanin suuntainen siirtymä u on estetty. Tukiehto on

$$u(\theta_2) = 0\,. \tag{3.33}$$

Kuva 3.9b esittää kuoren reunan 2 tuentaa, jossa vertikaalinen siirtymä Δ_V on estetty.



Kuva 3.9: Kuoren reunan tuentoja: (a) siirtymä u estetty, (b) siirtymä Δ_V estetty

Tukiehto on tässä tapauksessa

$$\Delta_V(\theta_2) = 0 \tag{3.34}$$

ja se saa kaavan (3.31) perusteella muodon

$$u(\theta_2) = r(\theta_2)\varepsilon_\phi(\theta_2)\cos\theta_2 . \tag{3.35}$$

Jos integrointivakion C määritetään kuoren (tai sen osan) yläreunan 1 tukiehdon perusteella, käsittely tapahtuu vastaavaan tapaan.

Kartiokuoren tapauksessa kaavoja (3.33)-(3.35) vastaavat kaavat

$$u(s_2) = 0 , \tag{3.36}$$

$$\Delta_V(s_2) = 0 \tag{3.37}$$

ja

$$u(s_2) = r(s_2)\varepsilon_\phi(s_2)\cos\theta . \tag{3.38}$$

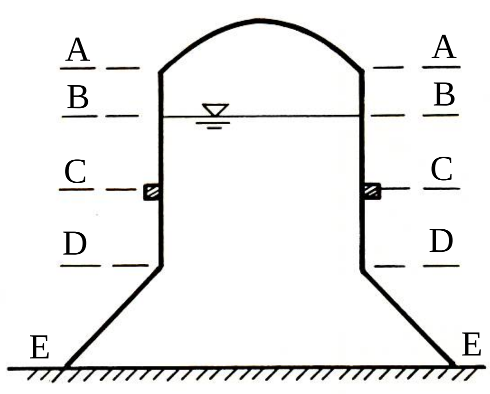
3.4 Pyörähdyskuoren taivutustila

3.41 Pyörähdyskuoren yhtälöt taivutustilassa

Kohdassa 3.24 kaavailtiin, kuinka pyörähdyskuoren siirtymille $u(\theta,\phi)$, $v(\theta,\phi)$ ja $w(\theta,\phi)$ voidaan muodostaa **kolmen osittaisdifferentiaaliyhtälön** muodostama yhtälöryhmä lähtien yhtälöistä (3.5), (3.6) ja (3.7). Näiden yhtälöiden analyyttinen ratkaiseminen on kuitenkin yleensä mahdotonta ja näin ollen on turvauduttava joko likiteorioihin tai numeeriseen ratkaisuun. Jos myös kuormitus on pyörähdyssymmetrinen, on tilanne jonkin verran helpompi ja analyyttisia ratkaisuja voidaan löytää useille kuorityypeille (esim. sylinterikuori, kartiokuori ja pallokuori). Laskelmissa tarvitaan kuitenkin erilaisia erikoisfunktioita ja ne muodostuvat erittäin työläiksi, joten niihin ei tässä yhteydessä puututa. Seuraavassa käsitelläänkin vain yhtä käyttökelpoista likiteoriaa, ns. **reunahäiriöteoriaa**, joka soveltuu ohuille **jyrkille pyörähdyskuorille**[3].

3.42 Pyörähdyskuoren reunahäiriö

Kuvassa 3.10 on esitetty pyörähdyskuoren ns. **häiriöviivoja**. Häiriöviivan ympäristössä syntyvää jännitys- ja muodonmuutostilaa nimitetään **reunahäiriöksi**. Reunahäiriö on paikallista laatua, ts. se vaimenee nopeasti etäännyttäessä häiriöviivasta. Reunahäiriöteoriassa kuoriprobleeman ratkaisu saadaan superponoimalla kalvotilan (KT) ratkaisu (kuormitusta vastaava yksityisratkaisu) ja reunahäiriön tyyppinen taivutustilan (TT) ratkaisu (homogeenisen yhtälön ratkaisu). Superponoiminen tapahtuu siten, että yhteensopivuusehdot häiriöviivoilla (esimerkiksi tukiehdot



Kuvassa 3.10: Pyörähdyskuoren häiriöviivoja

---

[3] Vaikka reunahäiriöteoriaa käsitellään tässä vain pyörähdyskuoren yhteydessä, itse **reunahäiriö** on kuoriteoriaan keskeisesti liittyvä erityisilmiö, jonka tiedostaminen ja ymmärtäminen on kuorirakenteiden suunnittelijalle välttämätöntä.

kuoren reunalla) toteutuvat.

Tarkastellaan reunahäiriötä kuoren (tai kuoren tarkasteltavan osan) yläreunan 1 tai alareunan 2 läheisyydessä. Merkitään tyypillistä siirtymää, muodonmuutosta tai jännitystä funktiolla $f(\theta,\phi)$. Sen otaksutaan muuttuvan voimakkaasti häiriöviivaa vastaan kohtisuorassa suunnassa eli θ:n muuttuessa ja vain heikosti häiriöviivan suunnassa eli ϕ:n muuttuessa. Matemaattisesti ao. otaksumiksi otetaan

$$\left|f,_{\theta}\right| \gg \left|f,_{x}\right| \sim |\,f\,|, \tag{3.39}$$

Missä merkintä $\gg$ tarkoittaa "suuruusluokkaa suurempi kuin" ja merkintä $\sim$ tarkoittaa "samaa suuruusluokkaa kuin". Lisäksi reunahäiriöteoriassa otaksutaan, että keskipinnan siirtyminen tapahtuu pääasiassa keskipinnan normaalin suuntaan, jolloin

$$|\,w\,| \gg |\,u\,| \sim |\,v\,|. \tag{3.40}$$

Reunahäiriön tyyppinen TT:n ratkaisu on homogeenisen yhtälön ratkaisu, joten seuraavissa johdoissa pannaan $q_\theta = q_\phi = q_n = 0$.

Kiertymien kaavoista (3.4) saadaan

$$\begin{aligned}
\varphi_\theta &= \frac{1}{R_\theta}(w,_\theta - \overbrace{u}^{\approx 0}) \approx \underline{\frac{1}{R_\theta} w,_\theta}, \\
\varphi_\phi &= \frac{1}{r}(w,_\phi - \overbrace{v}^{\approx 0} \sin\theta) \approx \underline{\frac{1}{r} w,_\phi},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

missä $\varphi_\theta \gg \varphi_\phi$. Kuoren muodonmuutossuureiden lausekkeista (3.5) saadaan

$$\begin{aligned}
&\underline{\varepsilon_\theta = \frac{1}{R_\theta}(u,_\theta + w)}, \\
&\varepsilon_\phi = \frac{1}{r}(\overbrace{v,_\phi}^{\approx 0} + \overbrace{u}^{\approx 0} \cos\theta + w\sin\theta) \approx \underline{\frac{w}{R_\phi}},
\end{aligned}$$

$$\gamma_{\theta\phi} = \frac{v,_{\theta}}{R_{\theta}} + \frac{\overbrace{u,_{\phi}}^{\approx 0}}{r} - \frac{\overbrace{v}^{\approx 0}\cos\theta}{r} \approx \underline{\frac{v,_{\theta}}{R_{\theta}}}, \tag{3.42}$$

$$\kappa_{\theta} = -\frac{1}{R_{\theta}}[\frac{1}{R_{\theta}}(w,_{\theta} - \overbrace{u}^{\approx 0})],_{\theta} \approx \underline{-\frac{1}{R_{\theta}}(\frac{1}{R_{\theta}}w,_{\theta}),_{\theta}},$$

$$\kappa_{\phi} = -\frac{1}{r^2}[\overbrace{w,_{\phi\phi}}^{\approx 0} - \overbrace{v,_{\phi}}^{\approx 0}\sin\theta + \frac{r\cos\theta}{R_{\theta}}(w,_{\theta} - \overbrace{u}^{\approx 0})] = -\frac{\cos\theta}{rR_{\theta}}w,_{\theta},$$

$$\kappa_{\theta\phi} = -\frac{1}{rR_{\theta}}[w,_{\theta\phi} - \frac{R_{\theta}\cos\theta}{r}\overbrace{w,_{\phi}}^{\approx 0} - \frac{\sin\theta}{2}\overbrace{v,_{\theta}}^{\approx 0} - (\frac{1}{2} - \frac{R_{\theta}}{R_{\phi}})\cos\theta\overbrace{v}^{\approx 0} - \frac{\overbrace{u,_{\phi}}^{\approx 0}}{2}]$$
$$\approx \underline{-\frac{1}{rR_{\theta}}w,_{\theta\phi}},$$

missä $\varepsilon_{\theta} \sim \varepsilon_{\phi} \sim \gamma_{\theta\phi}$ ja $\kappa_{\theta} \gg \kappa_{\phi} \sim \kappa_{\theta\phi}$. Tasapainoyhtälöstä (3.6d) saadaan

$$\begin{aligned} &(rQ_{\theta}),_{\theta} + R_{\theta}\overbrace{Q_{\phi},_{\phi}}^{\approx 0} - rN_{\theta} - R_{\theta}\sin\theta N_{\phi} + rR_{\theta}\overbrace{q_n}^{0} = 0 \\ &\Rightarrow \underline{N_{\phi} = -\frac{r}{R_{\theta}\sin\theta}N_{\theta} + \frac{1}{R_{\theta}\sin\theta}(rQ_{\theta}),_{\theta}} \end{aligned} \tag{3.43}$$

ja tasapinoyhtälöstä (3.6a) saadaan

$$\begin{aligned} &(rN_{\theta}),_{\theta} + R_{\theta}\overbrace{N_{\phi\theta},_{\phi}}^{\approx 0} - R_{\theta}\cos\theta N_{\phi} + rQ_{\theta} + rR_{\theta}\overbrace{q_{\theta}}^{0} = 0 \\ &\Rightarrow \underline{(rN_{\theta}),_{\theta} - R_{\theta}\cos\theta N_{\phi} + rQ_{\theta} = 0} \end{aligned} \tag{3.44}$$

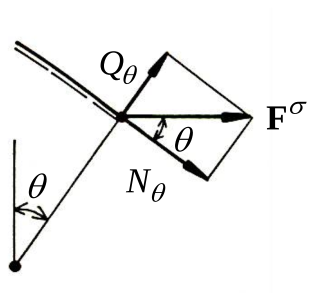
ja ottamalla huomioon yhteys (3.43) edelleen

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sin\theta(rN_{\theta}),_{\theta} + r\cos\theta N_{\theta} - \cos\theta(rQ_{\theta}),_{\theta} + r\sin\theta Q_{\theta} = 0 \\ &\Rightarrow (r\sin\theta N_{\theta} - r\cos\theta Q_{\theta}),_{\theta} = 0 \\ &\Rightarrow \underline{r\sin\theta N_{\theta} - r\cos\theta Q_{\theta} = C}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

missä integrointivakio C asetetaan nollaksi, jolloin saadaan

$$\underline{N_\theta = Q_\theta \cot\theta.} \tag{3.46}$$

Tulos (3.46) merkitsee sitä, että N_θ:n ja Q_θ:n resultantti $\mathbf{F}^\sigma$ on vaakasuora (vrt. kuva 3.11). Näin tulee ollakin, jotta tarkastelemamme pelkästään yhdeltä reunaltaan kuormitetun pyörähdyskuoren vertikaalisuuntainen tasapainoyhtälö toteutuisi. (Tämä perusteli juuri tekemämme valinnan $C = 0$.)



Kuva 3.11: Jännitysresultanttivektori $\mathbf{F}^\sigma$ kuoren reunalla

Kaavasta (3.43) saadaan nyt

$$\begin{aligned} N_\phi &= -\frac{r\cos\theta}{R_\theta \sin^2\theta} Q_\theta + \frac{1}{R_\theta \sin\theta}(rQ_\theta)_{,\theta} = \frac{1}{R_\theta}\left(\frac{rQ_\theta}{\sin\theta}\right)_{,\theta} \\ &= \frac{1}{R_\theta}(R_\phi Q_\theta)_{,\theta} = \frac{R_\phi}{R_\theta}(Q_\theta)_{,\theta} + \frac{1}{R_\theta}(R_\phi)_{,\theta} \overbrace{Q_\theta}^{\approx 0} \\ &\approx \underline{\frac{R_\phi}{R_\theta}(Q_\theta)_{,\theta}.} \end{aligned} \tag{3.47}$$

Kaavojen (3.45) ja (3.47) perusteella nähdään myös, että $N_\phi \gg Q_\theta \sim N_\theta$.
Kaavasta (3.7a) saadaan tämän perusteella

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\phi) \;\Rightarrow\; \underline{\varepsilon_\theta \approx -\nu\varepsilon_\phi} \tag{3.48}$$

ja kaavoista (3.7b) ja (3.42b) edelleen

$$N_\phi = Eh\varepsilon_\phi = \underline{\frac{Eh}{R_\phi} w.} \tag{3.49}$$

Kaavoista (3.7 c, d ja e) sekä (3.42d, e ja f) saadaan

$$
\begin{aligned}
M_\theta &= D(\kappa_\theta + \nu \overbrace{\kappa_\phi}^{\approx 0}) \approx D\kappa_\theta = \underline{-\frac{D}{R_\theta}(\frac{1}{R_\theta} w,_\theta),_\theta}, \\
M_\phi &= D(\overbrace{\kappa_\phi}^{\approx 0} + \nu\kappa_\theta) \approx \nu D\kappa_\theta = \underline{\nu M_\theta}, \\
M_{\theta\phi} &= D(1-\nu)\kappa_{\theta\phi} = \underline{-\frac{D(1-\nu)}{rR_\theta} w,_{\theta\phi}}.
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Havaitaan, että $M_\theta \sim M_\phi \gg M_{\theta\phi}$. Tasapainoyhtälöstä (3.6d) saadaan nyt

$$
\begin{aligned}
&(rM_\theta),_\theta + R_\theta \overbrace{M_{\phi\theta},_\phi}^{\approx 0} - R_\theta \cos\theta \overbrace{M_\phi}^{\approx 0} - rR_\theta Q_\theta = 0 \\
&\Rightarrow \; Q_\theta = \frac{1}{rR_\theta}(rM_\theta),_\theta = \frac{1}{R_\theta} M_\theta,_\theta + \frac{\cos\theta}{r} \overbrace{M_\theta}^{\approx 0} \approx \underline{\frac{1}{R_\theta} M_\theta,_\theta}
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Yhdistämällä tulokset (3.47) ja (3.51) saadaan

$$
N_\phi = \frac{R_\phi}{R_\theta}(\frac{1}{R_\theta} M_\theta,_\theta),_\theta \tag{3.52}
$$

ja ottamalla huomioon yhteys (3.50a) edelleen

$$
N_\phi = -D\frac{R_\phi}{R_\theta}\{\frac{1}{R_\theta}[\frac{1}{R_\theta}(\frac{1}{R_\theta} w,_\theta),_\theta],_\theta\},_\theta . \tag{3.53}
$$

Tässä otaksuttiin kuoren taivutusjäykkyys *D* vakioksi[4].

Merkitsemällä N_ϕ:n lausekkeet (3.49) ja (3.51) yhtäsuuriksi, saadaan lopulta

$$
\frac{1}{R_\theta}\{\frac{1}{R_\theta}[\frac{1}{R_\theta}(\frac{1}{R_\theta} w,_\theta),_\theta],_\theta\},_\theta + \frac{Eh}{DR_\phi^2} w = 0 \tag{3.54}
$$

eli

[4] Tuloksen (3.53) voidaan helposti osoittaa olevan on voimassa myös siinä tapauksessa, että D on jatkuva θ:n funktio, mutta muuttuu $\theta-$viivan suunnassa hitaasti.

$$\frac{1}{R_\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\{\frac{1}{R_\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\frac{1}{R_\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{R_\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta})]\}+4\beta^4 w=0\,, \tag{3.55}$$

missä otettiin käyttöön tavanomainen osittaisderivaattamerkintä ja

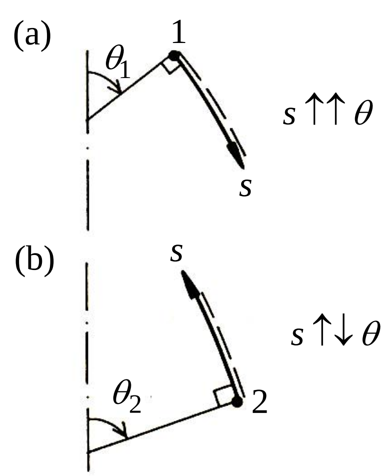
$$\beta=\sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR_\phi^2}}=\sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2R_\phi^2}} \tag{3.56}$$

on **vaimennusluku** (vrt. sylinterikuoren vaimennusluku (2.29), missä $a \triangleq R_\phi$).

Jatkossa merkitään etäisyyttä häiriöviivasta, kuoren yläreunasta 1 tai alareunasta 2, symbolilla s. Yläreunan tapauksessa $s\uparrow\uparrow\theta$ ja alareunan tapauksessa $s\uparrow\downarrow\theta$, (vrt. kuva 3.12). Havaitaan, että

$$\begin{aligned} ds &= ds_\theta = R_\theta d\theta, \quad \text{kun } s\uparrow\uparrow\theta, \\ ds &= -ds_\theta = -R_\theta d\theta, \quad \text{kun } s\uparrow\downarrow\theta. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Jatkossa nämä kaksi tapausta tulevat aiheuttamaan eroja alaindekseissä ja etumerkeissä. Seuraavassa niitä käsitellään rinnakkain siten, että **ylempi** alaindeksi 1 ja merkki vastaavat **yläreunaa**, jonka läheisyydessä $s\uparrow\uparrow\theta$, ja **alempi** alaindeksi 2 ja merkki vastaavat **alareunaa**, jonka läheisyydessä $s\uparrow\downarrow\theta$. Riippumattomaksi muuttujaksi otetaan jatkossa θ:n sijasta s.



Kuva 3.12: Etäisyyskoordinaatin s määrittely: (a) yläreuna 1, (b) alareuna 2

Ilmaistaan tärkeimmät edellä johdetut tulokset nyt muuttujan s avulla. Tarkastelussa käytetään osittaisderivaattojen yhteyttä

$$\frac{\partial}{\partial s} = \pm \frac{1}{R_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{3.58}$$

Kaavoista (3.41), (3,49), (3.50a), (3.51), (3.46) ja (3.50b) saadaan

$$\begin{aligned}
\varphi_\theta &= \pm \frac{\partial w}{\partial s}, \\
N_\phi &= \frac{Eh}{R_\phi} w, \\
M_\theta &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \\
Q_\theta &= \pm \frac{\partial M_\theta}{\partial s} = \mp D \frac{\partial^3 w}{\partial s^3}, \\
&\boxed{\begin{aligned} N_\theta &= Q_\theta \cot\theta, \\ M_\phi &= \nu M_\theta. \end{aligned}}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Differentiaaliyhtälö (3.55) saa muodon

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + 4\beta^4 w = 0. \tag{3.60}$$

Tämä on neljännen kertaluvun homogeeninen differentiaaliyhtälö reunahäiriötaipumalle $w(s,\phi)$. Vaikka yhtälö on osittaisdifferentiaali-yhtälö, siinä esiintyy pelkästään neljäs osittaisderivaatta muuttujan s suhteen ja sen ratkaisu on muodollisesti saman tyyppinen kuin vastaavan tavallisen differentiaaliyhtälön (vrt. sylinterikuoren ratkaisu (2.34)). Ratkaisu on nyt

$$w(s,\phi) = e^{-\beta s}[C_1(\phi)\cos\beta s + C_2(\phi)\sin\beta s] \tag{3.61}$$

Erona tavallisen differentiaaliyhtälön ratkaisuun (2.34) on se, että ”integrointivakiot” C_1 ja C_2 ovat nyt koordinaatista ϕ riippuvia funktioita ja että jakautuneen kuorman puuttuessa yksityisratkaisu w_0 on nolla.

3.43 Pyörähdyssymmetrisesti kuormitettu pyörähdyskuori

Pyörähdyssymmetrisen kuormituksen alaisen pyörähdyskuoren tapauksessa differentiaaliyhtälö on

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + 4\beta^4 w = 0 \tag{3.62}$$

ja ratkaisu reunahäiriötaipumalle on

$$w(s) = e^{-\beta s}(C_1 \cos\beta s + C_2 \sin\beta s)\,, \tag{3.63}$$

missä integrointivakiot ovat nyt varsinaisia vakioita. Kiertymä φ_θ normaalivoima N_ϕ, taivutusmomentti M_θ ja leikkausvoima Q_θ saavat nyt muodon

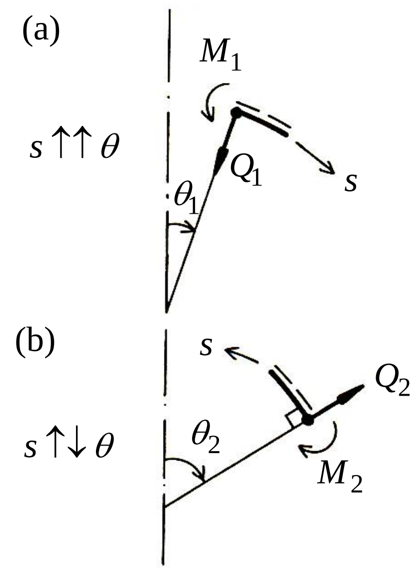
$$\begin{aligned}
\varphi_\theta &\equiv \pm\frac{dw}{ds} = \pm\beta e^{-\beta s}[-(C_1 - C_2)\cos\beta s - (C_1 + C_2)\sin\beta s],\\
N_\phi &\equiv \frac{Eh}{R_\phi} w = \frac{Eh}{R_\phi} e^{-\beta s}(C_1 \cos\beta s + C_2 \sin\beta s),\\
M_\theta &\equiv -D\frac{d^2 w}{ds^2} = 2D\beta^2 e^{-\beta s}(C_2 \cos\beta s - C_1 \sin\beta s),\\
Q_\theta &= \pm\frac{dM_\theta}{ds} = \pm 2D\beta^3 e^{-\beta s}[-(C_1 + C_2)\cos\beta s + (C_1 - C_2)\sin\beta s)].
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Etsitään ratkaisu, jota vastaavat leikkausvoima Q_θ ja taivutusmomentti M_θ saavat reunalla (häiriöviivalla) 1 arvot Q_1 ja M_1 tai reunalla 2 arvot Q_2 ja M_2. Reunaehdot siis ovat

$$Q_\theta(0) = Q_{\substack{1\\2}}\,,\; M_\theta(0) = M_{\substack{1\\2}}\,, \tag{3.65}$$

(vrt. kuva 3.13). Saadaan yhtälöt

$$\left.\begin{aligned}
\pm 2D\beta^3 (C_1 + C_2) &= Q_{\substack{1\\2}}\,,\\
2D\beta^3 C_2 &= M_{\substack{1\\2}}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{3.66}$$



Kuva 3.13: Leikkausvoiman ja taivutusmomentin arvot (a) yläreunalla 1 ja (b) alareunalla 2

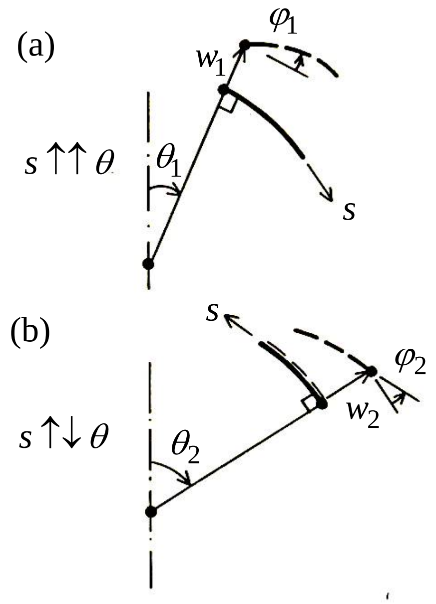
joista saadaan integrointivakioille tulokset

$$C_1 = \mp \frac{1}{2D\beta^3} Q_{\substack{1\\2}} - \frac{1}{2D\beta^2} M_{\substack{1\\2}}, \quad C_2 = \frac{1}{2D\beta^2} M_{\substack{1\\2}} . \tag{3.67}$$

Sijoittamalla nämä kaavoihin (3.64) saadaan TT:n taipuma w, kiertymä φ_θ, normaalivoima N_ϕ, taivutusmomentti M_θ ja leikkausvoima Q_θ lausutuiksi reunan leikkausvoiman Q_r ja taivutusmomentin M_r avulla. Tulos on

$$\boxed{\begin{aligned}
w(s) &= \frac{e^{-\beta s}}{2D\beta^3}[(\mp Q_{\substack{1\\2}} - \beta M_{\substack{1\\2}})\cos\beta s + \beta M_{\substack{1\\2}} \sin\beta s], \\
\varphi_\theta(s) &= \frac{e^{-\beta s}}{2D\beta^2}[(Q_{\substack{1\\2}} \pm 2\beta M_{\substack{1\\2}})\cos\beta s + Q_{\substack{1\\2}} \sin\beta s], \\
N_\phi(s) &= 2R_\phi \beta e^{-\beta s}[(\mp Q_{\substack{1\\2}} - \beta M_{\substack{1\\2}})\cos\beta s + \beta M_{\substack{1\\2}} \sin\beta s], \\
M_\theta(s) &= \frac{e^{-\beta s}}{\beta}[\beta M_{\substack{1\\2}} \cos\beta s + (\pm Q_{\substack{1\\2}} + \beta M_{\substack{1\\2}})\sin\beta s], \\
Q_\theta(s) &= e^{-\beta s}[Q_{\substack{1\\2}} \cos\beta s - (Q_{\substack{1\\2}} \pm 2\beta M_{\substack{1\\2}})\sin\beta s].
\end{aligned}} \tag{3.68}$$

Näissä kaavoissa siis, ylemmät indeksit ja merkit liittyvät kuoren (tai sen osan) yläreunaan 1 ja alemmat indeksit ja merkit liittyvät alareunaan 2.



Kuva 3.14: Taipuman ja kiertymän arvot (a) yläreunalla 1 ja (b) alareunalla 2

Lasketaan seuraavaksi kuoren reunan taipuma ja kiertymä (vrt. kuva 3.14). Saadaan

$$
\begin{aligned}
& w_{\substack{1\\2}} \equiv w(0), \quad \varphi_{\substack{1\\2}} \equiv \varphi_\theta(0) \quad \Rightarrow \\
& w_{\substack{1\\2}} = \mp \frac{1}{2D\beta^3} Q_{\substack{1\\2}} - \frac{1}{2D\beta^2} M_{\substack{1\\2}}, \\
& \varphi_{\substack{1\\2}} = \frac{1}{2D\beta^2} Q_{\substack{1\\2}} \pm \frac{1}{D\beta} M_{\substack{1\\2}}.
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

Näin saatiin lineaarinen yhteys, kuoren reunahäiriöratkaisun (TT:n ratkaisun) reunan siirtymäsuureiden (taipuman w_1 / w_2 ja kiertymän φ_1 / φ_2) ja voimasuureiden (leikkausvoiman Q_1 / Q_2 ja taivutusmomentin M_1 / M_2) välille.

Lopulliset kuoren reunan siirtymäsuureet saadaan superpositioperiaatteella TT:n suureiden ja KT:n vastinsuureiden summana, eli

$$w_{\substack{1\\2}} = w_{\substack{1\\2}}^T + w_{\substack{1\\2}}^K, \quad \varphi_{\substack{1\\2}} = \varphi_{\substack{1\\2}}^T + \varphi_{\substack{1\\2}}^K \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_{\substack{1\\2}} &= \mp \frac{1}{2D\beta^3} Q_{\substack{1\\2}} - \frac{1}{2D\beta^2} M_{\substack{1\\2}} + w_{\substack{1\\2}}^K, \\ \varphi_{\substack{1\\2}} &= \frac{1}{2D\beta^2} Q_{\substack{1\\2}} \pm \frac{1}{D\beta} M_{\substack{1\\2}} + \varphi_{\substack{1\\2}}^K, \end{aligned}} \tag{3.70}$$

missä on otettu käyttöön yläindeksit T ja K viittaamaan TT:aan ja KT:aan. Tämä on lopullinen lineaarinen yhteys kuoren reunan w_1/w_2 ja φ_1/φ_2 sekä voimasuureiden Q_1/Q_2 ja M_1/M_2 välillä. Muodostamalla yhteensopivuusehdot tarkasteltavalla häiriöviivalla, käyttämällä yhteyksiä (3.70) ja tasapainoyhtälöitä saadaan häiriöviivaan liittyvät voimasuureet ratkaistuksi. Tämän jälkeen ratkaisu kunkin kuoren osan tarkasteltavassa päässä käyttämällä kaavoja

$$\boxed{\begin{aligned} &u(s) = u^K(s), \quad w(s) = w^T(s) + w^K(s), \quad \varphi_\theta(s) = \varphi_\theta^T(s) + \varphi_\theta^K(s), \\ &N_\theta(s) = N_\theta^T(s) + N_\theta^K(s), \quad N_\phi(s) = N_\phi^T(s) + N_\phi^K(s), \\ &Q_\theta(s) = Q_\theta^T(s), \quad M_\theta(s) = M_\theta^T(s), \quad M_\phi(s) = M_\phi^T(s), \end{aligned}} \tag{3.71}$$

missä yläindeksillä T varustetut TT:n suureet saadaan kaavoista (3.68) ja (3.59 e ja f) sekä yläindeksillä K varustetut suureet on saatu KT:n ratkaisuna.

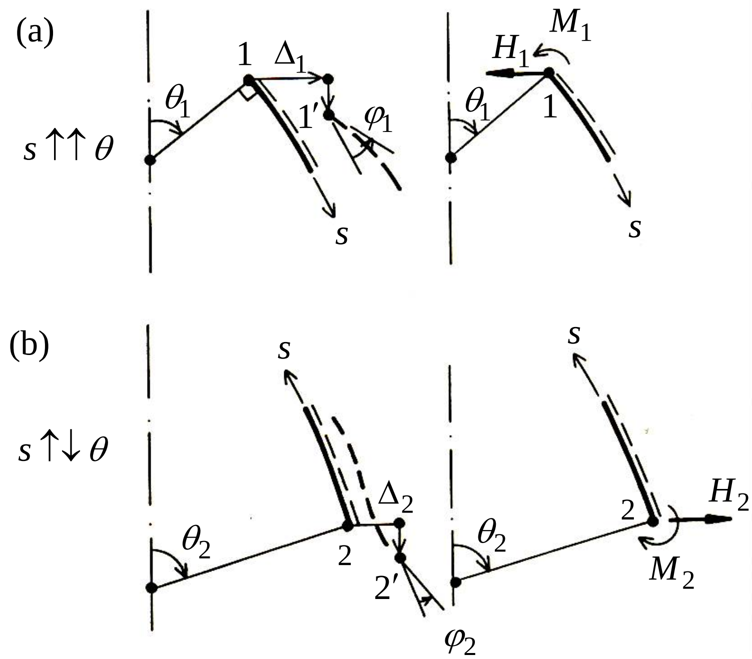
Useissa tapauksissa hieman yksinkertaisempaan ja systemaattisempaan käsittelyyn päästään, jos kuoren TT:n reunan siirtymä- ja voimasuureiden yhteyksissä käytetäänkin taipuman w_1/w_2 sijasta radiaalista siirtymää Δ_1/Δ_2 sekä leikkausvoiman sijasta radiaalista leikkausrasitusta H_1/H_2 (vrt. kuva 3.15).

TT:n otaksuman $w \gg u$ ja kaavan (3.30) perusteella saadaan $\Delta \approx w \sin\theta$ ja kuvan 3.16 perusteella $Q_\theta = H_\theta \sin\theta$, joten

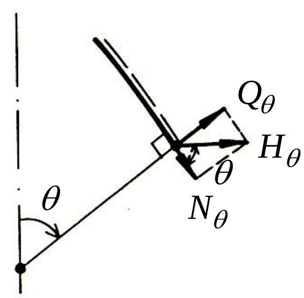
$$\Delta_{\substack{1\\2}} = w_{\substack{1\\2}} \sin\theta_{\substack{1\\2}} \tag{3.72}$$

ja

$$\boxed{Q_{\substack{1\\2}} = H_{\substack{1\\2}} \sin\theta_{\substack{1\\2}}}. \tag{3.73}$$



Kuva 3.15: Radiaalisen siirtymän, kiertymän, radiaalisen leikkausrasituksen ja taivutusmomentin arvot (a) yläreunalla 1 ja (b) alareunalla 2



Kuva 3.16: Leikkausvoima, normaalivoima ja radiaalinen leikkausrasitus

Kaavoista (3.70) saadaan nyt helposti

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_{\substack{1\\2}} &= \mp \frac{\sin^2\theta_{\substack{1\\2}}}{2D\beta^3} H_{\substack{1\\2}} - \frac{\sin\theta_{\substack{1\\2}}}{2D\beta^2} M_{\substack{1\\2}} + \Delta^K_{\substack{1\\2}}, \\ \varphi_{\substack{1\\2}} &= \frac{\sin\theta_{\substack{1\\2}}}{2D\beta^2} H_{\substack{1\\2}} \pm \frac{1}{D\beta} M_{\substack{1\\2}} + \varphi^K_{\substack{1\\2}}. \end{aligned}} \tag{3.74}$$

Tämä on lopullinen lineaarinen yhteys kuoren reunan siirtymäsuureiden Δ_1/Δ_2 ja φ_1/φ_2 sekä voimasuureiden H_1/H_2 ja M_1/M_2 välillä. Muodostamalla yhteensopivuusehdot tarkasteltavalla häiriöviivalla, käyttämällä yhteyksiä (3.74) ja tasapainoyhtälöitä saadaan häiriöviivaan liittyvät voimasuureet ratkaistuksi. Leikkausvoima kuoren osan tarkasteltavalla reunalla saadaan tämän jälkeen kaavalla (3.73) ja ratkaisu kunkin kuoren osan tarkasteltavassa päässä käyttämällä kaavoja (3.71).

Liite A: Fourierin sarjat

Fourierin sarjat ovat korvaamaton apuväline monien sovelletun mekaniikan probleemien analyyttiseen käsittelyyn. Tällaisia probleemia ovat esimerkiksi kimmoteorian osittaisdifferentiaaliyhtälöt, rakenteiden värähtelyt, lämmön virtaus sekä sähkömagneettiset aallot.

A.1 Yksinkertainen Fourierin sarja

Fourierin teoreeman mukaan mielivaltainen jaksollinen funktio[1] $f(x)$ voidaan esittää äärettömänä sarjana, jossa esiintyy kosini- ja sinitermejä. Täten alkuperäinen funktio korvataan lukuisten sini- ja kosiniaaltojen superpositiolla. Jaksollisen funktion $f(x)$, jonka jakson pituus on[2] $p = 2L$, Fourierin sarja voidaan esittää muodossa

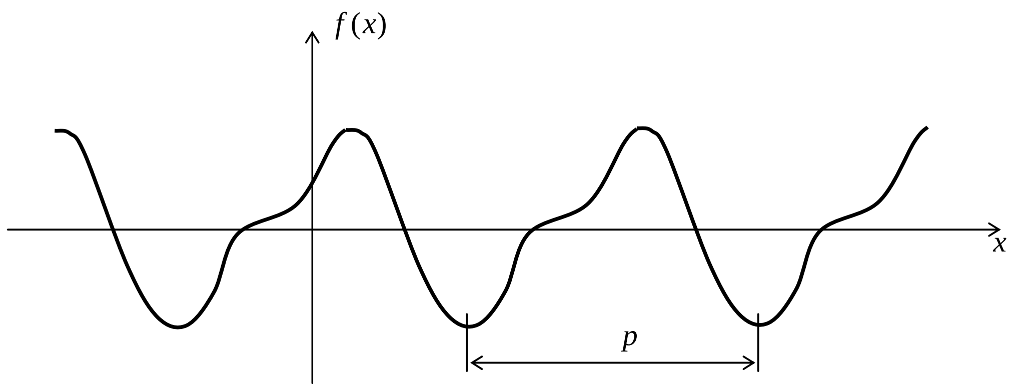
$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0 &+ a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots + a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \cdots \\
&+ b_1 \sin\frac{\pi x}{L} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \cdots + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} + \cdots
\end{aligned}
$$

tai lyhyemmin

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos\alpha_i x + b_i \cos\alpha_i x)\,, \tag{A.1}$$

missä

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{L}\,. \tag{A.2}$$



Kuva A.1: Mielivaltainen jaksollinen funktio $f(x)$

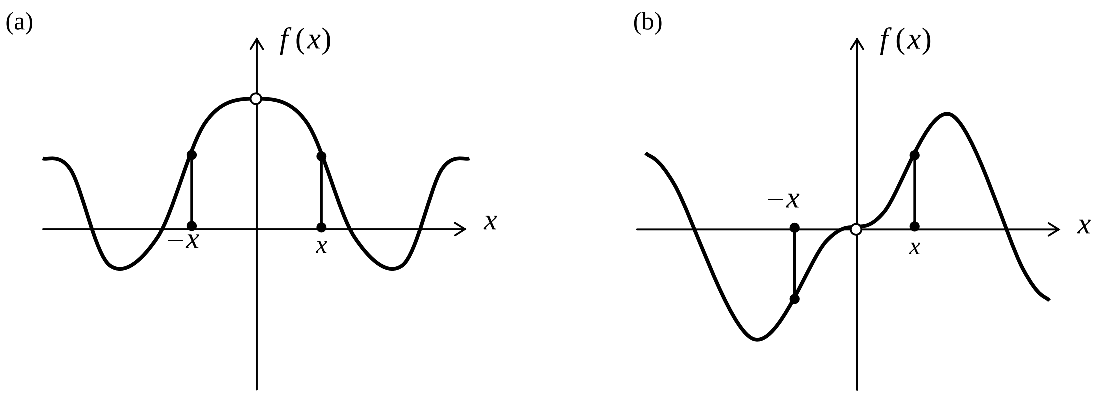
[1] Funktion $f(x)$ sanotaan olevan jaksollinen, jos on positiivinen luku *p*, siten että $f(x+p) = f(x)$ (vrt. kuva A.1). Lukua *p* kutsutaan ***jakson pituudeksi***.

[2] Seuraavissa tarkasteluissa on tarkoituksenmukaista käyttää jakson pituuden *p* sijasta sen puolikasta L.

Jos funktio $f(x)$ tunnetaan, sarjan kertoimet saadaan kaavoilla

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \\ a_i &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\alpha_i xdx \\ b_i &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\alpha_i xdx \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2,3,\cdots. \tag{A.3}$$

Tapauksissa, joissa tarkasteltava funktio $f(x)$ on joko ***parillinen*** tai ***pariton***, Fourierin sarjalle on tarkoituksenmukaista esittää vastaavat hieman yksinkertaisemmat kaavat. Muistamme, että funktio $f(x)$ on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$, ja se on pariton, jos $f(-x) = -f(x)$ (vrt. kuva A.2). (Näin esimerkiksi $\cos\alpha_i x$ on parillinen- ja $\sin\alpha_i x$ on pariton funktio.)



Kuva A.2: (a) Parillinen funktio ja (b) pariton funktio

Jos funktio $f(x)$ on parillinen, saadaan

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\alpha_i xdx = 0, \quad \int_{-L}^{L} f(x)\cos\alpha_i xdx = 2\int_{0}^{L} f(x)\cos\alpha_i xdx$$

ja jos funktio $f(x)$ on pariton, saadaan

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\alpha_i xdx = 2\int_{0}^{L} f(x)\sin\alpha_i xdx, \quad \int_{-L}^{L} f(x)\cos\alpha_i xdx = 0.$$

Näiden tulosten avulla ***parillisen funktion*** $f(x)$ ***kosinisarjalle*** saadaan esitys

$$\boxed{f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cos\alpha_i x,} \tag{A.4}$$

missä sarjan kertoimet ovat

$$\boxed{\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \\ f_i &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\alpha_i x dx \quad i = 1,2,3,\cdots. \end{aligned}} \tag{A.5}$$

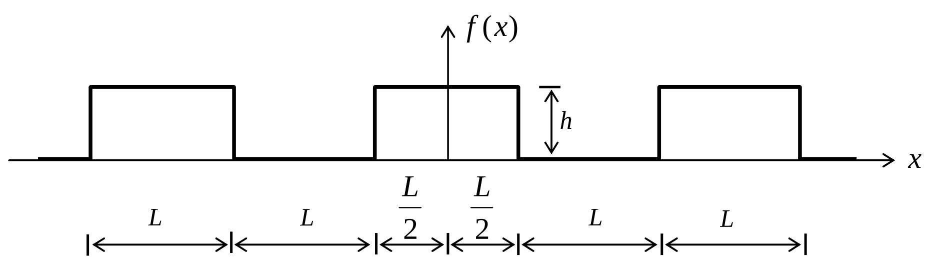
Vastaavasti ***parittoman funktion*** $f(x)$ ***sinisarjalle*** saadaan esitys

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sin\alpha_i x,} \tag{A.6}$$

missä sarjan kertoimet ovat

$$\boxed{f_i = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\alpha_i x dx \quad i = 1,2,3,\cdots.} \tag{A.7}$$

Esimerkki A.1: Kehitetään oheinen ”hammasfunktio” Fourier-sarjaksi.



Kysymyksessä on parillinen funktio, joten käytetään kosinisarjaa. Integrointivälillä $0 \le x \le L$ funktio $f(x)$ on

$$f(x) = \begin{cases} h, \text{ kun } 0 \le x < \dfrac{L}{2} \\ 0, \text{ kun } \dfrac{L}{2} < x \le L \end{cases}$$

Kaavasta (A.5) seuraa sarjan kertoimille

$$f_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{1}{L}(\int_0^{L/2} hdx + \int_{L/2}^{L} 0dx) = \frac{h}{L}\Big|_0^{L/2} x = \underline{\frac{h}{2}},$$

$$f_i = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\alpha_i x dx = \frac{2}{L}(\int_0^{L/2} h\cos\alpha_i x dx + \int_{L/2}^{L} h\cdot 0dx) = \frac{2h}{\alpha_i L}\Big|_0^{L/2}\sin\alpha_i x = \frac{2h}{\alpha_i L}\sin\frac{\alpha_i L}{2}$$

$$= \underline{\frac{2h}{i\pi}\sin\frac{i\pi}{2}}.$$

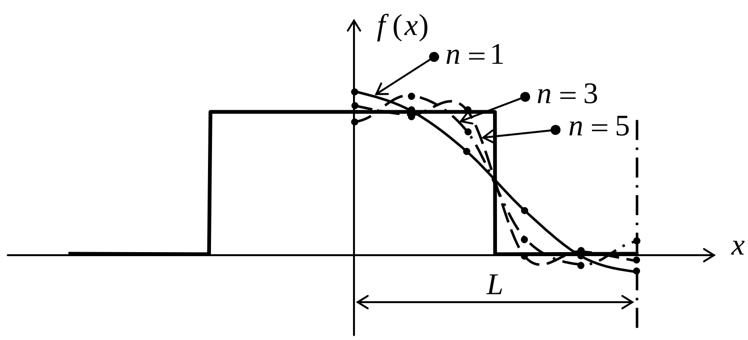
Kaavasta (A.4) saadaan, kun sarjasta otetaan *n* termiä

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i \cos\alpha_i x = \frac{h}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{2h}{i\pi}\sin\frac{i\pi}{2}\cos(i\pi\frac{x}{L}) .$$

Oheiseen taulukkoon on laskettu funktion $f(x)/h$ arvoja välillä $0 \le x \le L$, kun $n = 1,\ 3$ ja 5.

x/L	$n=1$	$n=3$	$n=5$
0	1,137	0,924	1,052
0,2	1,015	1,081	0,953
0,4	0,697	0,868	0,996
0,6	0,303	0,132	0,004
0,8	-0,015	-0,081	0,047
1	-0,137	0,076	-0,052

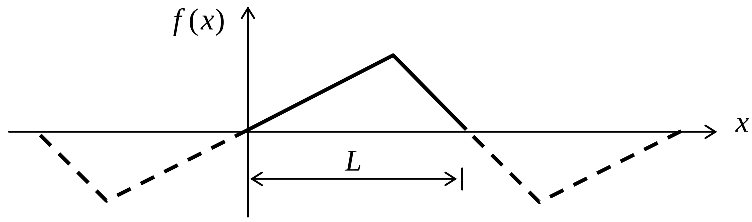
Oheiseen kuvaan on piirretty funktion $f(x)$ kuvaaja, kun $n = 1,\ 3$ ja 5.



Tietyllä äärellisellä välillä määritelty ei-jaksollinen funktio voidaan myös esittää Fourierin sarjana ajattelemalla sen jatkuvan määrittelyvälinsä yli. Välillä $0 \le x \le L$

määritelty funktio $f(x)$ on kuvassa A.3 ajateltu jatkuvan jaksollisena parittomana funktiona. Se voidaan siten esittää sinisarjana

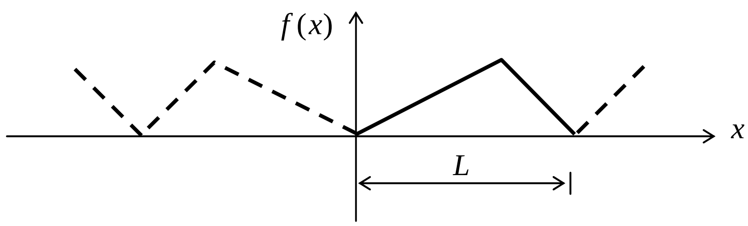
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sin \alpha_i x \,. \tag{A.8}$$



Kuva A.3: Välillä $0 \le x \le L$ määritelty funktio $f(x)$ ja sen jaksollinen pariton jatke.

Saman funktion $f(x)$ on kuvassa A.4 ajateltu jatkuvan jaksollisena parillisena funktiona. Se voidaan siten esittää myös kosinisarjana

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cos \alpha_i x \tag{A.9}$$



Kuva A.4: Välillä $0 \le x \le L$ määritelty funktio $f(x)$ ja sen jaksollinen parillinen jatke.

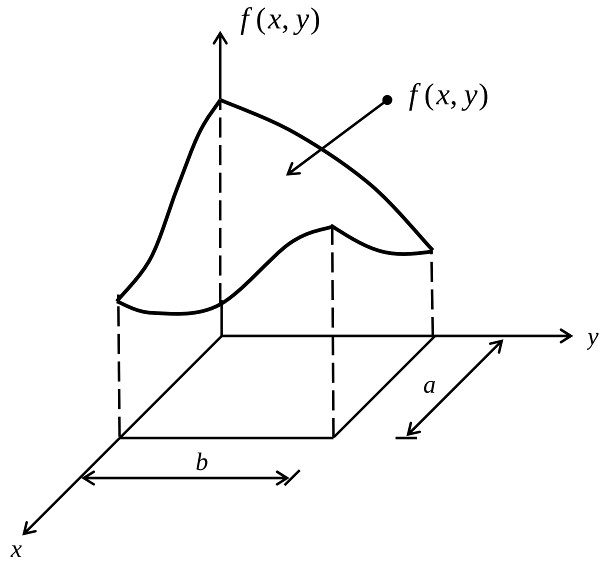
A.2 Kaksinkertainen Fourierin sarja

Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota $f(x,y)$ joka on määritelty suorakaiteen muotoisessa alueessa $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ (kuva A.5). Kehitetään funktio ensin välillä $0 \le x \le a$ muuttujan x sinisarjaksi

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(y) \sin \alpha_i x \,, \tag{A.10}$$

missä

$$f_i(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x,y) \sin \alpha_i x dx \tag{A.11}$$



Kuva A.5: Suorakaiteen muotoisessa alueessa määritelty kahden muuttujan funktio

ja $\alpha_i = i\pi / a$. Nyt sarjan kertoimet $f_i(y)$ ovat yhden muuttujan y funktioita. Ajatellaan edelleen ne kehitetyksi välillä $0 \le y \le b$ muuttujan y sinisarjaksi

$$f_i(y) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij} \sin \beta_j y \,, \tag{A.12}$$

missä

$$f_{ij} = \frac{2}{b} \int_0^b f_i(y) \sin \beta_j y dy \tag{A.13}$$

ja $\beta_j = j\pi / b$.

Sijoittamalla kertoimien $f_i(y)$ kehitelmä (A.12) funktion $f(x,y)$ kehitelmään (A.10) ja kertoimien $f_i(y)$ lauseke (A.11) kertoimien f_{ij} lausekkeeseen (A.13) saadaan funktion $f(x,y)$ kaksinkertaiselle Fourier sinisarjalle lauseke

$$\boxed{f(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}\sin\alpha_i x\sin\beta_j y} \tag{A.14}$$

ja sen kertoimille lauseke

$$\boxed{f_{ij}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\alpha_i x\sin\beta_j y dx dy.} \tag{A.15}$$

Näissä kaavoissa on siis käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\boxed{\alpha_i=\frac{i\pi}{a},\quad \beta_j=\frac{j\pi}{b}.} \tag{A.16}$$

Liite B: Differentiaaliyhtälön (2.81) ratkaisu

Tässä liitteessä johdetaan kerroinfunktion $W_i(\phi)$ differentiaaliyhtälön (2.81) ratkaisu. Tarkastelussa jätetään sarjan termiin liittyvä alaindeksi i pois.

Otetaan ratkaisulle yrite

$$W = Ce^{r\phi}$$

Sijoittamalla se yhtälöön (2.81) saadaan

$$C(r^8 + \lambda^8)e^{r\phi} = 0$$

ja edelleen

$$r = \lambda\sqrt[8]{(-1)}\,,$$

missä

$$\sqrt[8]{(-1)} = \begin{cases} \pm 0{,}9238795 \pm i0{,}3826834 \\ \pm 0{,}3826834 \pm i0{,}9238795 \end{cases}$$

Jos merkitään

$$\alpha = 0{,}9238795\lambda, \quad \beta = 0{,}3826834\lambda \tag{B.1}$$

differentiaaliyhtälön ratkaisu (2.81) yritteen eksponentille r saadaan näin seuraavat 8 arvoa

$$r = \begin{cases} \pm\alpha \pm i\beta \\ \pm\beta \pm i\alpha \end{cases}$$

Differentiaaliyhtälöiden teorian mukaan yhtälön (2.81) yleinen ratkaisu on täten

$$\begin{aligned} W = {} & C_1 e^{(\alpha+i\beta)\phi} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)\phi} + C_3 e^{(-\alpha+i\beta)\phi} + C_4 e^{-(\alpha+i\beta)\phi} \\ & + C_5 e^{(\beta+i\alpha)\phi} + C_6 e^{(\beta-i\alpha)\phi} + C_7 e^{(-\beta+i\alpha)\phi} + C_8 e^{-(\beta+i\alpha)\phi}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

missä $C_1,\cdots,C_8$ ovat kompleksiset integrointivakiot. Käyttäen hyväksi tunnettuja yhteyksiä

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$
$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

ratkaisu (2.87) voidaan saattaa muotoon

$$\begin{aligned} W = 2(&A\cos\beta\phi\cosh\alpha\phi - B\sin\beta\phi\sinh\alpha\phi \\ &+ C\cos\alpha\phi\cosh\beta\phi - D\sin\alpha\phi\sinh\beta\phi \\ &+ E\cos\beta\phi\sinh\alpha\phi - F\sin\beta\phi\cosh\alpha\phi \\ &+ G\cos\alpha\phi\sinh\beta\phi - H\sin\alpha\phi\cosh\beta\phi), \end{aligned} \tag{B.3}$$

missä $A,\cdots,H$ ovat reaaliset integrointivakiot. Tämä on differentiaaliyhtälön (2.81) ratkaisu käyttökelpoisessa muodossa. Jos tarkasteltava kuori on pystytason ($x,z-$tason vrt. Kuva 2.1) suhteen symmetrinen ja sitä kuormittaa symmetrinen kuormitus funktion (B.3) tulee olla parillinen. Tämä saadaan aikaan asettamalla vakiot $E,\cdots,H$ nolliksi. Näin ratkaisu (B.3) yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{aligned} W = 2(&A\cos\beta\phi\cosh\alpha\phi - B\sin\beta\phi\sinh\alpha\phi \\ &+ C\cos\alpha\phi\cosh\beta\phi - D\sin\alpha\phi\sinh\beta\phi). \end{aligned} \tag{B.4}$$

Tarkasteltavan tehtävän ratkaisussa tarvitsemme myös kerroinfunktion W derivaattoja (vrt. Kaavat (2.84) ja (2.85)). Niille saadaan seuraat tulokset:

Parittoman kertaluvun $n=1,3,5,7$ derivaatat ovat muotoa

$$\begin{aligned} \frac{d^nW}{d\phi^n} = 2\lambda^n[&(a_nA-b_nB)\cos\beta\phi\sinh\alpha\phi-(b_nA+a_nB)\sin\beta\phi\cosh\alpha\phi \\ &+(c_nC-d_nD)\cos\alpha\phi\sinh\beta\phi-(d_nC+c_nD)\sin\alpha\phi\cosh\beta\phi] \end{aligned} \tag{B.5a}$$

ja parillisen kertaluvun $n=0,2,4,6,8$ derivaatat ovat muotoa

$$\frac{d^nW}{d\phi^n} = 2\lambda^n[(a_nA - b_nB)\cos\beta\phi\cosh\alpha\phi - (b_nA + a_nB)\sin\beta\phi\sinh\alpha\phi \qquad \text{(A5.b)}$$
$$+ (c_nC - d_nD)\cos\alpha\phi\cosh\beta\phi - (d_nC + c_nD)\sin\alpha\phi\sinh\beta\phi],$$

missä kertoimet a_n, b_n, c_n ja d_n saadaan taulukosta B.1.

Taulukko B.1: Kertoimien a_n, b_n, c_n ja d_n arvot

n	a_n	b_n	c_n	d_n
1	+0,9238795	+0,3826834	+0,3826834	+0,9238795
2	+0,7071068	+0,7071068	−0,7071068	+0,7071068
3	+0,3826834	+0,9238795	−0,9238795	−0,3826834
4	0	+1	0	−1
5	−0,3826834	+0,9238795	+0,9238795	−0,3826834
6	−0,7071068	+0,7071068	+0,7071068	+0,7071068
7	−0,9238795	+0,3826834	−0,3826834	+0,9238795
8	−1	0	−1	0