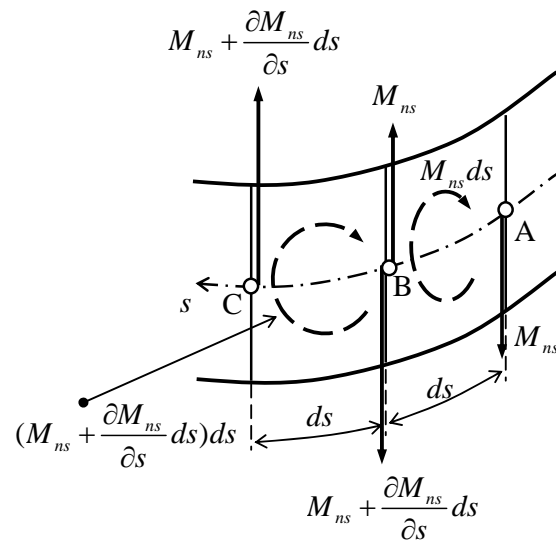


Rak-54.111 RAKENTEIDEN MEKANIikka B

Luentomoniste

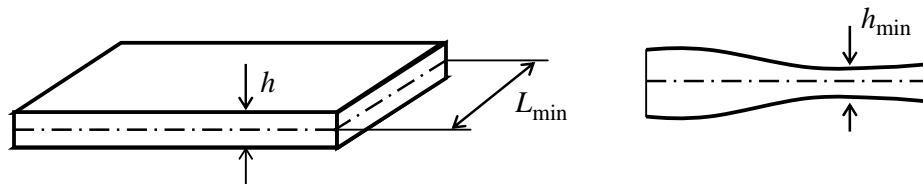
Osa III: Kimmoiset laatat

Jukka Aalto



1. Johdanto

Laatalla tarkoitetaan tavallisesti kahden yhdensuuntaisen tason rajoittamaa kappaletta, jonka paksuus on pieni verrattuna ulottuvuuksiin tasojen suunnassa (kuva 1.1). Taso, joka puolittaa rajoittavien tasojen välisen paksuuden, on laatan keskitaso. Keskitasoa vastaan kohtisuorat sylinteripinnat muodostavat laatan reunan. Keskitason ja reunan leikkauskäyrää sanotaan laatan reunaviivaksi. Edellä on kuvattu tasapaksu laatta, jonka paksuus on siis vakio. Jos rajoittavat tasot eivät ole yhdensuuntaiset tai rajoittavat pinnat ovat kaarevia keskipinnan ollessa kuitenkin taso, laatta on paksuudeltaan muuttuva. Laatan kuormitus on keskitason normaalin suuntainen, jolloin se aiheuttaa laatan taipumisen.



Kuva 1.1: Laatan mittoja

Laatta on lujuusteknisesti edullinen rakenne-elementti, minkä takia niitä käytetään runsaasti sekä talonrakennustekniikassa (välipohjat, peruslaatat jne.) että sillanrakennustekniikassa (kansilaatat).

Laatan geometrinen ominaisuus ja toimintatavan perusteella on kehitetty erilaisia analysointitapoja. Kuhunkin tyyppiin soveltuvan laskutavan mukaan laatat voidaan jakaa seuraaviin ryhmiin:

<u>laatta</u>	<u>analysointitapa</u>
1) PAKSU LAATTA $h \geq L_{\min} / 5$	1) 3-DIMENSIOINEN KIMMOTEORIA tai ns. PAKSUN LAATAN TEORIA
2) OHUT, VÄHÄN TAIPUNUT LAATTA $h \leq L_{\min} / 5 ; w_{\max} \leq h / 5$	2) LINEAARINEN LAATTATEORIA keskipinnan venymä=0, keskipinta käyristyy
3) OHUT, RUNSASTI TAIPUNUT LAATTA $h \leq L_{\min} / 5 ; h / 5 \leq w_{\max} \leq 5h$	3) TAIPUISAN LAATAN TEORIA keskipinta venyy ja käyristyy
4) KALVO ELI MEMBRAANI	4) KALVOTEORIA keskipinta venyy ja käyristyy, mutta laatan taivutusjäykkyyden merkitys on vähäinen

Yksinkertaisin laattateoria, lineaarinen laattateoria eli **Kirchhoffin laattateoria** pätee ohuille laatoille, joiden taipuma on pieni verrattuna laatan paksuuteen (ks. ryhmä 2) yllä). Se on palkkien teknisen taivutusteorian yleistys kaksiulotteiselle rakenteelle. Seuraavassa tarkastellaan lineaarisen laattateorian perusasioita.

Laatan materiaalin mukaan puhutaan **isotrooppisesta** tai **anisotrooppisesta** tai **ortotrooppisesta** laatasta. **Sandwich-laatta** on rakenteeltaan kerroksellinen pintakerroksien ollessa ohuita ja lujia

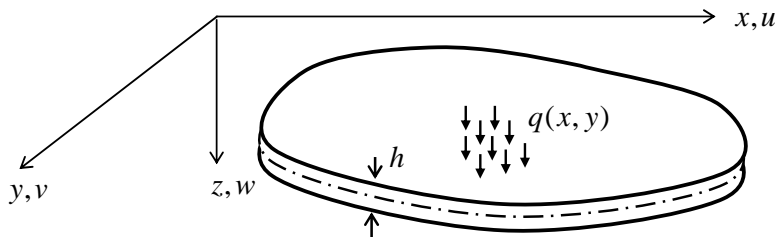
(esim. ohut teräslevy) ja niiden välissä olevan ydinkerroksen kevyt, eristävä eikä välttämättä luja. **Teräsbetonilaatta** on yleensä ortotrooppinen terästen sijoittelun takia. Vaikka niiden analysointiin usein käytetään lineaarista laattateoriaa, on tietenkin todettava että betonin alhainen vetolujuus aiheuttaa halkeilua, mikä tekee laatan toiminnan epälineaariseksi ja lineaarisen teorian tarkasti ottaen pätemättömäksi.

2. Laatan yhtälöt karteesisessa koordinaatistossa

Tarkastelemme laatan taivutusta teknisen taivutusteorian eli ns. **Kirchhoff** laattateorian mukaan. Tämä teoria vastaa palkkien teknistä taivutusteoriaa eli Bernoulli-Euler palkkiteoriaa, jossa leikkausmuodonmuutoksen vaikutus jätettiin huomiotta. Palkkien leikkausmuodonmuutoksen huomioon ottavaa Timoshenko palkkiteoriaa vastaavasti laatoille voidaan myös esittää ns. **Mindlin** laattateoria, jossa leikkausmuodonmuutokset otetaan huomioon. Tällainen teoria on tarpeellinen esimerkiksi sandwich laattojen yhteydessä. Vaikka Mindlin laattateoria ei vaikeusasteeltaan juurikaan poikkea Kirchhoff teoriasta, jätämme sen kuitenkin lyhyiden vuoksi tarkastelumme ulkopuolelle.

Kirchhoff laattateorian perusotaksumat ovat (1) Taipuma on pieni laatan paksuuteen nähden $w_{\max} \leq h/5$. (2) Keskipinta on neutraalipinta, ts. se ei veny. (3) Keskipinnan normaalit säilyvät suorina ja kohtisuorassa taipunutta keskipintaa vastaan (Kirchhoff) (vrt. palkkien Bernoullin hypoteesi). (4) Keskipinnan normaalin suuntainen jännitys σ_z on pieni muihin jännityksiin verrattuna.

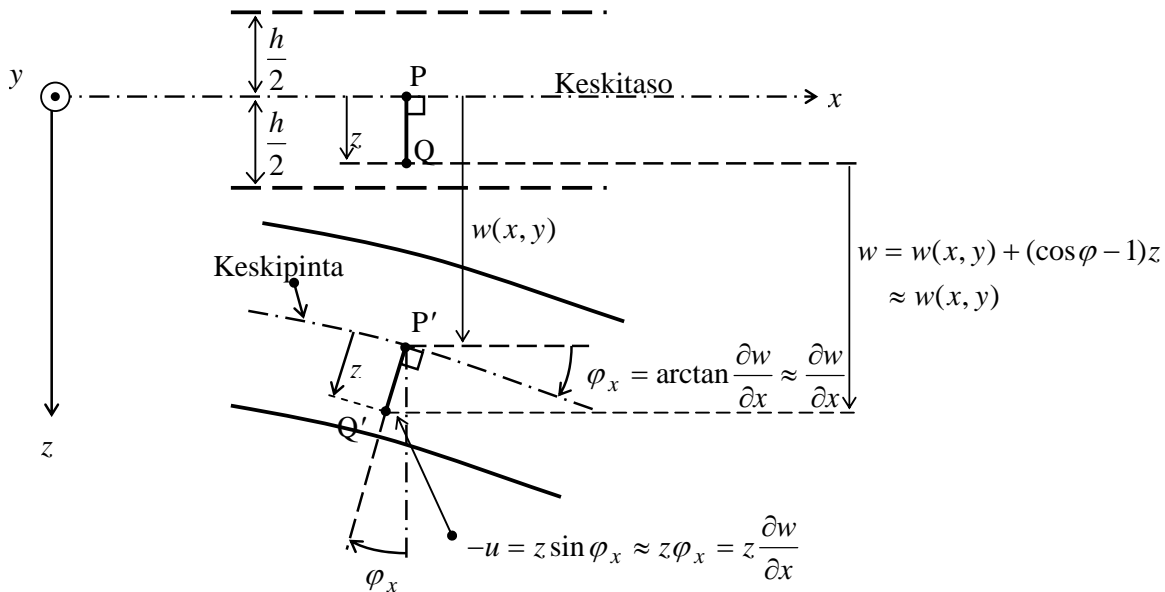
Kuva 2.1 esittää laattaa karteesisessa x,y,z -koordinaatistossa. Kuormittamattoman laatan keskitaso yhtyy x,y -tasoon ja z -akseli on alaspäin. Jakautunut kuorma $q(x,y)$ vaikuttaa kohtisuoraan keskitasoa vastaa siten, että sen positiivinen suunta on alaspäin.



Kuva 2.1: Laatta karteesisessa koordinaatistossa: xy -taso yhtyy laatan keskitasoon ja z -akseli alaspäin.

2.1 Laatan siirtymäotaksuma

Kun laatta deformoituu, sen keskitason pisteet siirtyvät ja niistä muodostuu laatan keskipinta (kuva 2.2). Laatan keskitason pisteen P: (x,y) pystysiirtymää kutsutaan laatan **taipumaksi** ja merkitään $w(x,y)$:llä. Kun laatta deformoituu, sen keskitason normaalin suuntainen materiaalisäie, jota deformatumattomassa tilassa esittää jana PQ, siirtyy siten, että sitä deformatuneessa tilassa esittää jana P'Q' (kuva 2.2). Kirrhoffin teorian mukaan tämä materiaalisäie säilyy suorana, keskipinnan normaalin suuntaisena ja sen pituus ei muutu ts. $P'Q' = PQ = z$.



Kuva 2.2: Laatan siirtymäotaksuma.

Laatan yleisen pisteen Q: (x,y,z) vaakasiirtymälle $u(x,y,z)$ ja pystysiirtymälle $w(x,y,z)$ saadaan kuvan 2.2 perusteella lausekkeet

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad w(x, y, z) = w(x, y).$$

Suorittamalla vastaavanlainen tarkastelu y,z -tason suuntaisessa leikkauksessa saataisiin lisäksi pisteen Q: (x,y,z) vaakasiirtymälle $v(x,y,z)$ lauseke

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}.$$

Näin olemme saaneet laatan siirtymäotaksuman lausekkeet

$$\boxed{u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \quad w(x, y, z) = w(x, y).} \quad (2.1)$$

Ne ilmaisevat laatan yleisen pisteen (x,y,z) siirtymät u , v ja w taipuman $w(x,y)$ avulla lausuttuina. Näin laatan siirtymätila on voitu esittää kolmen funktion $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ ja $w(x,y,z)$ sijasta yhden funktion $w(x,y)$ avulla.

2.2 Laatan muodonmuutokset

Käyttämällä kiinteän aineen muodonmuutosten ja siirtymien välisiä yhteyksiä saadaan nyt

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Laatan nollasta eroavat muodonmuutokset ovat siis

$$\boxed{\varepsilon_x = z\kappa_x, \quad \varepsilon_y = z\kappa_y, \quad \gamma_{xy} = 2z\kappa_{xy}}, \quad (2.3)$$

missä

$$\boxed{\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}. \quad (2.4)$$

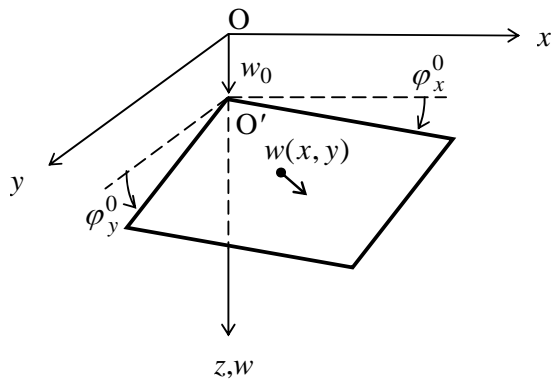
Suureita κ_x ja κ_y kutsutaan **laatan käyristymiksi** ja suuretta κ_{xy} **vääntymäksi**. Kaavan (2.4) mukaan ne ovat taipuman toisia osittaisderivaattoja miinusmerkkisinä. Kaavat (2.3) ilmaisevat, että laatan venymät ε_x , ε_y ja liukuma γ_{xy} ovat suoraan verrannollisia etäisyyteen z keskipinnasta verrannollisuuskertoimien ollessa κ_x , κ_y ja $2\kappa_{xy}$.

Käyristymien ja vääntymän geometrisen merkityksen havainnollistamiseksi tarkastellaan **vakio** käyristymiä ja vääntymää κ_x , κ_y ja κ_{xy} vastaavaa laatan taipumaa. Sen lauseke on muotoa

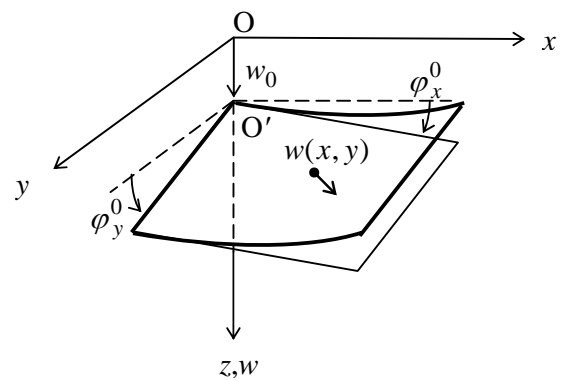
$$w(x, y) = w_0 + \varphi_x^0 x + \varphi_y^0 y - \frac{1}{2} \kappa_x x^2 - \kappa_{xy} xy - \frac{1}{2} \kappa_y y^2,$$

missä w_0 , φ_x^0 ja φ_y^0 ovat taipuman ja kiertymän arvot origossa. (Tulos voidaan todentaa helposti derivoimalla). Jos nyt $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_{xy} = 0$, on deformatiivinen laatan keskipinta taso, vrt. kuva 2.3a seuraavalla sivulla. Jos **käyristymä** $\kappa_x \neq 0$, on keskipinta **x-akselin suunnassa käyrä**, vrt. kuva 2.3b. Jos **käyristymä** $\kappa_y \neq 0$, on keskipinta **y-akselin suunnassa käyrä**, vrt. kuva 2.3c. Jos **vääntymä** $\kappa_{xy} \neq 0$, on keskipinta **vääntynyt**, vrt. kuva 2.3d.

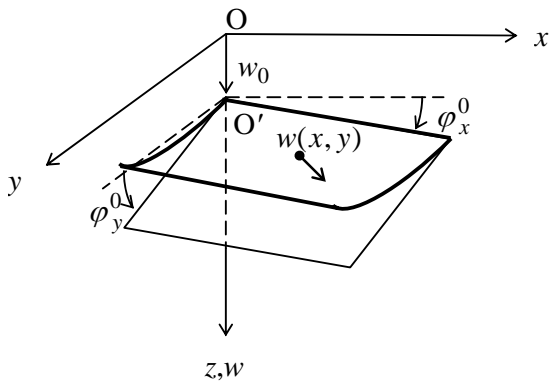
(a) $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_{xy} = 0$



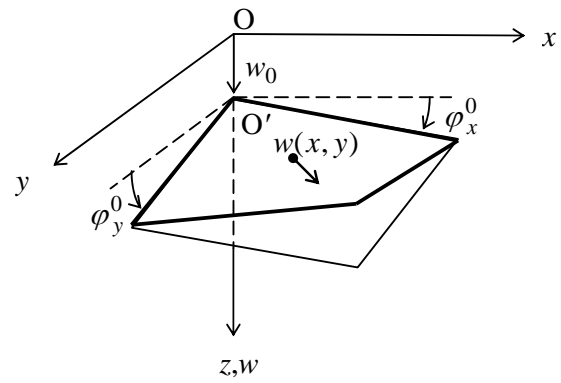
(b) $\kappa_x \neq 0, \kappa_y = \kappa_{xy} = 0$



(c) $\kappa_y \neq 0, \kappa_x = \kappa_{xy} = 0$



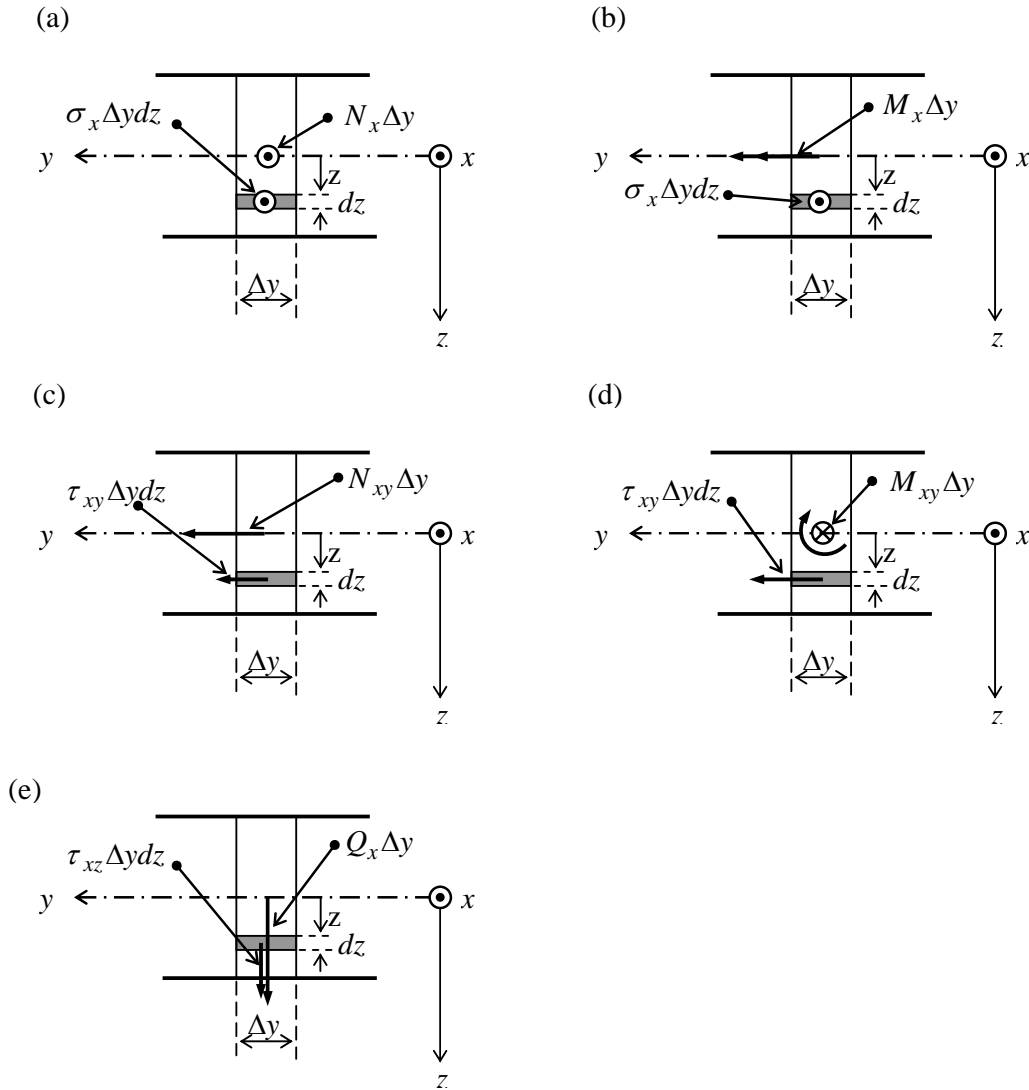
(d) $\kappa_{xy} \neq 0, \kappa_x = \kappa_y = 0$



Kuva 2.3: Käyritymien ja vääntymän geometrinen merkitys

2.3 Laatan jännitysresultantit

Vastaavaan tapaan kuin palkeille ja kehillle, myös laatalle määritellään jännitysresultantteja. Laatan jännitysresultantit määritetään kuitenkin **pituutta kohti laskettuina** voima- ja momenttisuureina.



Kuva 2.4: Laatan jännitysresultanttien määrittely

Tarkastellaan aluksi x -akselia vastaan kohtisuoraan pintaan liittyviä jännitysresultantteja (kuva 2.4). **Normaalivoima** N_x määritellään **normaalijännityksen** σ_x (y -akselin suuntaista pituutta kohti laskettuna) **resultanttina** (kuva 2.4a). Jos pituus Δy on pieni, saadaan kuvan varjostettuun pinta-alkioon $\Delta y dz$ vaikuttavan normaalijännityksen σ_x resultantiksi $dN_x \Delta y = \sigma_x \Delta y dz$. Integroimalla tämä laatan paksuuden yli saadaan

$$N_x \Delta y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \Delta y \Rightarrow N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz.$$

Taivutusmomentti M_x määritellään **normaalijännityksen** σ_x (y-akselin suuntaista pituutta kohti laskettuna) **resultoivana momenttina** ko. kuhdassa keskitasossa olevan y-akselin suuntaisen akselin suhteen (kuva 2.4b). Kuvan varjostettuun pinta-alkioon $\Delta y dz$ vaikuttavan normaalijännityksen σ_x momentiksi saadaan $dM_x \Delta y = \sigma_x \Delta y dz \cdot z$ ja integroimalla tämä laatan paksuuden yli saadaan

$$M_x \Delta y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \Delta y \Rightarrow M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz.$$

Leikkausvoima N_{xy} määritellään **leikkausjännityksen** τ_{xy} (y-akselin suuntaista pituutta kohti laskettuna) **resultanttina** (kuva 2.4c). Kuvan varjostettuun pinta-alkioon $\Delta y dz$ vaikuttavan leikkausjännityksen τ_{xy} resultantiksi saadaan $dN_{xy} \Delta y = \tau_{xy} \Delta y dz$ ja integroimalla tämä laatan paksuuden yli saadaan

$$N_{xy} \Delta y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \Delta y \Rightarrow N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz.$$

Vääntömomentti M_{xy} määritellään **leikkausjännityksen** τ_{xy} (y-akselin suuntaista pituutta kohti laskettuna) **resultoivana momenttina** ko. kohdassa keskitasossa olevan x-akselin suuntaisen akselin suhteen (kuva 2.4d). Kuvan varjostettuun pinta-alkioon $\Delta y dz$ vaikuttavan leikkausjännityksen τ_{xy} momentiksi saadaan $dM_{xy} \Delta y = \tau_{xy} \Delta y dz \cdot z$ ja integroimalla tämä laatan paksuuden yli saadaan

$$M_{xy} \Delta y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \Delta y \Rightarrow M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz.$$

Leikkausvoima Q_x määritellään **leikkausjännityksen** τ_{xz} (y-akselin suuntaista pituutta kohti laskettuna) **resultanttina** (kuva 2.4e). Kuvan varjostettuun pinta-alkioon $\Delta y dz$ vaikuttavan leikkausjännityksen τ_{xz} resultantiksi saadaan $dQ_x \Delta y = \tau_{xz} \Delta y dz$ ja integroimalla tämä laatan paksuuden yli saadaan

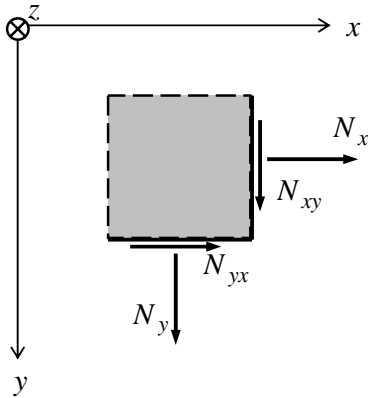
$$Q_x \Delta y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \Delta y \Rightarrow Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz.$$

Vastaavalla tavalla voidaan määrittellä y-akselia vastaan kohtisuoraan pintaan liittyvät jännitysresultantit N_y , M_y , N_{yx} , M_{yx} ja Q_y .

Laatan normaalivoimien N_x ja N_y (per pituusyksikkö) ja leikkausvoimien N_{xy} ja N_{yx} (per pituusyksikkö) määrittelykaavat ovat siis

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz. \quad (2.5)$$

Niitä on havainnollistettu kuvassa 2.5.



Kuva 2.5: Kalvovoimat, jotka häviävät tavanomaisessa lineaarisessa laattateoriassa.

Niitä on havainnollistettu kuvassa 2.5. Nämä jännitysresultantit, ns. **kalvovoimat** aiheutuvat laatan tason suuntaisista voimista. Jos laattaaan ei kohdistu sen tason suuntaisia kuormia ja jos se on tuettu siten, että se laatan tason suuntaiset muodonmuutokset pääsevät vapaasti tapahtumaan, nämä kalvovoimat häviävät, ts.

$$N_x = N_y = N_{xy} = N_{yx} = 0. \quad (2.6)$$

Tämä on tavanomainen lineaarisessa laattateoriassa tehtävä oletus. Se ei kuitenkaan ole voimassa ns. **levyissä**, joilla ymmärretään levymäisiä rakenteita, joita kuormittaa pelkästään levyn keskitasossa vaikuttava sen suuntainen kuormitus. Oletus ei myöskään ole voimassa runsaasti taipuvissa laatoissa (vrt. alussa esitetyn luokittelun kohta 3) ja ns. levykuorissa, jotka ovat levymäisistä osista koostuvia avaruusrakenteita. Seuraavassa rajoitutaan tavanomaiseen lineaariseen laattateoriaan, jossa ehdot (2.6) ovat voimassa.

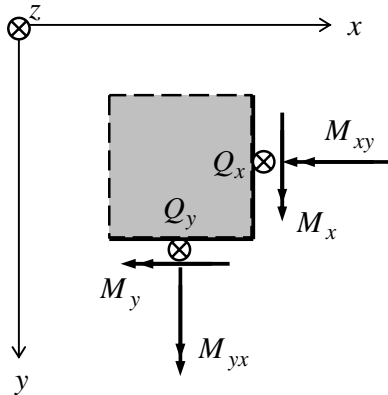
Laatan **taivutusmomenttien** M_x , M_y (per pituusyksikkö) ja **vääntömomenttien** M_{xy} , M_{yx} (per pituusyksikkö) määrittelykaavat ovat

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz \quad (2.7)$$

ja **leikkausvoimien** Q_x ja Q_y (per pituusyksikkö) määrittelykaavat ovat

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (2.8)$$

Niitä on havainnollistettu kuvassa 2.6.



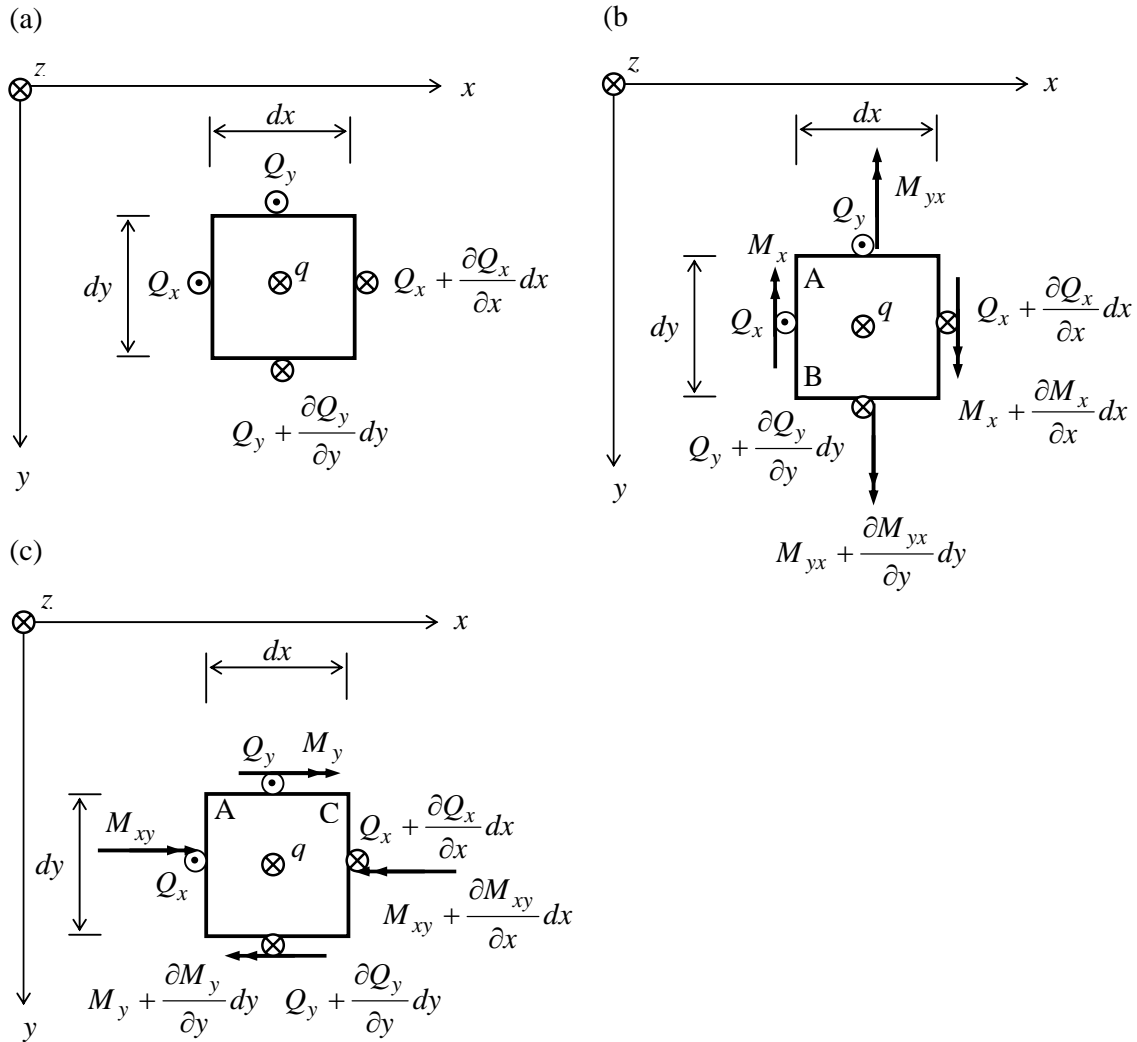
Kuva 2.6: Laatan jännitysresultantit

Laatan taivutusmomenttien dimensio on siis momentti per pituus (eli voima) ja leikkausvoimien dimensio on voima per pituus.

Laatan jännitysresultanttien positiiviset suunnat pinnoilla, joiden (ulkoisten) **normaalien suunnat yhtyvät koordinaattiakselien positiivisiin suuntiin**, selviävät kuvasta 2.6. Taivutusmomentti M_x (M_y) on positiivinen, kun sitä vastaava normaalijännitys σ_x (σ_y) on laatan alapinnalla (= positiivinen pinta) vetoa. Vääntömomentti M_{xy} (M_{yx}) on positiivinen, kun sitä vastaava leikkausjännitys τ_{xy} (τ_{yx}) on laatan alapinnalla y-akselin (x -akselin) positiiviseen suuntaan. Laatan leikkausvoimat Q_x ja Q_y ovat positiivisia alaspäin (positiiviseen suuntaan). Laatan jännitysresultanttien positiiviset suunnat pinnoilla, joiden (ulkoisten) **normaalien suunnat yhtyvät koordinaattiakselien negatiivisiin suuntiin**, ovat päinvastaiset. Niitä ei ole esitetty kuvassa 2.6.

2.4 Laatan jännitysresultanttien tasapainoyhtälöt

Seuraavassa tarkastellaan differentiaalisen suorakaiteen muotoisen laatan osan (kuva 2.7) tasapainoa:



Kuva 2.7: Laatan tasapainoehdot

Muodostetaan ensiksi alkion voimatasapainoyhtälö z -akselin suunnassa. Kuvan 2.7a perusteella saadaan

$$-Q_x dy + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy - Q_y dx + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx + q dx dy = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q) dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0} \quad (2.9)$$

Muodostetaan toiseksi alkion momenttitasapaino y -akselin suuntaisen akselin AB ympäri. Kuvan 2.7b perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
 & -M_x dy + (M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx) dy - M_{yx} dx + (M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy) dx \\
 & -(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy \cdot dx - q dx dy \cdot \frac{dx}{2} = 0 \\
 \Rightarrow & (\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \overset{\approx 0}{dx} - q \cdot \overset{\approx 0}{\frac{dx}{2}}) dx dy = 0 \\
 \Rightarrow & \boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0} \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Muodostetaan kolmanneksi alkion momenttitasapaino x -akselin suuntaisen akselin AC ympäri. Kuvan 2.7c perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
 & M_y dx - (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy) dx + M_{xy} dy - (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx) dy \\
 & +(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dx \cdot dy + q dx dy \cdot \frac{dy}{2} = 0 \\
 \Rightarrow & (-\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \overset{\approx 0}{dy} + q \cdot \overset{\approx 0}{\frac{dy}{2}}) dx dy = 0 \\
 \Rightarrow & \boxed{\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0} \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

Yhtälöt (2.9)-(2.11) ovat laatan tasapainoyhtälöt. Ratkaisemalla leikkausvoimat Q_x ja Q_y yhtälöistä (2.10) ja (2.11) ja sijoittamalla ne yhtälöön (2.9) saadaan

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0} \tag{2.12}$$

Tämä on laatan momenttien tasapainoyhtälö. Tässä yhtälössä on kolme tuntematonta taivutusmomentit M_x ja M_y sekä vääntömomentti M_{xy} . Tasapainoyhtälö (2.12) ei siis sellaisenaan riitä laattaprobleeman ratkaisemiseen. Voimme tämän vuoksi todeta, että laattaprobleema on täten aina staattisesti määräämätön.

2.5 Jännitysresultanttien ja laatan keskipinnan muodonmuutosten yhteydet

Tarkastellaan **homogeenisesta, isotrooppisesta materiaalista** tehtyä laattaa, jota kuormittaa pelkkä **mekaaninen kuormitus**. Hooken lain mukaan laatan muodonmuutosten ja jännitysten välillä ovat voimassa (mm.) seuraavat yhteydet

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}.$$

Laattateorian otaksunan $\sigma_z = 0$ perusteella saavat nämä yhtälöt muodon

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}.$$

Nämä yhtälöt lausuvat laatan yleisen pisteen muodonmuutokset ε_x , ε_y ja γ_{xy} jännitysten σ_x , σ_y ja τ_{xy} avulla. Ratkaisemalla niistä jännitykset muodonmuutosten avulla saadaan

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}.$$

Käyttämällä yhteyksiä (2.3) saadaan näistä

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y), \quad \sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2}(\kappa_y + \nu\kappa_x), \quad \tau_{xy} = \frac{Ez}{(1+\nu)}\kappa_{xy}. \quad (2.13)$$

Sijoittamalla nämä jännitysten lausekkeet ensin normaalivoimien N_x ja N_y sekä leikkausvoiman N_{xy} lausekkeisiin (2.5) saadaan

$$N_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y) \int_{-h/2}^0 z dz = 0, \quad N_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_y + \nu\kappa_x) \int_{-h/2}^0 z dz = 0, \quad N_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \int_{-h/2}^0 z dz = 0.$$

Näin vahvistettiin yhtälössä (2.6) esitetty väite. Sijoittamalla jännitykset (2.13) sitten taivutusmomenttien M_x ja M_y sekä vääntömomentin M_{xy} lausekkeisiin (2.7) saadaan

$$M_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\kappa_y) \int_{-h/2}^{\overbrace{h^3/12}^{h/2}} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_x + \nu\kappa_y),$$

$$M_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_y + \nu\kappa_x) \int_{-h/2}^{\overbrace{h^3/12}^{h/2}} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_y + \nu\kappa_x),$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{E}{1+\nu}\kappa_{xy} \int_{-h/2}^{\overbrace{h^3/12}^{h/2}} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\kappa_{xy}.$$

eli

$$\begin{cases} M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y), \\ M_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x), \\ M_{xy} = D(1-\nu)\kappa_{xy}, \end{cases} \quad (2.14)$$

missä

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2.15)$$

Lausekkeet (2.14) ovat laatan **taivutusmomenttien ja vääntömomentin sekä käyritymien ja vääntymän yhteydet**. Suuretta D kutsutaan **laatan taivutusjäykkyydeksi**. Yhteydet (2.14) esitetään usein myös matriisimuodossa seuraavasti

$$\{M\} = [D]\{\kappa\}, \quad (2.16)$$

missä

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad [D] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

$\{M\}$ on taivutusmomenttien ja vääntömomentin muodostama pystyvektori, $\{\kappa\}$ on käyritymien ja vääntymän muodostama pystyvektori ja $[D]$ on ao. matriisi. (Seikka, että pystyvektorissa κ viimeisenä alkiona on termi $2\kappa_{xy}$ termin κ_{xy} sijasta, johtuu siitä, että pystyvektorit $\{M\}$ ja $\{\kappa\}$ on haluttu valita sellaisiksi, että laatan muodonmuutostyöllä pintayksikköä kohti U_0 on yksinkertainen lauseke $U_0 = 1/2\{\kappa\}^T\{M\}$.)

2.6 Jännitysresultanttien ja taipuman yhteydet

Sijoittamalla käyritymien ja vääntymän lausekkeet (2.4) momenttien lausekkeisiin (2.14) saadaan

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ratkaisemalla tasapainoyhtälöistä (2.10) ja (2.11) leikkausvoimat ja sijoittamalla niihin momenttien lausekkeet (2.18) saadaan

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \right] = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w), \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w), \end{aligned} \quad (2.19)$$

missä on käytetty operaattoria

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.20)$$

2.7 Laatan taipuman differentiaaliyhtälö

Sijoittamalla leikkausvoimien ja taipuman yhteydet (2.19) tasapainoyhtälöön (2.9) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) \right] + q &= 0 \Rightarrow -D \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Delta w) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\Delta w) \right] + q = 0 \\ \Rightarrow -D \Delta (\Delta w) + q &= 0 \Rightarrow -D \Delta^2 w + q = 0. \end{aligned}$$

Saatiin siis

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}, \text{ alueessa } A \quad (2.21a)$$

eli

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \text{ alueessa } A. \quad (2.21b)$$

Tämä on **homogeenisen, isotrooppisen laatan taipuman differentiaaliyhtälö**.

2.8 Jännitysten ja jännitysresultanttien yhteydet

Yhteyksistä (2.14) ja (2.15) seuraa

$$\begin{aligned} \kappa_x + \nu \kappa_y &= \frac{M_x}{D} = \frac{12 M_x}{h^3} \frac{1 - \nu^2}{E}, \\ \kappa_y + \nu \kappa_x &= \frac{M_y}{D} = \frac{12 M_y}{h^3} \frac{1 - \nu^2}{E}, \\ \kappa_{xy} &= \frac{M_{xy}}{D(1 - \nu)} = \frac{12 M_{xy}}{h^3} \frac{1 + \nu}{E}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä normaalijännitysten σ_x ja σ_y sekä leikkausjännityksen τ_{xy} lausekkeisiin (2.13) saadaan

$$\sigma_x = \frac{12 M_x}{h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{12 M_y}{h^3} z, \quad \tau_{xy} = \frac{12 M_{xy}}{h^3} z. \quad (2.22)$$

Nämä ovat homogeenisen, isotrooppisen laatan **jännitysten** σ_x , σ_y ja τ_{xy} **lausekkeet** vastaavien **jännitysresultanttien** M_x , M_y ja M_{xy} **avulla lausuttuina**.

Leikkausjännitysten τ_{xz} ja τ_{yz} sekä leikkausvoimien Q_x ja Q_y yhteyksien määrittämiseksi joudumme soveltamaan kolmidimensioisen kappaleen x -akselin suuntaista tasapainoyhtälöä, joka kuuluu

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

Laattateoriassa tilavuusvoiman f_x otaksutaan häviävän, joten ylläolevasta yhtälöstä seuraa

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

ja yhtälöiden (2.22) ja (2.10) perusteella edelleen

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{12}{h^3} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) z = -\frac{12Q_x}{h^3} z.$$

Integroimalla saadaan tästä

$$\tau_{xz} = -\frac{6Q_x}{h^3} z^2 + f(x, y)$$

Koska laatan ylä- ja alapinnalla ei ole ulkoista, laatan pinnan suuntaista, jakautunutta kuormitusta, saadaan ehto $\tau_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0$. Tästä reunaehdosta seuraa

$$f(x, y) = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h},$$

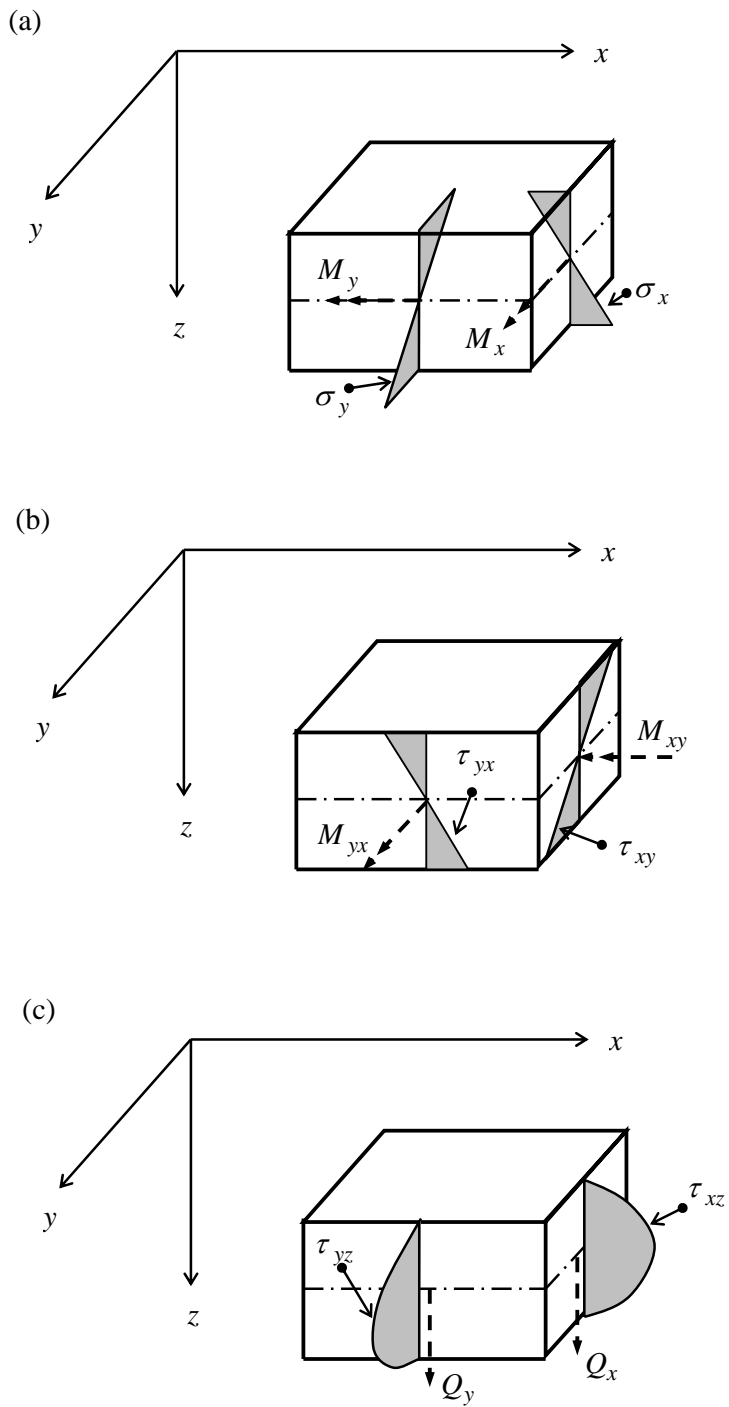
joten leikkausjännitykselle τ_{xz} saadaan tulos

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right].$$

Vastaavalla tarkastelulla saadaan tulos myös leikkausjännitykselle τ_{yz} ja leikkausjännitysten τ_{xz} ja τ_{yz} sekä leikkausvoimien Q_x ja Q_y yhteydet lopullisessa muodossaan ovat näin

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], \\ \tau_{yz} &= \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]. \end{aligned}} \quad (2.23)$$

Kuvassa 2.8 on pyritty havainnollistamaan laatan jännityskomponenttien ja jännitysresultanttien välisiä yhteyksiä kaavojen (2.22) ja (2.23) pohjalta. Normaalijännitykset σ_x ja σ_y sekä laatan keskitason suuntaiset leikkausjännitykset τ_{xy} ja τ_{yx} jakautuvat lineaarisesti laatan paksuuden yli (vrt. kuvat 2.8 (a) ja (b)). Laatan keskitasoa vastaan kohtisuorat leikkausjännitykset τ_{xz} ja τ_{yz} sensijaan jakautuvat parabolisesti siten, että ne laatan ala- ja yläpinnalla häviävät.



Kuva 2.8: Laatan jännityskomponentit ja jännitysresultantit

Tarkastellaan lopuksi analogiaa palkin ja laatan jännitysjakautuminen välillä. Ajatellaan ykkösen levyistä laattakaistaletta palkkina (kuva 2.9a). Palkin normaalijännityksen $\sigma = \sigma_x$ lauseke kuvan merkinnöin on

$$\sigma_x = \frac{Mz}{I}.$$

Nyt on $M = M_x \cdot 1 = M_x$, $I = 1 \cdot h^3 / 12 = h^3 / 12$, joten saadaan

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z,$$

mikä on juuri laatan normaalijännityksen lauseke (2.22a). Palkin leikkausjännityksen $\tau = \tau_{xz}$ lauseke on

$$\tau_{xz} = \frac{QS}{Ib}.$$

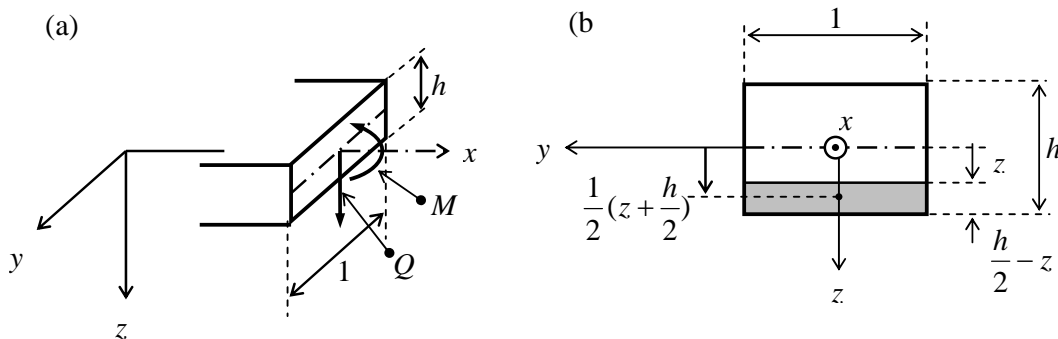
Nyt on $b = 1$, $Q = Q_x \cdot 1 = Q_x$ ja kuvan 2.9b perusteella

$$S = 1 \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right) \cdot \frac{\frac{h}{2} + z}{2} = \frac{h^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right],$$

joten saadaan

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x \cdot \frac{h^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]}{\frac{h^3}{12} \cdot 1} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right],$$

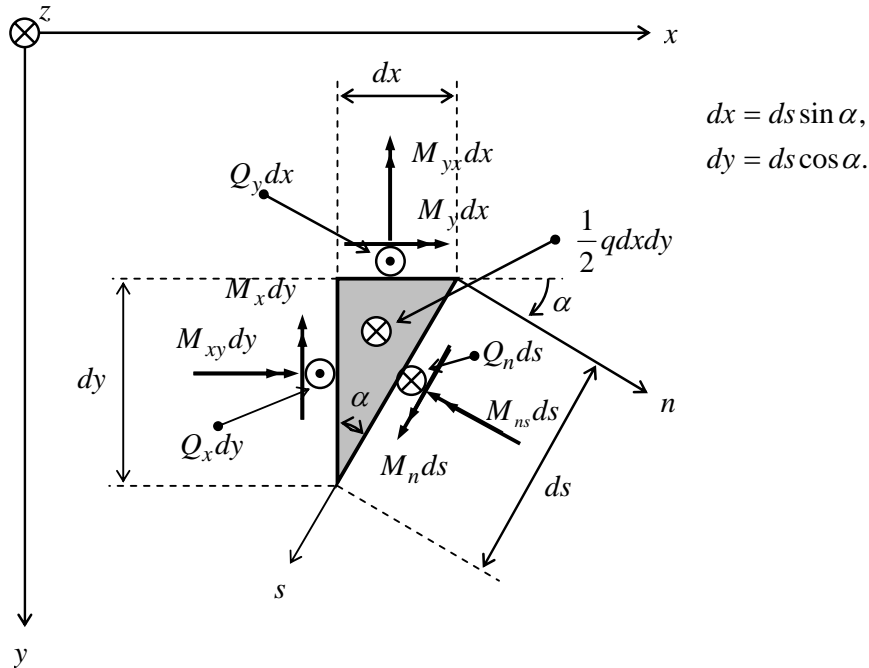
mikä on juuri laatan leikkausjännityksen lauseke (2.23a).



Kuva 2.9: Ykkösen levyinen laattakaista palkkina

2.9 Laatan jännitysresultantit koordinaatiston kierrossa

Tarkastellaan laatan leikkauspintaa, jonka normaali muodostaa kulman α x -akselin suhteen ja johon on liitetty suorakulmainen n, s -koordinaatisto kuvan 2.10 mukaisesti. Määritetään pinnan jännitysresultantit Q_n , M_n ja M_{ns} .



Kuva 2.10: Kolmiomainen laatta-alkio ja siihen vaikuttavat jännitysresultantit.

Tarkastellaan kuvan 2.10 kolmiomaista laatta-alkiota. Muodostamalla alkion z -akselin suuntainen tasapainoehto saadaan

$$Q_n ds - Q_x dy - Q_y dx - \frac{1}{2} \overbrace{q dx dy}^{\approx 0} = 0 \Rightarrow (Q_n - Q_x \cos \alpha - Q_y \sin \alpha) ds = 0$$

$$\Rightarrow Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha.$$

Muodostamalla momenttitasapainoyhtälö alkion vinoon reunaan yhtyvän akselin suhteen saadaan

$$M_n ds - M_x dy \cos \alpha - M_y dx \sin \alpha - M_{xy} dy \sin \alpha - M_{yx} dx \cos \alpha$$

$$- \overbrace{Q_x dy}^{\approx 0} \cdot \frac{dy}{2} \sin \alpha - \overbrace{Q_y dx}^{\approx 0} \cdot \frac{dx}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \overbrace{q dx dy}^{\approx 0} \cdot \frac{dx}{3} \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow (M_n - M_x \cos^2 \alpha - M_y \sin^2 \alpha - 2 M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) ds = 0,$$

$$\Rightarrow M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2 M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Muodostamalla vastaavasti momenttitasapainoyhtälö normaalin suuntaisen akselin suhteen saataisiin

$$M_{ns} = (M_y - M_x) \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Saadut tulokset koottuna ovat näin: **Leikkausvoiman yhtälö:**

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha. \quad (2.24)$$

Taivutusmomentin ja vääntömomentin yhtälöt:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ M_{ns} &= (M_y - M_x) \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.10 Laatan päämomentit ja pääsuunnat

Kaavan (2.25) havaitaan olevan analoginen tasojännitystilän jännityskomponenttien lausekkeiden

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \quad (2.26)$$

kanssa. Tässä analogiassa on seuraavat vastaavuudet $\sigma_n \hat{=} M_n$, $\tau_{ns} \hat{=} M_{ns}$, $\sigma_x \hat{=} M_x$, $\sigma_y \hat{=} M_y$ ja $\tau_{xy} \hat{=} M_{xy}$. Tämän analogian perusteella voidaan ottaa suoraan käyttöön seuraavia tuloksia. Laatan **päämomenteille** saadaan kaavat

$$\left. \begin{array}{l} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} \quad (2.27)$$

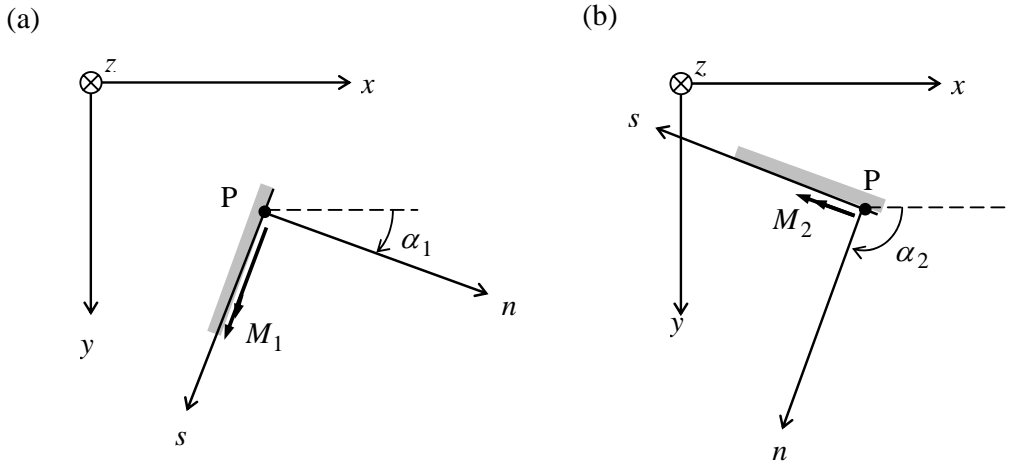
ja **pääsuunnille** kaavat

$$\alpha_i = \arctan \frac{M_x - M_i}{M_{xy}}, \quad (i = 1, 2), \quad (2.28)$$

(vrt. kuva 2.11). Päämomentti M_1 on suurin ja päämomentti M_2 on pienin taivutusmomentti tarkasteltavassa laatan pisteessä P, ts.

$$M_{n,\max} = M_1, \quad M_{n,\min} = M_2. \quad (2.29)$$

Analogian pohjalta tiedämme myös, että **päämomenteja vastaavilla pinnoilla vääntömomentti M_{ns} häviää.**



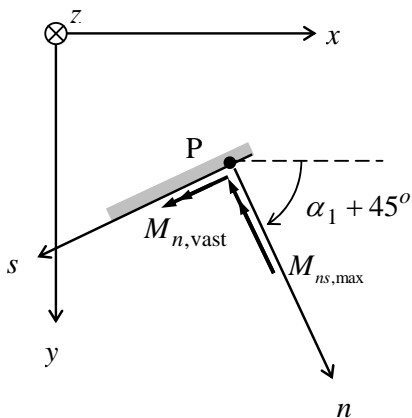
Kuva 2.11: Laatan päämomentit.

2.11 Laatan suurin vääntömomentti ja vastaava taivutusmomentti.

Samaan analogiaan perustuen saadaan **suurimmalle vääntömomentille** $M_{ns,max}$ ja sitä **vastaavalle taivutusmomentille** $M_{n,vast}$ kaavat

$$M_{ns,max} = \frac{M_1 - M_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad M_{n,vast} = \frac{M_1 + M_2}{2} = \frac{M_x + M_y}{2}. \quad (2.30)$$

Ao. pintojen normaalien suunnat muodostavat 45° kulman pääsuuntien kanssa, vrt. kuva 2.12.



Kuva 2.12: Laatan suurin vääntömomentti

3. Laatan yhtälöt sylinterikoordinaatistossa

3.1 Laatan siirtymäotaksuma sylinterikoordinaatistossa

Sylinterikoordinaatistossa r, ϕ, z laatan siirtymäotaksuma (2.1) saa muodon

$$\boxed{u(r, \phi, z) = -z \frac{\partial w(r, \phi)}{\partial r}, \quad v(r, \phi, z) = -z \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \phi)}{\partial \phi}, \quad w(r, \phi, z) = w(r, \phi),} \quad (3.1)$$

missä säteen (r), tangentin (ϕ) ja laatan paksuuden (z) suuntaisille siirtymäkomponenteille käytetään symboleja u, v, w ja $w(r, \phi)$ on taipuma.

3.2 Laatan muodonmuutokset sylinterikoordinaatistossa

Kontinuumimekaniikan kurssissa johdettiin kiinteän aineen muodonmuutosten ja siirtymien yhteydet sylinterikoordinaatistossa ja ne kuuluvat

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{r\phi} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v}{r}, \quad \gamma_{\phi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sijoittamalla siirtymien lausekkeet (3.1) näihin saadaan nolasta eroaville muodonmuutoskomponenteille tulokset

$$\boxed{\varepsilon_r = z\kappa_r, \quad \varepsilon_\phi = z\kappa_\phi, \quad \gamma_{r\phi} = 2z\kappa_{r\phi},} \quad (3.3)$$

missä

$$\boxed{\kappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \kappa_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}, \quad \kappa_{r\phi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right).} \quad (3.4)$$

3.3 Laatan jännitysresultantit sylinterikoordinaatistossa

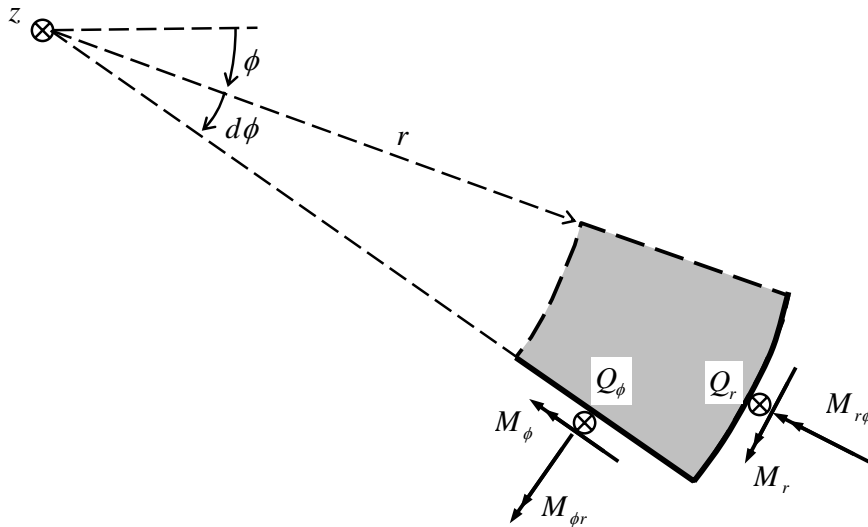
Laatan jännitysresultantit sylinterikoordinaatistossa määritellään vastaavaan tapaan kuin karteesisessa koordinaatistossa. Laatan **taivutusmomenttien** M_r, M_ϕ (per pituusyksikkö) ja **vääntömomenttien** $M_{r\phi}, M_{\phi r}$ (per pituusyksikkö) määrittelykaavat ovat

$$\boxed{M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz, \quad M_\phi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\phi z dz, \quad M_{r\phi} = M_{\phi r} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\phi} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\phi r} z dz} \quad (3.5)$$

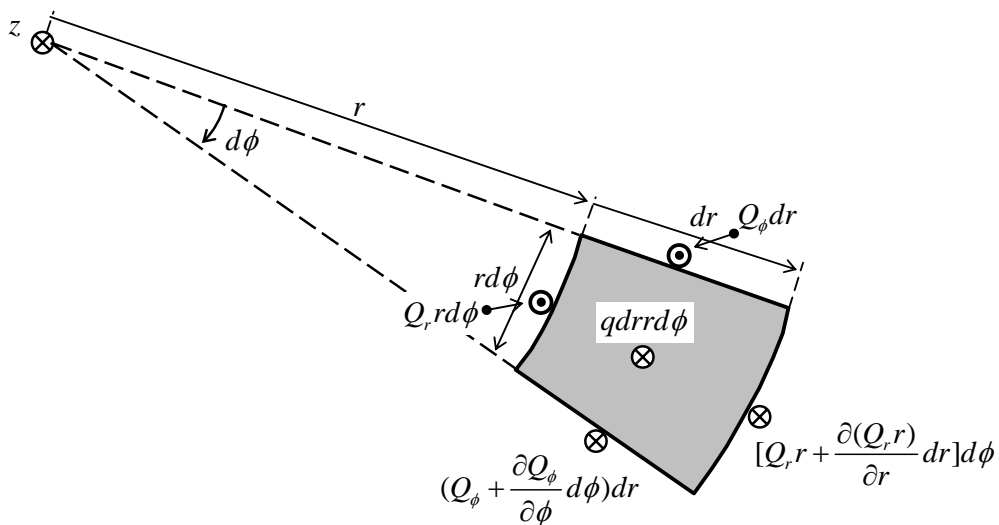
ja **leikkausvoimien** Q_r ja Q_ϕ (per pituusyksikkö) määrittelykaavat ovat

$$Q_r = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz, \quad Q_\phi = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\phi z} dz. \quad (3.6)$$

Niitä on havainnollistettu kuvassa 3.1.



Kuva 3.1: Laatan jännitysresultantit sylinterikoordinaatistossa.



Kuva 3.2: Laatta-alkioon vaikuttavat z -akselin suuntaiset voimat sylinterikoordinaatistossa.

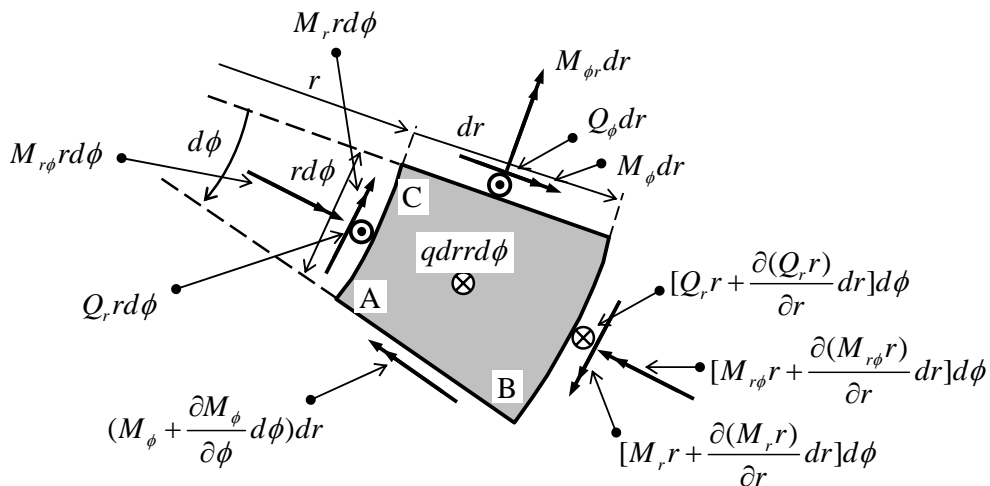
3.4 Laatan tasapainoyhtälöt sylinterikoordinaatistossa

Seuraavaksi muodostetaan tasapainoyhtälöt. Kuvan 3.2 perusteella saadaan laatta-alkion z -akselin suuntaiseksi voimatasapainoyhtälöksi

$$[Q_{r,r} + \frac{\partial(Q_r r)}{\partial r} dr]d\phi - Q_r rd\phi + (Q_\phi + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} d\phi)dr - Q_\phi dr - qdrrd\phi = 0 \quad (3.7)$$

josta seuraa edelleen

$$[\frac{\partial(Q_r r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + qr]drd\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial(Q_r r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + qr = 0. \quad (3.8)$$



Kuva 3.3: Laatta-alkioon vaikuttavat voimat ja momentit sylinterikoordinaatistossa, jotka aiheuttavat momenttia pisteiden A ja B kautta kulkevan akselin suhteen.

Kuvan 3.3 perusteella saadaan laatta-alkion momenttitasapainoyhtälöksi pisteiden A ja B kautta kulkevan akselin suhteen

$$\begin{aligned}
& Q_\phi dr \cdot rd\phi - [Q_r r + \frac{\partial(Q_r r)}{\partial r} dr] d\phi \cdot \frac{rd\phi}{2} + Q_r rd\phi \cdot \frac{rd\phi}{2} - qdr rd\phi \cdot \frac{rd\phi}{2} \\
& + M_\phi dr \cdot \overbrace{\cos(d\phi)}^{\approx 1} - (M_\phi + \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} d\phi) dr - M_{\phi r} dr \cdot \overbrace{\sin(d\phi)}^{\approx d\phi} \\
& + M_{r\phi} rd\phi \cdot \overbrace{\cos \frac{d\phi}{2}}^{\approx 1} - [M_{r\phi} r + \frac{\partial(M_{r\phi} r)}{\partial r} dr] d\phi \cdot \overbrace{\cos \frac{d\phi}{2}}^{\approx 1} \\
& - M_r rd\phi \cdot \overbrace{\sin \frac{d\phi}{2}}^{\approx d\phi/2} + [M_r r + \frac{\partial(M_r r)}{\partial r} dr] d\phi \cdot \overbrace{\sin \frac{d\phi}{2}}^{\approx d\phi/2} = 0,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

josta seuraa edelleen

$$\begin{aligned}
& [Q_\phi r - \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} - M_{\phi r} - \frac{\partial(M_{r\phi} r)}{\partial r} - \frac{\overbrace{d\phi}^{\approx 0}}{2} r \frac{\partial(Q_r r)}{\partial r} - \frac{\overbrace{d\phi}^{\approx 0}}{2} qr^2 + \frac{\overbrace{d\phi}^{\approx 0}}{2} \frac{\partial(M_r r)}{\partial r}] dr d\phi = 0 \\
& \Rightarrow \\
& [\frac{\partial(M_{r\phi} r)}{\partial r} + M_{\phi r} + \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} - Q_\phi r] dr d\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial(M_{r\phi} r)}{\partial r} + M_{\phi r} + \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} - Q_\phi r = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Vastaavaan tapaan voidaan muodostaa laatta-alkion momenttitasapainoyhtälö pisteiden A ja C kautta (kuva 3.3) kulkevan akselin suhteen. Yhdistämällä tulokset, saadaan laatan tasapainoyhtälöiksi sylinterikoordinaatistossa

$$\boxed{
\begin{aligned}
\frac{\partial(Q_r r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + qr &= 0, \\
\frac{\partial(M_r r)}{\partial r} + \frac{\partial M_{\phi r}}{\partial \phi} - M_\phi - Q_r r &= 0, \\
\frac{\partial(M_{r\phi} r)}{\partial r} + \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + M_{\phi r} - Q_\phi r &= 0.
\end{aligned}
} \tag{3.11}$$

3.5 Laatan momenttien ja keskipinnan muodonmuutosten väliset yhteydet sylinterikoordinaatistossa

Laatan momenttien M_r , M_ϕ ja $M_{r\phi}$ ja keskipinnan muodonmuutosten κ_r , κ_ϕ ja $\kappa_{r\phi}$ väliset yhteydet saadaan vastaavaan tapaan kuin karteesisessä koordinaatistossa. Niille saadaan

$$\boxed{
\begin{aligned}
M_r &= D(\kappa_r + \nu\kappa_\phi), \\
M_\phi &= D(\kappa_\phi + \nu\kappa_r), \\
M_{r\phi} (= M_{\phi r}) &= D(1-\nu)\kappa_{r\phi}.
\end{aligned}
} \tag{3.12}$$

3.6 Laatan jännitysresultanttien ja taipuman yhteydet sylinterikoordinaatistossa

Sijoittamalla näihin keskipinnan muodonmuutosten ja taipuman yhteydet (3.4), saadaan momenttien ja taipuman yhteyksiksi

$$\begin{aligned} M_r &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right)\right], \\ M_\phi &= -D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right), \\ M_{r\phi} (= M_{\phi r}) &= -D(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ratkaisemalla momenttitasapainoyhtälöistä (3.11) leikkausvoimat ja sijoittamalla niihin momenttien lausekkeet (3.13) saadaan leikkausvoimien ja taipuman yhteyksiksi

$$\begin{aligned} Q_r &= -D\frac{\partial(\Delta w)}{\partial r}, \\ Q_\phi &= -D\frac{1}{r}\frac{\partial(\Delta w)}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

missä on käytetty selkeyden vuoksi operaattoria

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.15)$$

3.7 Laatan taipuman differentiaaliyhtälö sylinterikoordinaatistossa

Sijoittamalla nämä leikkausvoimien lausekkeet z -akselin suuntaiseen tasapainoyhtälöön (3.11) saadaan

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(Dr\frac{\partial \Delta w}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial \phi}\left(D\frac{1}{r}\frac{\partial \Delta w}{\partial \phi}\right) + qr = 0 \quad (3.16)$$

Olettamalla laatta tasajäykäksi ($D = \text{vakio}$) saadaan tästä

$$D\left(\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Delta w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial \phi^2}\right) = q \quad (3.17)$$

ja edelleen

$$\boxed{D\Delta^2 w = q}, \quad (3.18)$$

missä

$$\Delta^2 w = \Delta \Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right). \quad (3.19)$$

3.8 Pyörähdyssymmetrisesti kuormitettu ympyrä- tai ympyrärengaslaatta

Tarkastellaan ympyrä- tai ympyrärengaslaattaa, joka on tuettu pyörähdyssymmetrisesti ja jota kuormittaa pyörähdyssymmetrinen kuormitus. Tämä merkitsee sitä, että kuorma q ei riipu koordinaatista ϕ ja on siis pelkästään koordinaatin r funktio ts. $q(r)$. Tässä tapauksessa myös taipuma w on pelkästään koordinaatin r funktio, ts. $w(r)$. Lausekkeelle Δw saadaan

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \quad (3.20)$$

ja lausekkeelle $\Delta^2 w$

$$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\}. \quad (3.21)$$

Laatan taipuman differentiaaliyhtälö saa siis muodon

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D}. \quad (3.22)$$

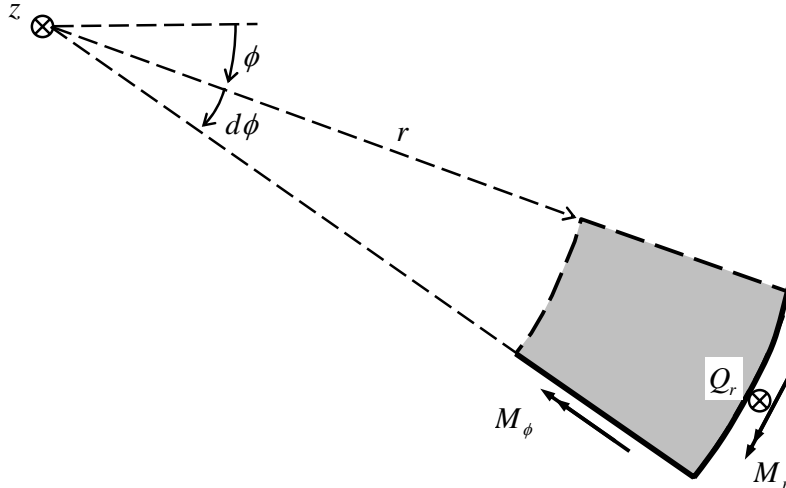
Momenttien ja leikkausvoimien lausekkeet (3.13) ja (3.14) saavat tässä pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa muodon

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_\phi &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \\ M_{r\phi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

ja

$$\begin{aligned} Q_r &= -D \frac{d(\Delta w)}{dr}, \\ Q_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Todetaan että ympyrä- tai ympyrärengaslaatalle on tässä pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa vain kolme nollasta eroavaa jännitysresultanttia: taivutusmomentit M_r ja M_ϕ sekä leikkausvoima Q_r . Niitä on havainnollistettu kuvassa 3.4.



Kuva 3.4: Ympyrä- ja ympyrärengaslaatan jännitysresultantit pyörähdyssymmetrisen kuorman tapauksessa.

Määritetään seuraavaksi taipuman differentiaaliyhtälön (3.22) ratkaisu. Se saadaan homogeenisen yhtälön ($q/D=0$) yleisen ratkaisun $w_0(r)$ ja täydellisen yhtälön sopivan yksityisratkaisun $\bar{w}(r)$ summana. Määritetään aluksi homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu. Saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} &= 0 \Rightarrow r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = c_1 \\ \Rightarrow \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] &= \frac{c_1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = c_1 \ln \frac{r}{r_0} + c_2 \\ \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) &= c_1 r \ln \frac{r}{r_0} + c_2 r \Rightarrow r \frac{dw}{dr} = c_1 \frac{r^2}{2} \left(\ln \frac{r}{r_0} - \frac{1}{2} \right) + c_2 \frac{r^2}{2} + c_3 \\ \Rightarrow \frac{dw}{dr} &= c_1 \frac{1}{2} \left(r \ln \frac{r}{r_0} - \frac{r}{2} \right) + c_2 \frac{r}{2} + \frac{c_3}{r} \Rightarrow \underline{\underline{w = c_1 \frac{r^2}{4} \left(\ln \frac{r}{r_0} - 1 \right) + c_2 \frac{r^2}{4} + c_3 \ln \frac{r}{r_0} + c_4.}} \end{aligned}$$

Logaritmi funktioiden argumentteihin sisällytettiin apuvakio r_0 , jolla on pituuden dimensio. Tämä ei vaikuta lopputulokseen, koska nähdään, että derivoimalla funktio $\ln(r/r_0) \equiv \ln r - \ln r_0$ saadaan tulokseksi $1/r$. Näin funktion $1/r$ integraalifunktiona voidaan pitää funktiota $\ln(r/r_0)$ funktion $\ln r$ sijasta. Apupituuden r_0 tarkoituksena on pitää logaritmfunktion argumentti dimensiottomana ja sille voidaan valita laskelmien kannalta tarkoituksenmukainen arvo (esimerkiksi ympyrälaatan säde tai ympyrärengaslaatan joko sisä- tai ulkosäde). Valitsemalla vielä lopulliset integrointivakiot hieman eri tavalla, ts. $C_1 = c_4$, $C_2 = (c_2 - c_1)/4$, $C_3 = c_3$ ja $C_4 = c_1$, saadaan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu muotoon

$$w_0(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln \frac{r}{r_0} + C_4 r^2 \ln \frac{r}{r_0}. \quad (3.25)$$

Täydellisen yhtälön sopiva yksityisratkaisu saadaan integroimalla täydellinen yhtälö (3.22) vastaavaan tapaan kuin edellä, mutta jättämällä integrointivakiot pois. Tarkastellaan esimerkkinä tasaisen kuorman $q = q_0$ tapausta. Saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} &= \frac{q_0}{D} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q_0}{D} r \\ \Rightarrow r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] &= \frac{1}{2} \frac{q_0}{D} r^2 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{q_0}{D} r \\ \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) &= \frac{1}{4} \frac{q_0}{D} r^2 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{4} \frac{q_0}{D} r^3 \\ \Rightarrow r \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{16} \frac{q_0}{D} r^4 \Rightarrow \frac{dw}{dr} = \frac{1}{16} \frac{q_0}{D} r^3 \Rightarrow \underline{\underline{w = \frac{1}{64} \frac{q_0}{D} r^4}}. \end{aligned}$$

Näin yksityisratkaisuksi saatiin tasaisen kuorman q_0 tapauksessa

$$\boxed{\bar{w}(r) = \frac{1}{64} \frac{q_0}{D} r^4}. \quad (3.26)$$

Yleiselle ratkaisulle $w(r) = w_0(r) + \bar{w}(r)$ saadaan lopulta

$$\boxed{w(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln \frac{r}{r_0} + C_4 r^2 \ln \frac{r}{r_0} + \bar{w}(r)}. \quad (3.27)$$

Laskelmien helpottamiseksi määritetään laatan säteen suuntaisen kiertymän $\varphi_r(r) \equiv dw/dr$, taivutusmomenttien $M_r(r)$ ja $M_\phi(r)$ sekä leikkausvoiman $Q_r(r)$ lausekkeet integroimisvakioiden ja yksityisratkaisun avulla lausuttuina. Määritetään ensin taipuman ensimmäinen ja toinen derivaatta ja funktio Δw . Saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dr} &= 2C_2 r + \frac{C_3}{r} + C_4 r \left(2 \ln \frac{r}{r_0} + 1 \right) + \frac{d\bar{w}}{dr}, \\ \frac{d^2 w}{dr^2} &= 2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + C_4 \left(2 \ln \frac{r}{r_0} + 3 \right) + \frac{d^2 \bar{w}}{dr^2}, \\ \Delta w &= \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 4C_2 + 4C_4 \left(\ln \frac{r}{r_0} + 1 \right) + \Delta \bar{w}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\varphi_r(r) &= 2C_2r + \frac{C_3}{r} + C_4r(2\ln\frac{r}{r_0} + 1) + \bar{\varphi}(r), \\
M_r(r) &= -D\{2(1+\nu)C_2 - \frac{1-\nu}{r^2}C_3 + [2(1+\nu)\ln\frac{r}{r_0} + (3+\nu)]C_4\} + \bar{M}_r(r), \\
M_\phi(r) &= -D\{2(1+\nu)C_2 + \frac{1-\nu}{r^2}C_3 + [2(1+\nu)\ln\frac{r}{r_0} + (1+3\nu)]C_4\} + \bar{M}_\phi(r), \\
Q_r(r) &= -\frac{4D}{r}C_4 + \bar{Q}_r(r),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

missä

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_r &= \frac{d\bar{w}}{dr} \\
\bar{M}_r &= -D\left(\frac{d^2\bar{w}}{dr^2} + \nu\frac{1}{r}\frac{d\bar{w}}{dr}\right), \\
\bar{M}_\phi &= -D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{w}}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial r^2}\right), \\
\bar{Q}_r &= -D\frac{d\Delta\bar{w}}{dr}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

ovat yksityisratkaisua $\bar{w}(r)$ vastaavat kiertymä, taivutusmomentit ja leikkausvoima.

Tasaisen kuorman q_0 tapauksessa nämä saavat muodon

$$\boxed{\bar{\varphi}_r = \frac{1}{16} \frac{q_0}{D} r^3, \quad \bar{M}_r = -\frac{3+\nu}{16} q_0 r^2, \quad \bar{M}_\phi = -\frac{1+3\nu}{16} q_0 r^2, \quad \bar{Q}_r = -\frac{1}{2} q_0 r.} \tag{3.31}$$

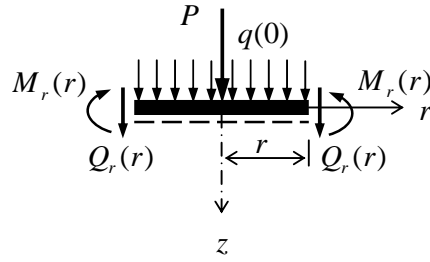
Kaavat (3.28) ja (3.29) soveltuvat sellaisenaan pyörähdysymmetrisen kuormituksen alaisen **ympyrärengaslaatan** ratkaisemiseen, jossa integrointivakiot määräytyvät reunaehdoista laatan sisä- ja ulkoreunoilla.

Kun kysymyksessä on **ympyrälaatta**, integrointivakioiden määrää voidaan etukäteen vähentää ottamalla huomioon erityiset ehdot laatan keskipisteessä. Ensimmäinen ehto aiheutuu siitä, että laatan taipuman tulee sen keskipisteessä olla äärellinen. Kaavasta (3.28) nähdään, että tämä on mahdollista vain, jos

$$C_3 = 0. \tag{3.32}$$

Toinen ehto saadaan tarkastelemalla kuvan 3.5 r -säteisen laatan osan tasapainoa r :n lähestyessä nollaa. Jakautuneen kuorman $q(r)$ lisäksi laatan keskipisteessä ajatellaan vaikuttavan pistekuorma P . Jos r on riittävän pieni ja jakautunut kuorma $q(r)$ on jatkuva, voidaan se korvata arvolla $q(0)$. Laatan osan z -akselin suuntaisesta tasapainoehdosta seuraa

$$\pi r^2 q(0) + P + 2\pi r Q_r(r) = 0 \Rightarrow r Q_r(r) = -\frac{q(0)r^2}{2} - \frac{P}{2\pi}. \tag{3.33}$$



Kuva 3.5: Ympyrälaatan r -säteiseen osaan vaikuttavat voimat.

Sijoittamalla tähän leikkausvoiman lauseke (3.29) saadaan

$$-4DC_4 + r\bar{Q}_r(r) = -\frac{q(0)r^2}{2} - \frac{P}{2\pi}. \quad (3.34)$$

Kun nyt $r \rightarrow 0$ saadaan tästä tulos

$$C_4 = \frac{P}{8\pi D}. \quad (3.35)$$

Tavallisesti siis ympyrälaatan tapauksessa integrointivakioille C_3 ja C_4 on voimassa

$$\boxed{C_3 = C_4 = 0.} \quad (3.36)$$

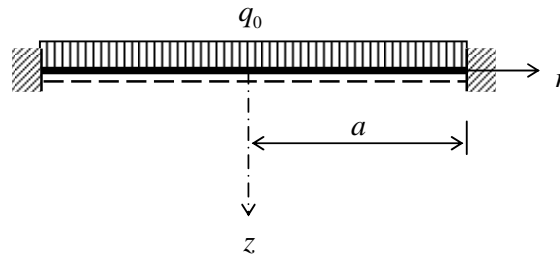
mutta, jos laatan keskipisteessä on pistekuorma P

$$\boxed{C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{P}{8\pi D}.} \quad (3.37)$$

Edellisessä tapauksessa lausekkeet (3.27) ja (3.29) saavat yksinkertaisen muodon

$$\boxed{\begin{aligned} w(r) &= C_1 + C_2 r^2 + \bar{w}(r), \\ \varphi_r(r) &= 2C_2 r + \bar{\varphi}(r), \\ M_r(r) &= -2D(1+\nu)C_2 + \bar{M}_r(r), \\ M_\phi(r) &= -2D(1+\nu)C_2 + \bar{M}_\phi(r), \\ Q_r(r) &= \bar{Q}_r(r). \end{aligned}} \quad (3.38)$$

Esimerkki 3.1: Määritetään oheisen, tasaisen kuorman q_0 kuormittaman, jäykästi kiinnitetyn ympyrälaatan taipuman ja jännitysresultanttien jakautumat.



Kuva E3.1.1: Tasaisen kuorman kuormittama jäykästi kiinnitetty ympyrälaatta.

Ratkaisu:

Yksitysratkaisu on kaavojen (3.26) ja (3.31) mukainen ja ratkaisu integrointivakioiden C_1 ja C_2 avulla lausuttuna kaavan (3.38) mukainen. Reunaehdot laatan jäykästi kiinnitetyllä reunalla ovat $w(a) = 0$ ja $\varphi_r(a) = 0$. Niistä seuraa yhtälöt

$$w(a) \equiv C_1 + C_2 a^2 + \underbrace{\frac{q_0 a^4}{64D}}_{\bar{w}(a)} = 0,$$

$$\varphi_r(a) \equiv 2C_2 a + \underbrace{\frac{q_0 a^3}{16D}}_{\bar{\varphi}_r(a)} = 0.$$

joista saadaan integrointivakioille

$$C_1 = \frac{1}{64} \frac{q_0 a^4}{D}, \quad C_2 = -\frac{1}{32} \frac{q_0 a^2}{D}.$$

Sijoittamalla nämä ja yksitysratkaisun lausekkeet (3.26) ja (3.31) lausekkeisiin (3.38) saadaan

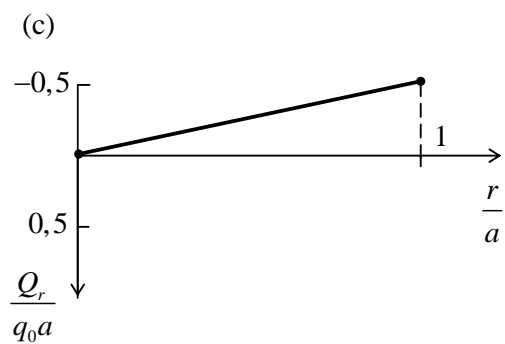
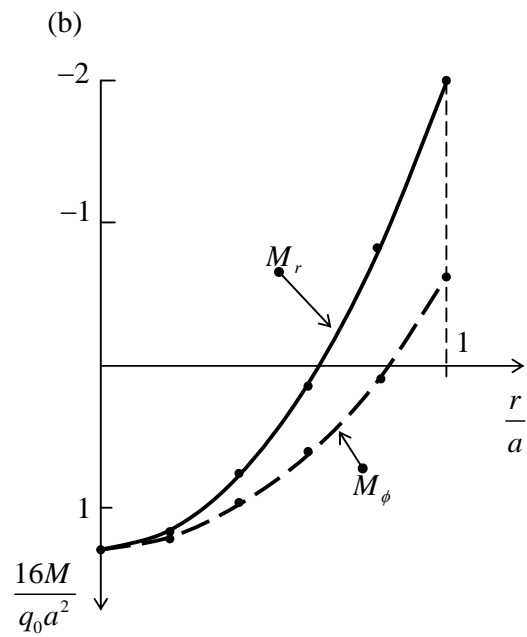
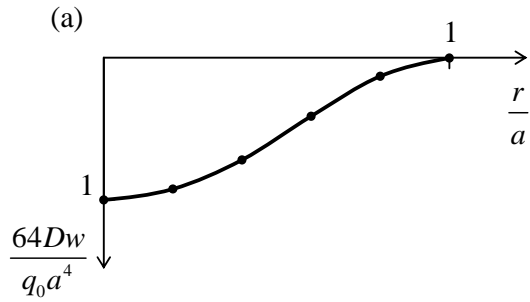
$$\begin{aligned} w(r) &= \frac{q_0 a^4}{64D} - \frac{q_0 a^2}{32D} r^2 + \frac{q_0}{64D} r^4 = \frac{q_0}{64D} (a^4 - 2a^2 r^2 + r^4) \\ &= \underline{\underline{\frac{q_0}{64D} (a^2 - r^2)^2}}, \end{aligned}$$

$$M_r(r) = -2D(1+\nu) \left(-\frac{q_0 a^2}{32D} \right) - \frac{3+\nu}{16} q_0 r^2 = \underline{\underline{\frac{q_0}{16} [(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2]}},$$

$$M_\phi(r) = -2D(1+\nu) \left(-\frac{q_0 a^2}{32D} \right) - \frac{1+3\nu}{16} q_0 r^2 = \underline{\underline{\frac{q_0}{16} [(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2]}},$$

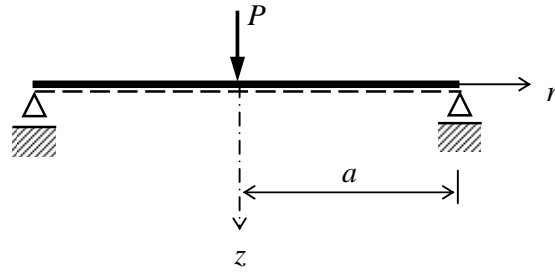
$$\underline{\underline{Q_r(r) = -\frac{1}{2} q_0 r.}}$$

Kuvassa E3.1.2 on esitetty taipuman, taivutusmomenttien ja leikkausvoiman kuvaajat, kun Poissonin vako on $\nu = 0,3$.



Kuva E3.1.2: Tasaisen kuorman kuormittaman jäykästi kiinnitetyn ympyrälaatan
(a) taipuman, (b) taivutusmomenttien ja (c) leikkausvoiman jakautumat.

Esimerkki 3.2: Määritetään oheisen, keskipisteestään pistekuorman F kuormittaman, vapaasti tuetun ympyrälaatan taipuman ja jännitysresultanttien jakautumat.



Kuva E3.2.1: Pistekuorman kuormittama vapaasti tuettu ympyrälaatta.

Ratkaisu:

Koska on kysymyksessä ympyrälaatta, jonka keskellä vaikuttaa pistekuorma, ratkaisu on kaavojen (3.27 ja (3.29) mukainen, missä

$$C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{P}{8\pi D}.$$

vrt. kaava (3.37). Koska jakautunutta kuormaa ei ole, yksityisratkaisu häviää (vrt. kaava 3.26), joten

$$\bar{w}(r) = \bar{\varphi}_r(r) = \bar{M}_r(r) = \bar{Q}_r(r) = 0.$$

Jos valitaan $r_0 = a$, ratkaisu integrointivakioiden avulla lausuttu on

$$\begin{aligned} w(r) &= C_1 + C_2 r^2 + \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln \frac{r}{a}, \\ \varphi_r(r) &= 2C_2 r + \frac{P}{8\pi D} r \left(2 \ln \frac{r}{a} + 1 \right), \\ M_r(r) &= -2D(1+\nu)C_2 - \frac{P}{8\pi} \left[2(1+\nu) \ln \frac{r}{a} + (3+\nu) \right], \\ M_\phi(r) &= -2D(1+\nu)C_2 - \frac{P}{8\pi} \left[2(1+\nu) \ln \frac{r}{a} + (1+3\nu) \right], \\ Q_r(r) &= -\frac{P}{2\pi} \frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{E.3.2.1}$$

Reunaehdot laatan vapaasti tuetulla reunalla ovat $w(a) = 0$ ja $M_r(a) = 0$. Niistä seuraa yhtälöt

$$\begin{aligned} w(a) &\equiv C_1 + C_2 a^2 = 0, \\ M_r(a) &\equiv -2D(1+\nu)C_2 - \frac{P}{8\pi} (3+\nu) = 0, \end{aligned}$$

joiden ratkaisuna saadaan integrointivakioille

$$C_1 = \frac{Pa^2}{16\pi D} \frac{3+\nu}{1+\nu}, \quad C_2 = -\frac{P}{16\pi D} \frac{3+\nu}{1+\nu}$$

Nyt saadaan taipumalle ja jännitysresultanteille tulokset

$$w(r) = \frac{Pa^2}{D} \frac{1}{16\pi} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) - 2 \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{a}{r} \right],$$

$$M_r(r) = \frac{P}{4\pi} (1+\nu) \ln \frac{a}{r},$$

$$M_\phi(r) = \frac{P}{4\pi} [1-\nu + (1+\nu) \ln \frac{a}{r}],$$

$$Q_r(r) = -\frac{P}{a} \frac{1}{2\pi} \frac{a}{r}.$$

Kuvassa E3.2.2 on esitetty taipuman, taivutusmomenttien ja leikkausvoiman kuvaajat, kun Poissonin vakio $\nu = 0,3$.

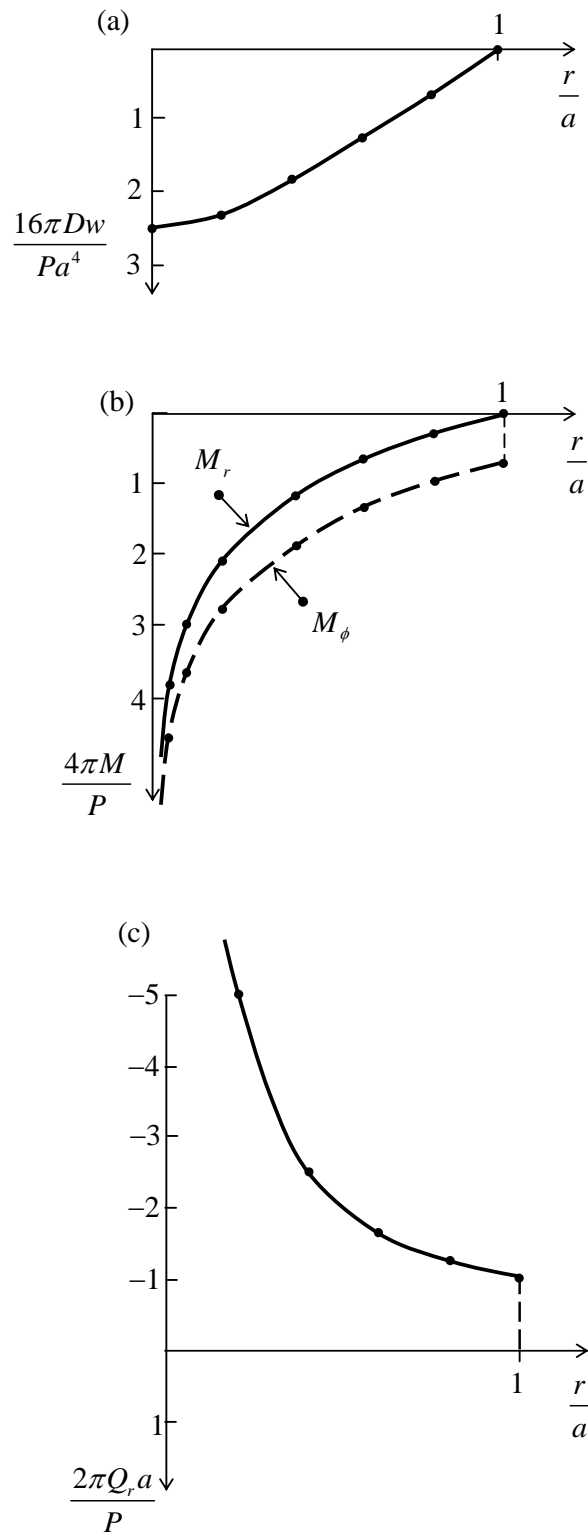
Huomautus:

Havaitaan, että lähestyttäessä pistekuorman vaikutuskohtaa, laatan taivutusmomentit ja leikkausvoima kasvavat rajatta. Sanotaan, että pistekuorman vaikutuspiste on näiden suureiden *singulaarinen piste*. Helposti nähdään, että taivutusmomenttien lausekkeet (E3.2.1) ovat samasta logaritmitermistä $-P(1+\nu)/(4\pi) \ln r$ ja vakiotermeistä, jotka riippuvat (integroimisvakion C_2 kautta) reunaehdoista. Etäisyyden r pistekuormasta lähestyessä nollaa vakiotermien osuus jää logaritmitermien rinnalla merkityksettömäksi ja taivutusmomenteille ja myös leikkausvoimalle voidaan pistekuorman ympäristössä kirjoittaa

$$M_r(r) \approx M_\phi(r) \approx -\frac{P}{4\pi} (1+\nu) \ln r, \quad Q_r(r) \approx -\frac{P}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

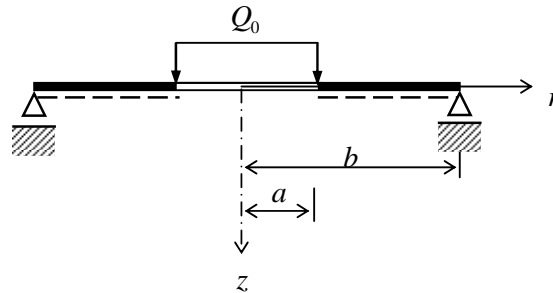
Yleisestikin laatan jännitysresultantit pistekuorman läheisyydessä muodostuvat yllä olevista termeistä, jotka kasvavat r lähestyessä nollaa rajatta, sekä reunaehdoista riippuvasta muusta osasta, joka ei kasva. Näin ollen yllä olevat jännitysresultanttien ns. *asymptoottiset lausekkeet* ovat voimassa pistekuorman läheisyydessä laatan tuennasta ja reunaehdoista riippumatta ja pistekuorman vaikutuspiste on laatan jännitysresultanttien singulaarinen piste.

Ideaalinen pistekuorma on kuitenkin aina idealisointi todellisesta kuormasta (tavallisesti kosketusvoima), joka vaikuttaa laatan (keski-)pinnan pieneen osaan. Todellinen kuorman voidaan esimerkiksi otaksua vaikuttavan ympyrän muotoisella pinnalla, jonka säde on r_0 , ja olevan tasan jakautunut intensiteetin ollessa $q_0 = P/(2\pi r_0)$. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan tällaisen kuormituksen kuormittamaa ympyrälaattaa ja tehdään joitain laatan pistekuorman käsittelyyn liittyviä lisäpäätelmiä.



Kuva E3.2.2: Pistekuorman kuormittaman vapaasti tuetun ympyrälaatan (a) taipuman, (b) taivutusmomenttien ja (c) leikkausvoiman jakautumat.

Esimerkki 3.3: Oheinen rengaslaatta on sisäreunaltaan kuormitettu tasaisella viivakuormalla Q_0 ja ulkoreunaltaan vapaasti tuettu. Määritä taipuman lauseke.



Kuva E3.3: Sisäreunaltaan tasaisen viivakuorman Q_0 kuormittama ja ulkoreunaltaan vapaasti tuettu ympyrärengaslaatta.

Ratkaisu:

Koska laattaa ei kuormita jakautunut kuorma ($q=0$) on yksityisratkaisu ja sitä vastaavat johdannaisuuret nollija ts. $\bar{w} = \bar{\varphi}_r = \bar{M}_r = \bar{M}_\phi = \bar{Q}_r = 0$. Reunaehdot laatan reunoilla ovat: $M_r(a) = 0$, $Q_r(a) = -Q_0$, $w(b) = 0$ ja $M_r(b) = 0$. Kun valitaan $r_0 = b$, niistä seuraa yhtälöt

$$M_r(a) \equiv -D\left\{2(1+\nu)C_2 - \frac{1-\nu}{a^2}C_3 + \left[2(1+\nu)\ln\frac{a}{b} + (3+\nu)\right]C_4\right\} = 0,$$

$$Q_r(a) \equiv -\frac{4D}{a}C_4 = -Q_0,$$

$$w(b) \equiv C_1 + C_2b^2 = 0,$$

$$M_r(b) \equiv -D\left[2(1+\nu)C_2 - \frac{1-\nu}{b^2}C_3 + (3+\nu)C_4\right] = 0.$$

Toisesta yhtälöstä saadaan aluksi

$$C_4 = \frac{Q_0a}{4D},$$

jonka jälkeen ensimmäinen ja neljäs yhtälö saavat muodon

$$-2(1+\nu)C_2 + \frac{1-\nu}{a^2}C_3 = \left[2(1+\nu)\ln\frac{a}{b} + (3+\nu)\right]\frac{Q_0a}{4D},$$

$$-2(1+\nu)C_2 + \frac{1-\nu}{b^2}C_3 = (3+\nu)\frac{Q_0a}{4D}.$$

Vähentämällä nämä yhtälöt puolittain saadaan

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} (1 - \nu) C_3 = 2(1 + \nu) \ln \frac{a}{b} \frac{Q_0 a}{4D} \Rightarrow C_3 = \frac{Q_0 a}{2D} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{a}{b}.$$

Saadaa edelleen

$$C_2 = \frac{1}{2b^2} \frac{1 - \nu}{1 + \nu} C_3 - \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \frac{Q_0 a}{8D} = -\frac{Q_0 a}{8D} \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{a}{b} \right)$$

ja

$$C_1 = -C_2 b^2 = \frac{Q_0 a b^2}{8D} \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{a}{b} \right).$$

Sijoittamalla saadut integrointivakioiden arvot taipuman lausekkeeseen (3.27) saadaan tulos

$$\begin{aligned} w(r) &= C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln \frac{r}{b} + C_4 r^2 \ln \frac{r}{b} \\ &= \frac{Q_0 a}{8D} \left[\left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{a}{b} \right) (b^2 - r^2) + 4 \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{a}{b} \ln \frac{r}{b} + 2r^2 \ln \frac{r}{b} \right]. \end{aligned}$$

Määritetään vielä rajatapauksena pistekuorman F kuormittaman vapaastuetun ympyrälaatan taipuman lauseke. Viivakuorman resultantti on $F = 2\pi a Q_0$, josta saadaan $Q_0 = F / 2\pi a$. Kun $a \rightarrow 0$ ympyrärengaslaatatista tulee ympyrälaatta ja viivakuormasta tulee pistekuorma jonka suuruus F . Sijoittamalla saatu Q_0 :n lauseke ylläolevaan taipuman lausekkeeseen saadaan

$$w(r) = \frac{F}{16\pi D} \left[\left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} - \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{a}{b} \right) (b^2 - r^2) + 4 \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{a}{b} \ln \frac{r}{b} + 2r^2 \ln \frac{r}{b} \right].$$

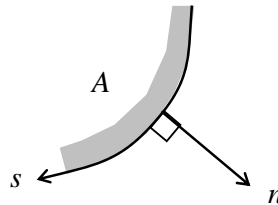
Kun nyt $a \rightarrow 0$, jolloin myös $a^2 \ln a \rightarrow 0$ (insinööri voi selvittää oheisen raja-arvon paikkansapitävyyden taskulaskimella määrittämällä lausekkeen $a^2 \ln a$ arvoja, kun a pienenee), saadaan

$$\underline{\underline{w(r) = \frac{F}{16\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (b^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{b} \right].}}$$

4. Laatan korvikeleikkausvoima ja reunaehtosuureet

Jotta voisimme käsitellä laatan reunaehtoja, joudumme määrittelemään uuden jännitysresultantin, ns. **korvikeleikkausvoiman**. Korvikeleikkausvoiman käsite liittyy esityisesti laattojen tekniseen taivutusteoriaan (Kirchhoff-laattateoriaan), jota olemme käsittelemässä. Laatan differentiaaliyhtälö on neljännen kertaluvun ns. elliptinen osittaisdifferentiaaliyhtälö. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teorian mukaan tämän tyyppisen differentiaaliyhtälön määrittelyalueen A (tarkasteltavan laatan) reunan s kussakin pisteessä tulee määritellä kaksi reunaehtoa.

Tarkastellaan laatan kaarevaa reunaa (tai leikkauspintaa). Olkoon reunaviivaan liitetty suorakulmainen n, s -koordinaatisto kuvan 4.1 mukaisesti siten, että koordinaatti n yhtyy reunan ulkoiseen normaaliin ja koordinaatin s koordinaattiviiha $n=0$ yhtyy laatan reunaan.



Kuva 4.1: Laatan reuna ja siihen liittyvä n, s -koordinaatisto.

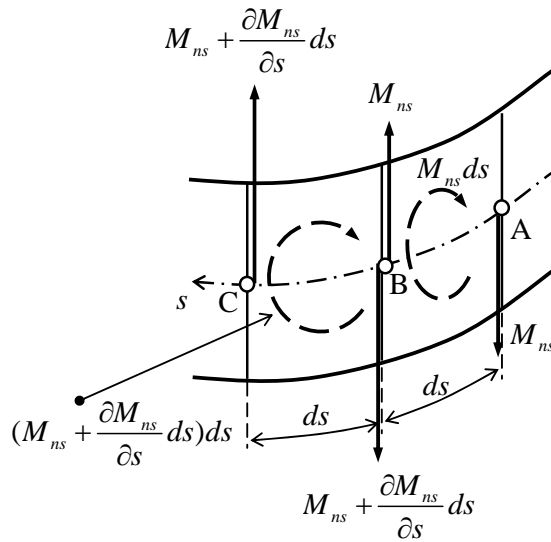
Laatan reunaan liittyy seuraavat suureet, joille voitaisiin fysikaalisin perustein antaa reunaehtoja. Siirtymäsuureet (kinemaattiset): taipuma w , kiertymä $\varphi_n \equiv \partial w / \partial n$ ja kiertymä $\varphi_s \equiv \partial w / \partial s$. Voimasuureet (kineettiset): leikkausvoima Q_n , taivutusmomentti M_n ja vääntö-momentti M_{ns} .

Koska teknisessä taivutusteoriassa reunan suuntaisen kiertymän φ_s ja taipuman w välillä on yhteys $\varphi_s = \partial w / \partial s$, eivät w ja φ_s ole toisistaan riippumattomia. Tämän vuoksi ne kaksi kinemaattista suuretta, joille on mielekästä antaa reunaehtoja ovat taipuma w ja kiertymä φ_n .

Seuraavassa tullaan myös näkemään, että ne kaksi kineettistä suuretta, joille Kirchhoff-laattateoriassa voidaan antaa reunaehtoja, osoittautuvat olevan korvikeleikkausvoima V_n ja taivutusmomentti M_n .

Kuva 4.2 esittää laatan reunaa, joka on ajateltu jaetuksi osiin AB ja BC, joiden kummankin pituus on ds . Osaan AB, jonka keskipiste ajatellaan olevan kohdassa s , vaikuttavan vääntömomentin $M_{ns}(0, s)$ resultantti on $M_{ns}(0, s)ds$ ja osaan BC, jonka keskipiste ajatellaan olevan kohdassa $s + ds$, vaikuttavan vääntömomentin $M_{ns}(0, s + ds)$ resultantti on

$$M_{ns}(0, s + ds)ds \approx [M_{ns}(0, s) + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}(0, s)ds]ds.$$



Kuva 4.2: Korvikeleikkausvoiman määrittely

Ajatellaan osaan AB vaikuttava momentti korvatuksi sen kanssa ekvivalentilla voimaparilla, joka muodostuu pisteissä A ja B sijaitsevista vastakkaisuuntaisista voimista, joiden suuruus on $M_{ns}(0, s)$. Ajatellaan vastaavasti osaan BC vaikuttava momentti korvatuksi sen kanssa ekvivalentilla voimaparilla, joka muodostuu pisteissä B ja C sijaitsevista vastakkaisuuntaisista voimista, joiden suuruus on

$$M_{ns}(0, s) + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}(0, s)ds.$$

Havaitaan, että näin syntyneiden, pisteessä B vaikuttavien voimien summa (z -akselin positiiviseen suuntaan) on

$$M_{ns}(0, s) + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}(0, s)ds - M_{ns}(0, s) = \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}(0, s)ds.$$

Laatan reunan pituutta kohti tämä voima on

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}(0, s).$$

Tämän pituutta kohti lasketun voiman lisäksi pisteessä B vaikuttaa leikkausvoima $Q_n(0, s + ds/2) \approx Q_n(0, s)$.

Määritellään nyt korvikeleikkausvoima $V_n(n, s)$ koordinaatistossa n, s kaavalla

$$\boxed{V_n(n, s) = Q_n(n, s) + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}(n, s).} \quad (4.1)$$

Edellä esitetyn perusteella todetaan, että korvikeleikkausvoiman $V_n(n, s)$ arvo

$$V_n(0, s) = Q_n(0, s) + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}(0, s)$$

laatan reunalla ($n=0$) on reunalla vaikuttavan todellisen leikkausvoiman ja vääntämömentin vaihtelusta aiheutuvan lisäleikkausvoiman summa. Korvikeleikkausvoima on siis voimasuure, jonka arvo laatan reunalla edustaa z -akselin suuntaista, reunan pituutta kohti laskettua kokonaisleikkausvoimaa.

Jos laatan reunaa ei ole taipuman w suhteen tuettu ja sillä vaikuttaa ulkoinen, z -akselin suuntainen viivakuorma $\bar{V}(s)$ (käytännössä useimmiten $\bar{V}(s)=0$), ilmaistaan sen vaikutus laataan reunaehtona $V_n(0, s) = \bar{V}(s)$. Tällöin laatan taipuma w kyseisellä reunalla on tuntematon. Jos taas laatan reuna on taipuman suhteen tuettu siten, että sillä on annettu arvo $\bar{w}(s)$ (käytännössä useimmiten $\bar{w}(s)=0$), ilmaistaan sen vaikutus laataan reunaehtona $w(0, s) = \bar{w}(s)$. Tällöin laatan korvikeleikkausvoima V_n kyseisellä reunalla on tuntematon ja se edustaa pituusyksikköä kohti laskettua voimaa, jolla tuki vaikuttaa laatan reunaan.

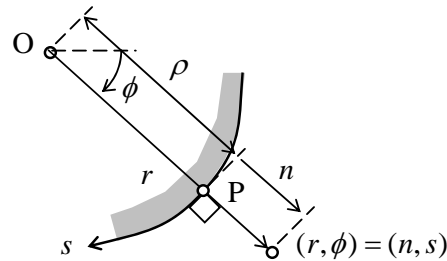
Jos laatan reunaa ei ole kiertymän φ_n suhteen tuettu ja sillä vaikuttaa ulkoinen pituutta kohti laskettu reunaviivan tangentin ympäri pyörittävä momentti $\bar{M}(s)$ (käytännössä useimmiten $\bar{M}(s)=0$), ilmaistaan sen vaikutus laataan reunaehtona $M_n(0, s) = \bar{M}(s)$. Tällöin laatan kiertymä φ_n kyseisellä reunalla on tuntematon. Jos taas laatan reuna on sen kiertymän φ_n suhteen tuettu siten, että sillä on annettu arvo $\bar{\varphi}_n(s)$ (käytännössä useimmiten $\bar{\varphi}_n(s)=0$), ilmaistaan sen vaikutus laataan reunaehtona $\varphi_n(0, s) = \bar{\varphi}_n(s)$. Tällöin laatan taivutusmomentti M_n kyseisellä reunalla on tuntematon ja se edustaa pituusyksikköä kohti laskettua momenttia, jolla tuki vaikuttaa laatan reunaan.

Kirchhoff-laatan reunaehdot formuloidaan edellä esitettyjen kahden voima- ja kahden siirtymäsuureen avulla. Niitä voidaan kutsua laatan reunaehtosuureiksi. Kuva 4.3 havainnollistaa laatan reunaehtosuureita. On tärkeätä panna merkille, että taivutusmomentin M_n ja kiertymän φ_n positiiviset suunnat eroavat toisistaan.



Kuva 4.3: Laatan reunaehtosuureet: (a) voimasuureet ja (b) siirtymäsuureet

Samalla tavalla kuin Kirchhoff-laatan taipuman differentiaaliyhtälö saatiin lausutuksi yhden tuntemattoman, taipuman w avulla lausutaan myös laatan reunaehdot taipuman avulla. Tätä varten lausumme tässä laatan reunaehtosuureet taipuman avulla. Tehtävänä on siis määrittää kiertymän φ_n , korvikeleikkausvoiman V_n ja taivutusmomentin M_n lausekkeet taipuman avulla lausuttuina. Korvikeleikkausvoiman määrittämistä varten kaavalla (4.1) tarvitsemme vielä vääntömomentin M_{ns} ja leikkausvoiman Q_n lausekkeet.



Kuva 4.4: Laatan kaarevaan reunaan liitetty napakoordinaatisto

Koska koordinaatti s on käyräviivainen, emme voi suoraan soveltaa karteesisen koordinaatiston kaavoja (2.18) ja (2.19). Voimme kuitenkin soveltaa sylinterikoordinaatiston vastaavia kaavoja (3.13) ja (3.14), kun menettelemme seuraavasti. Valitaan laatan reunan tarkasteltavaan pisteeseen P liittyen napakoordinaatisto r, ϕ siten, että sen napapiste yhtyy reunakäyrän s kaarevuuskeskipisteeseen O (kuva 4.4). Tällöin pisteen P läheisyydessä voidaan otaksua, että n, s koordinaatiston ja napakoordinaatiston koordinaattiviivat yhtyvät. Tällöin voidaan kirjoittaa yhteydet

$$r = \rho + n, \quad dr = dn, \quad rd\phi = ds, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial n}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial s},$$

missä $\rho = \rho(s)$ on reunaviivan kaarevuus säde. Kiertymälle φ_n saamme heti

$$\varphi_n = \varphi_r = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial n}.$$

Soveltamalla kaavoja (3.13)-(3.14) saadaan

$$\begin{aligned} M_n = M_r &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\nu}{\rho + \underbrace{n}_{\approx 0}} \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \\ &\approx -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{ns} = M_{r\phi} &= -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) = -D(1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \phi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \\
&= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} - \frac{1}{\rho + \underbrace{n}_{\approx 0}} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} \right), \\
Q_n = Q_r &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial n}, \\
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{1}{\rho + \underbrace{n}_{\approx 0}} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \approx \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial^2}{\partial s^2},
\end{aligned}$$

missä otaksuttiin vielä, että $n \ll \rho$. Soveltamalla vielä kaavaa (4.1) saadaan

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -D \left[\frac{\partial(\Delta w)}{\partial n} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right].$$

Näin olemme saaneet laatan reunaehtosuureille taipuman avulla lausuttuina seuraavat kaavat

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{\partial w}{\partial n}, \\
M_n &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \right], \\
V_n &= -D \left[\frac{\partial(\Delta w)}{\partial n} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.2}$$

missä operaattori Δ on nyt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}. \tag{4.3}$$

Tarkastellaan lopuksi millaiseksi korvikeleikkausvoiman lauseke muodostuu suorien ($\rho = \infty$), koordinaattiakselien suuntaisten reunojen yhteydessä. Reunalla, joka on y-akselin suuntainen ja jonka normaali on x-akselin positiiviseen suuntaan, pätee $dn = dx$ ja $ds = dy$, joten

$$\begin{aligned}
V_n &= -D \left[\frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{\underbrace{\rho}_{\infty}} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = -D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial^2 y} \right] \\
&= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial^2 y} \right].
\end{aligned}$$

Reunalla, joka on y-akselin suuntainen ja jonka normaali on x-akselin positiiviseen suuntaan, pätee $dn = -dx$ ja $ds = -dy$, joten

$$V_n = -D\left[-\frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} - (1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] = +D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + (1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial^2 y}\right]$$

$$= +D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial^2 y}\right].$$

Vastaavanlainen tarkastelu voidaan suorittaa myös x -akselin suuntaiselle reunalle. Näin saamme korvikeleikkausvoimalle koordinaattiakselien suuntaisilla reunoilla tulokset

y -akselin suuntainen reuna:	x -akselin suuntainen reuna:	
$V_n = \mp D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial^2 y}\right]$	$V_n = \mp D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]$	(4.4)

Ylempi(alempi) etumerkki vastaa reunaa, jonka ulkoinen normaali on suuntaisensa koordinaattiakselin positiiviseen(negatiiviseen) suuntaan.

Koordinaattiakselien suuntaisiin reunoihin liittyvät korvikeleikkausvoimat voidaan myös määrittellä hieman toisin, eli kaavoilla

$V_x = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial^2 y}\right],$	
$V_y = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right].$	(4.5)

Tällöin korvikeleikkausvoiman V_n ja korvikeleikkausvoimien V_x ja V_y välillä on voimassa

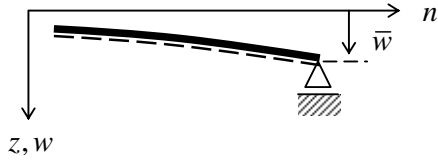
y -akselin suuntainen reuna:	x -akselin suuntainen reuna:	
$V_n = \pm V_x$	$V_n = \pm V_y$	(4.6)

Nyt $+(-)$ etumerkki vastaa reunaa, jonka ulkoinen normaali on suuntaisensa koordinaattiakselin positiiviseen(negatiiviseen) suuntaan.

5. Laatan reunaehdot

5.1 Laatan reunaehtojen yksinkertaiset perustyytit

5.1.1 Kinemaattiset reunaehdot



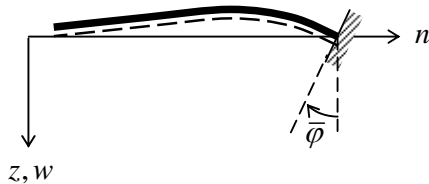
Kuva 5.1: Annetun taipuman reunaehto

(a) Annetun taipuman reunaehto

Reunaehto on

$$w = \bar{w}, \quad (4.5)$$

missä $\bar{w}(s)$ on annettu taipuma eli tuen pystysuora pakkosiirtymä. Tavallisimmin tuki on siirtymätön, jolloin $\bar{w} \equiv 0$.



Kuva 5.2: Annetun kiertymän reunaehto

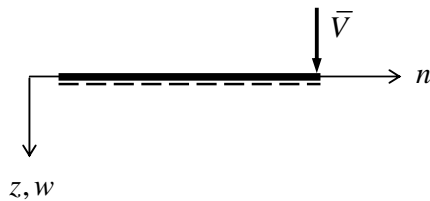
(b) Annetun kiertymän reunaehto

Reunaehto on

$$\varphi_n = \bar{\varphi}, \quad (4.6)$$

missä $\bar{\varphi}(s)$ on annettu kiertymä eli tuen pakkokiertymä. Tavallisimmin tuki on kiertymätön, jolloin $\bar{\varphi} \equiv 0$.

5.1.2 Kineettiset reunaehdot



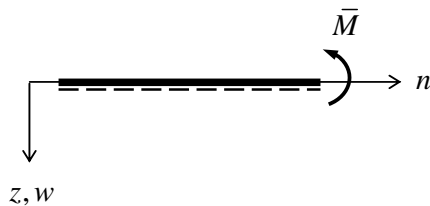
Kuva 5.3: Annetun korvikeleikkausvoiman reunaehto

(c) Annetun korvikeleikkausvoiman reunaehto

Reunaehto on

$$\boxed{V_n = \bar{V}}, \quad (4.7)$$

missä $\bar{V}(s)$ on annettu korvikeleikkausvoima eli viivakuorma laatan pystysuunnassa tukemattomalla reunalla. Tavallisimmin reunalla ei ole viivakuormaa, jolloin $\bar{V} \equiv 0$.



Kuva 5.4: Annetun taivutusmomentin reunaehto

(d) Annetun taivutusmomentin reunaehto

Reunaehto on

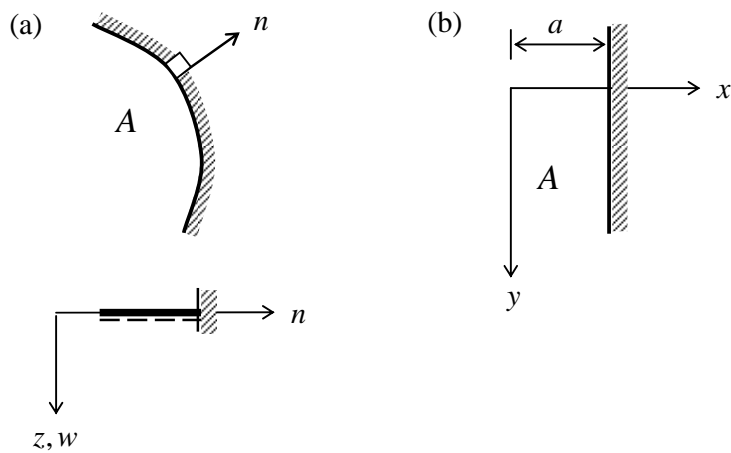
$$\boxed{M_n = \bar{M}}, \quad (4.8)$$

missä $\bar{M}(s)$ on annettu taivutusmomentti eli pituusyksikön reunamomenttikuorma laatan kiertymisen suhteen tukemattomalla reunalla. Tavallisimmin reunalla ei ole reunamomenttikuormaa, jolloin $\bar{M} \equiv 0$.

Kussakin laatan reunan pisteessä tulee olla voimassa kaksi reunaehtoita siten, että molemmat ovat kinemaattisia, molemmat ovat kineettisiä tai toinen on kinemaattinen ja toinen kineettinen. Jälkimmäisessä tapauksessa voi olla samanaikaisesti voimassa joko reunaehdot (a) ja (d) tai reunaehdot (b) ja (c).

5.2 Eräitä tavallisimpia laatan tuentatapoja

5.2.1 Jäykästi kiinnitetty reuna



Kuva 5.1: Jäykästi kiinnitetty reuna: (a) kaareva (b) y-akselin suuntainen

Reunaehdot ovat

$$\boxed{\begin{matrix} w = 0, \\ \varphi_n = 0 \end{matrix}} \quad (4.9)$$

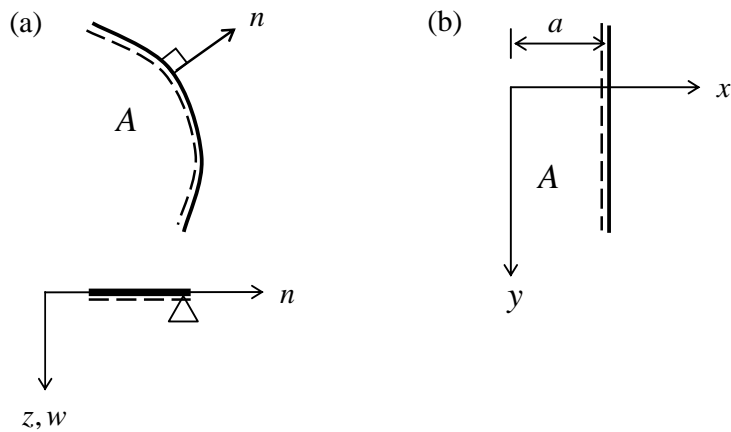
ja taipuman avulla lausuttuina

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Reunan ollessa suora ja jomman kumman koordinaattiakselin suuntainen, jäykästi kiinnitetyn laatan reunaehdot ovat

$$\boxed{\begin{array}{cc} \text{y-akselin} & \text{x-akselin} \\ \text{suuntainen:} & \text{suuntainen:} \\ \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \end{array}} \quad (4.11)$$

5.2.2 Vapaastituettu reuna



Kuva 5.2: Vapaastituettu reuna: (a) kaareva (b) y -akselin suuntainen.

Reunaehdot ovat

$$\boxed{\begin{matrix} w = 0, \\ M_n = 0. \end{matrix}} \quad (4.12)$$

Koska reunalla $w \equiv 0$, saadaan $\partial w / \partial s = 0 \Rightarrow \partial^2 w / \partial s^2 = 0$. Näin taivutusmomentin lauseke (4.2) saa muodon

$$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} \right)$$

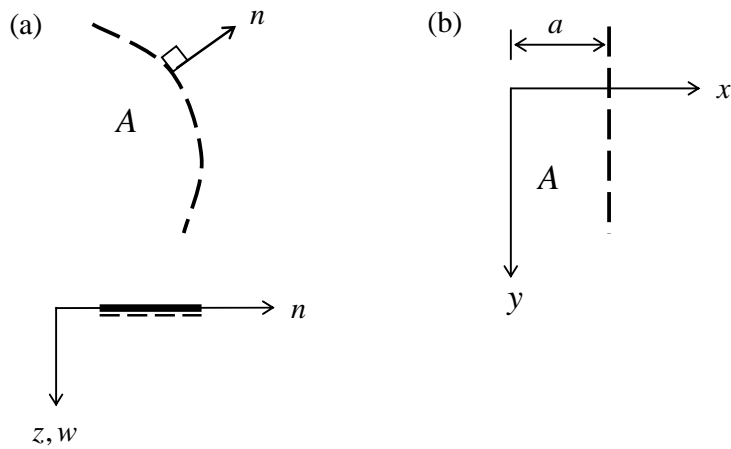
ja taipuman avulla lausuttuina vapaastituetun reunan reunaehdot ovat

$$\boxed{\begin{matrix} w = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \end{matrix}} \quad (4.13)$$

Reunan ollessa suora ($\rho = \infty$) ja koordinaattiakselin suuntainen, vapaastituetun reunaehdot saavat muodon

$$\boxed{\begin{matrix} y - \text{akselin} & x - \text{akselin} \\ \text{suuntainen:} & \text{suuntainen:} \\ \left\{ \begin{matrix} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{matrix} \right. \end{matrix}} \quad (4.14)$$

5.2.3 Vapaa reuna



Kuva 5.3: Vapaa reuna: (a) kaareva (b) y -akselin suuntainen.

Reunaehdot ovat

$$\boxed{\begin{matrix} V_n = 0, \\ M_n = 0. \end{matrix}} \quad (4.15)$$

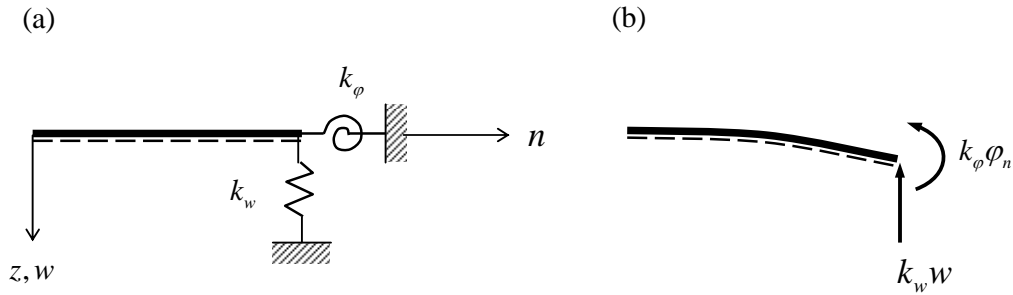
ja taipuman avulla lausuttuina

$$\boxed{\begin{matrix} \frac{\partial(\Delta w)}{\partial n} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = 0. \end{matrix}} \quad (4.16)$$

Reunan ollessa suora ($\rho = \infty$) ja jomman kumman koordinaattiakselin suuntainen vapaan reunan reunaehdot saadaan muotoon

$$\boxed{\begin{matrix} y\text{-akselin} & x\text{-akselin} \\ \text{suuntainen:} & \text{suuntainen:} \\ \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{matrix} \right. \end{matrix}} \quad (4.17)$$

5.2.4 Joustavasti kiinnitetty reuna



Kuva 5.4: Joustavasti kiinnitetty reuna: (a) jouset, (b) jousista laatan reunaan kohdistuvat voimat

Joustavasti kiinnitetty reuna (kuva 5.4) ajatellaan tuetuksi jakautuneella jousella, jonka jousivakio (pituutta kohti) on k_w , ja jakautuneella kierrejousella, jonka jousivakio (pituutta kohti) on k_φ . Reunaehdot ovat

$$\begin{cases} V_n = -k_w w, \\ M_n = k_\varphi \varphi_n. \end{cases} \quad (4.18)$$

Ilmaisemalla korvikeleikkausvoima V_n ja taivutusmomentti M_n taipuman avulla (kaavat (4.2)), saadaan reunaehtoyhtälöt lopulliseen muotoon. Yleinen tapaus on joustavasti tuettu reuna, jossa kiertyminen pääsee tapahtumaan vapaasti. Tällöin reunaehdot ovat

$$\begin{cases} V_n = -k_w w, \\ M_n = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

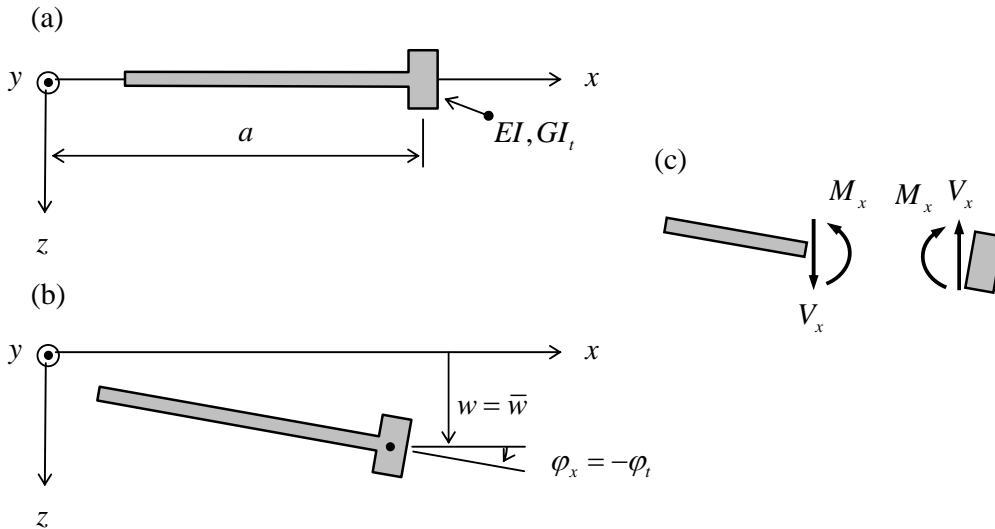
5.2.5 Reunapalkkiin kiinnitetty reuna

Tarkastellaan esimerkkinä suoraa y-akselin suuntaista reunaa, joka on kiinnitetty reunapalkkiin (kuva 5.5). Reunapalkin taipuman ja vääntökulman differentiaaliyhtälöt ovat

$$EI \frac{d^4 \bar{w}}{dy^4} - q = 0, \quad (4.20)$$

ja

$$GI_t \frac{d^2 \varphi_t}{dy^2} + m = 0, \quad (4.21)$$



Kuva 5.5: Reunapalkkiin kiinnitetty reuna: (a) poikkileikkaus, (b) deformoitunut poikkileikkaus (c) laatan reunaan ja reunapalkkiin kohdistuvat voimat.

missä $\bar{w}(y)$ ja $\varphi_t(y)$ ovat palkin taipuma ja vääntökulma, $q(y)$ ja $m(y)$ ovat sen jakautunut ulkoinen kuorma ja vääntävä momentti. Palkin taivutusjäykkyys EI ja vääntöjäykkyys GI_t on otaksuttu vakioiksi. Laatan reunan ja reunapalkin väliset yhteensopivuusehdot ovat

$$\begin{aligned} w(a, y) &= \bar{w}(y), \\ \varphi_x(a, y) &= -\varphi_t(y), \end{aligned} \tag{4.22}$$

missä $\varphi_n \equiv \varphi_x = \partial w / \partial x$ on laatan reunan normaalin suuntainen kiertymä. Kuvan 5.5c perusteella nähdään, että

$$\begin{aligned} q(y) &= -V_x(a, y), \\ m(y) &= -M_x(a, y) \end{aligned} \tag{4.23}$$

missä $V_n \equiv V_x$ ja $M_n \equiv M_x$ ovat laatan reunan korvikeleikkausvoima ja taivutusmomentti. Sijoittamalla lausekkeet (4.22) ja (4.23) reunapalkin differentiaaliyhtälöihin (4.20) ja (4.21) saadaan

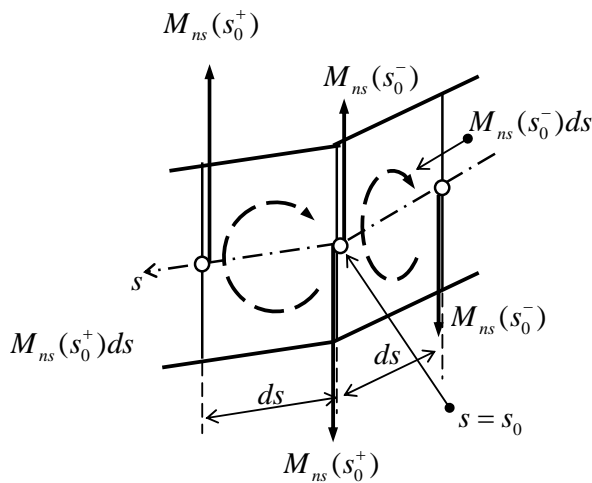
$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(a, y) + V_x(a, y) &= 0, \\ GI_t \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2}(a, y) + M_x(a, y) &= 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Nämä ovat suoran, reunapalkkiin kiinnitetyn, y -akselin suuntaisen reunan $y = a$ reuna-ehdotyhtälöt. Ilmaiseamalla vielä kiertymä φ_x , korvikeleikkausvoima V_x ja taivutusmomentti M_x taipuman avulla, saadaan reunaehdotyhtälöt lopulliseen muotoonsa.

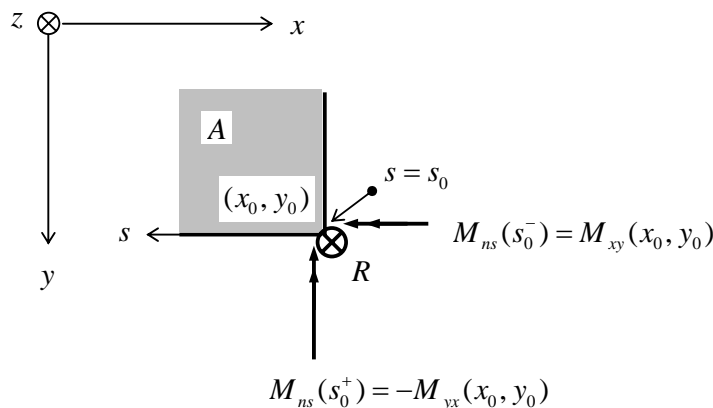
5.3 Laatan nurkkavoima

Tarkastellaan laatan sivulla kohdassa $s = s_0$ olevaa nurkkaa. Samantyyppinen tarkastelu kuin korvikeleikkausvoiman yhteydessä (kuva 5.6) johtaa tulokseen, että mikäli vääntömomentin $M_{ns}(s)$ arvossa nurkan kohdalla $s = s_0$ on hyppäys (ts. $M_{ns}(s_0^+) \neq M_{ns}(s_0^-)$) laatan nurkassa vaikuttaa pistevoima, ns. laatan nurkkavoima, jolla on arvo

$$R = M_{ns}(s_0^+) - M_{ns}(s_0^-). \quad (4.25)$$



Kuva 5.6: Laatan nurkkavoima



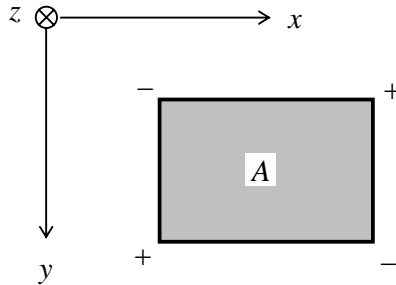
Kuva 5.7: Suorakaidelaatan nurkkavoima

Kuvan 5.7 esittämässä suorakaidelaatan nurkassa, joka sijaitsee pisteessä (x_0, y_0) , saadaan $M_{ns}(s_0^+) = -M_{yx}(x_0, y_0) = -M_{xy}(x_0, y_0)$ ja $M_{ns}(s_0^-) = M_{xy}(x_0, y_0)$, joten nurkkavoimalle saadaan $R = -2M_{xy}(x_0, y_0)$.

Suorakaidelaatan muissa nurkissa saadaan vastaavanlaiset tulokset. Suorakaidelaatan nurkkavoimille saadaan näin tulos

$$R = \mp 2M_{xy}(x_0, y_0), \quad (4.26)$$

missä ylempi etumerkki liittyy vasempaan ylänurkkaan ja oikeaan alanurkkaan sekä alempi etumerkki muihin nurkkiin (vrt. kuva 5.8).



Kuva 5.8: Etumerkit kaavassa $R = \mp 2M_{xy}(x_0, y_0)$

Kaavan (2.18) perusteella saadaan ko. nurkkavoimalle taipuman avulla lausuttuna tulos

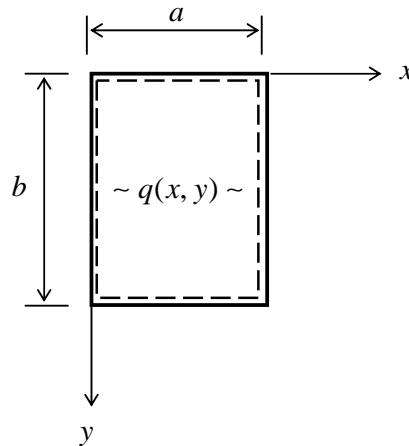
$$R = \pm 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad (4.27)$$

missä merkit ovat päinvastoin kuin kuvassa 5.8. Suorakaidelaatan vapaasti tuetussa nurkassa on tavallisesti $R > 0$. Tämä merkitsee sitä, että nurkka pyrkii nousemaan irti alustastaan, mutta pistemäinen nurkkavoima R pitää sen paikallaan. Jotta todellinen laatta noudattaisi esitettyä teoriaa, tulee nurkan olla kiinnitetty siten, että nousemista ei pääse tapahtumaan. Suorakaidelaatan jäykästi kiinnitettyssä nurkassa on voimassa $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$, joten $R = 0$. Suorakaidelaatan vapaassa nurkassa, jossa ei vaikuta ulkoista pistekuormaa, vallitsee ehto $R = 0$, joten siellä $M_{xy} = 0$ ja $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$. Laatan nurkkavoima on tarkastelemallemme Kirchhoffin laattateorialle tyypillinen erikoisuus. Leikkausmuodonmuutoksen huomioon ottavassa Mindlinin laattateoriassa pistemäistä nurkkavoimaa ei enää esiinny.

6. LAATTAPROBLEEMAN RATKAISU FOURIER-SARJOJEN AVULLA

6.1. Kaksoissinisarjaan perustuva, ns. Navier'n ratkaisu, vapaasti tuetulle suorakaidelaatalle

Navier'n (Louis-Marie-Henri Navier, 1785-1836) esitti 1820 reunoiltaan *vapaasti tuetulle suorakaidelaatalle* (kuva 6.1) Fourierin kaksoissinisarjaan (vrt. liite A) perustuvan ratkaisun.



Kuva 6.1: Reunoiltaan vapaasti tuettu suorakaidelaatta

Siinä probleeman tuntematon funktio, taipuma $w(x, y)$ esitetään Fourierin kaksoissinisarjana

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y, \quad (6.1)$$

missä

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{a}, \quad \beta_j = \frac{j\pi}{b}. \quad (6.2)$$

Sarjan kertoimet w_{ij} ovat näin tuntemattomia parametreja. Helposti nähdään, että taipuman lauseke (6.1) toteuttaa laatan reunoilla seuraavat ehdot

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \text{ kun } x = 0 \text{ ja } x = a \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ kun } y = 0 \text{ ja } y = b \end{aligned} \quad (6.3)$$

Nämä ovat tarkasteltavan, vapaasti tuetun laatan reunaehdot (vrt. kaava (5.10)). Taipuman lauseke (6.1) *toteuttaa* siis automaattisesti *probleeman reunaehdot*.

Jotta taipuman lauseke (6.1) saataisiin *toteuttamaan* myös *laatan differentiaaliyhtälö*, lausutaan myös laatan jakautunut kuormitus $q(x, y)$ kaksoissinisarjana

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y, \quad (6.4)$$

jonka kertoimet ovat tunnettuja parametreja ja voidaan määrittää kaavalla

$$q_{ij} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha_i x \sin \beta_j y \, dx \, dy. \quad (6.5)$$

Sijoittamalla taipuman ja kuorman lausekkeen (6.1) ja (6.4) laatan taipuman differentiaaliyhtälöön

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

saadaan aluksi

$$\begin{aligned} & \sum \sum w_{ij} \alpha_i^4 \sin \alpha_i x \sin \beta_j y + 2 \sum \sum w_{ij} \alpha_i^2 \beta_j^2 \sin \alpha_i x \sin \beta_j y \\ & + \sum \sum w_{ij} \beta_j^4 \sin \alpha_i x \sin \beta_j y = \frac{1}{D} \sum \sum q_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\sum \sum [w_{ij} (\alpha_i^4 + 2\alpha_i^2 \beta_j^2 + \beta_j^4) - \frac{q_{ij}}{D}] \sin \alpha_i x \sin \beta_j y = 0.$$

Tämä yhtälö on voimassa kaikilla muuttujien x ja y arvoilla, jos sarjan kussakin termissä sinilausekkeiden tuloa edeltävä hakasulkulauseke häviää. Näin taipuman kaksoissinisarjan (6.1) kertoimille saadaan tulos

$$\boxed{w_{ij} = \frac{q_{ij}}{D(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} \quad (i, j = 1, 2, \dots).} \quad (6.6)$$

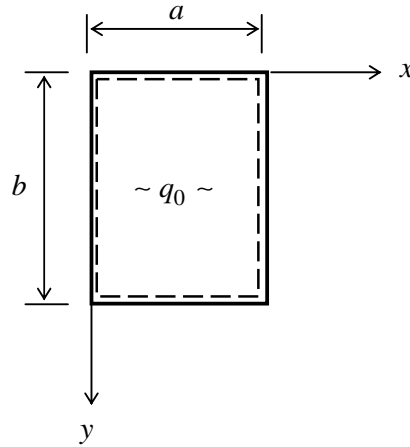
Taipuman lisäksi kiinnostuksen kohteena ovat usein laatan erilaiset jännitysresultantit. Niille voidaan helposti muodostaa sopivia lausekkeitä lähtien jännitysresultanttien ja taipuman yhteyksistä (2.18), (2.19) ja (4.5). Esimerkiksi taivutusmomentille M_x saadaan

$$\begin{aligned}
M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
&= -D\left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} -w_{ij} \alpha_i^2 \sin \alpha_i x \sin \beta_j y + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} -\nu w_{ij} \beta_j^2 \sin \alpha_i x \sin \beta_j y\right] \quad (6.7) \\
&= D \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} (\alpha_i^2 + \nu \beta_j^2) \sin \alpha_i x \sin \beta_j y.
\end{aligned}$$

Vapaasti tuetun suorakaidelaatan Navier'n ratkaisu saadaan siis seuraavasti:

- 1) Muodostetaan kuorman sarjan kertoimet q_{ij} kaavalla (6.5)
- 2) Lasketaan taipuman sarjan kertoimet w_{ij} kaavalla (6.6)
- 3) Määritetään taipuman $w(x, y)$ ja jännitysresultanttien arvoja halutuissa pisteissä (vrt. kaavat (6.1) ja (6.7)).

Esimerkki 6.1: Vapaasti tuettu suorakaidelaatta, jota kuormittaa tasainen kuorma. Määritetään Navier'n menettelyllä kaavat laatan taipuman ja taivutusmomentin M_y laskemiseksi laatan keskipisteessä. Lasketaan niiden arvoja sivusuhteen a/b eri arvoilla, kun Poissonin vakio on $\nu = 0,3$.



Kuorman sarjan kertoimet:

$$q_{ij} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha_i x \sin \beta_j y dx dy = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \alpha_i x \sin \beta_j y dx dy$$

$$= \frac{4q_0}{ab} \left| \frac{\cos \alpha_i x}{\alpha_i} \right|_0^a \left| \frac{\cos \beta_j y}{\beta_j} \right|_0^b = \frac{4q_0}{ab \alpha_i \beta_j} (1 - \cos \alpha_i a)(1 - \cos \beta_j b) = \frac{4q_0}{\pi^2 ij} (1 - \cos i\pi)(1 - \cos j\pi)$$

Nähdään, että $q_{ij} = 0$, kun i ja j saavat parillisia arvoja. Parittomilla arvoilla i ja j saadaan

$$q_{ij} = \frac{16q_0}{ij\pi^2}, \quad (i, j = 1, 3, 5, \dots)$$

Taipuman sarjan kertoimet:

$$w_{ij} = \frac{q_{ij}}{D(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} = \frac{16q_0}{ijD\pi^2(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} = \frac{16}{\pi^6} \frac{1}{ij \left[i^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + j^2 \right]^2} \frac{q_0 b^4}{D}, \quad (i, j = 1, 3, 5, \dots)$$

Taipuma w ja taivutusmomentti M_y laatan keskipisteessä:

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \sin \frac{\alpha_i a}{2} \sin \frac{\beta_j b}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2} = \frac{q_0 b^4}{D} \frac{16}{\pi^6} \sum_{i=1,3,\dots}^n \sum_{j=1,3,\dots}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2}}{ij \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 i^2 + j^2 \right]^2}$$

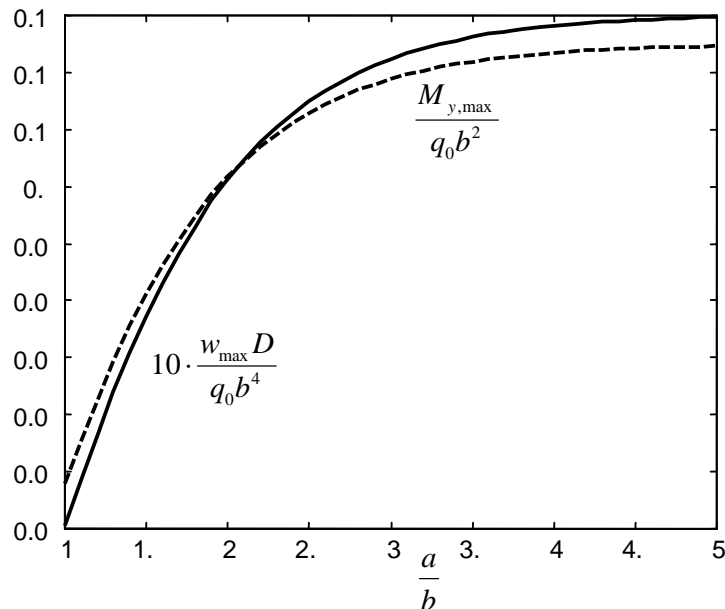
$$M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = D \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (v\alpha_i^2 + \beta_j^2) \sin \frac{\alpha_i a}{2} \sin \frac{\beta_j b}{2} = \frac{D}{b^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \pi^2 \left[i^2 v \left(\frac{b}{a}\right)^2 + j^2 \right] \sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2}$$

$$= q_0 b^2 \sum_{i=1,3,\dots}^n \sum_{j=1,3,\dots}^n \frac{16}{\pi^4} \frac{[i^2 v (\frac{b}{a})^2 + j^2]}{ij[(\frac{b}{a})^2 i^2 + j^2]^2} \sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2}$$

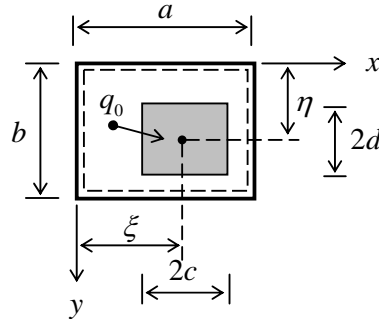
Kummankin summan termien lukumääräksi on otettu n . Tutkitaan ensin sarjojen suppenevuutta sivusuhteen a/b arvoilla 1 ja 2 ottamalla sarjaan eri määrä termejä.

n	Termit $n \times n$	$w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})D/(q_0 b^4)$		$M_y(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})/(q_0 b^2)$	
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 1$	$a/b = 2$
1	1	0,004161	0,010651	0,0534	0,1130
3	9	0,004055	0,010076	0,0469	0,0999
5	25	0,004064	0,010139	0,0482	0,1023
7	49	0,004062	0,010126	0,0477	0,1014
15	225	0,004062	0,010129	0,0479	0,1016
25	625	0,004062	0,010129	0,0479	0,1017

Nähdään, että suppeneminen on sarjan termien lukumäärään ($n \times n$) nähden varsin hidasta ja taipuma (perustuntematon) suppenee nopeammin kuin taivutusmomentti (sisältää taipuman toisia derivaattoja). Laatan ja sen kuormituksen kaksoissymmetrian vuoksi laatan keskipisteen taipuma ja taivutusmomentti M_y ovat samalla niiden maksimiarvot ja w_{\max} ja $M_{y,\max}$. Laskemalla näitä arvoja eri sivusuhteilla saadaan alla olevat, sangen käyttökelpoiset käyrät.



Esimerkki 6.2: Vapaasti tuettu suorakaidelaatta, jota kuormittaa tasainen suorakaidekuorma. Määritetään Navier'n menettelyllä kaavat, joiden avulla voidaan laskea taipuman, taivutusmomenttien ja vääntömomentin sekä korvikeleikkausvoimien arvoja laatan halutuissa pisteissä.



Kuorman sarjan kertoimet:

$$\begin{aligned}
 q_{ij} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha_i x \sin \beta_j y dx dy \\
 &= \frac{4}{ab} \int_{\xi-c}^{\xi+c} \int_{\eta-d}^{\eta+d} q_0 \sin \alpha_i x \sin \beta_j y dx dy = \frac{4q_0}{ab} \left| \frac{\cos \alpha_i x}{\alpha_i} \right|_{\xi-c}^{\xi+c} \left| \frac{\cos \beta_j y}{\beta_j} \right|_{\eta-d}^{\eta+d} \\
 &= \frac{4q_0}{ab \alpha_i \beta_j} \underbrace{[\cos \alpha_i (\xi + c) - \cos \alpha_i (\xi - c)]}_{2 \sin \alpha_i \xi \sin \alpha_i c} \underbrace{[\cos \beta_j (\eta + d) - \cos \beta_j (\eta - d)]}_{2 \sin \beta_j \eta \sin \beta_j d} \\
 &= \frac{16q_0}{ab \alpha_i \beta_j} \sin \alpha_i \xi \sin \alpha_i c \sin \beta_j \eta \sin \beta_j d
 \end{aligned}$$

Taipuman sarjan kertoimet:

$$w_{ij} = \frac{q_{ij}}{D(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} = \frac{16q_0}{Dab \alpha_i \beta_j (\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} \sin \alpha_i \xi \sin \alpha_i c \sin \beta_j \eta \sin \beta_j d$$

Taipuma:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y$$

Taivutusmomentit ja vääntömomentti:

Kaavojen (2.18) perusteella saadaan

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \underline{\underline{D \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (\alpha_i^2 + \nu \beta_j^2) \sin \alpha_i x \sin \beta_j y}}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \underline{\underline{D \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (\nu \alpha_i^2 + \beta_j^2) \sin \alpha_i x \sin \beta_j y}}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \underline{\underline{-D(1-\nu) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \alpha_i \beta_j \cos \alpha_i x \cos \beta_j y}}$$

Leikkausvoimat:

Kaavan (2.19) perusteella saadaan

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \underline{\underline{-D \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \alpha_i (\alpha_i^2 + \beta_j^2) \cos \alpha_i x \sin \beta_j y}}$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) = \underline{\underline{-D \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \beta_j (\alpha_i^2 + \beta_j^2) \sin \alpha_i x \cos \beta_j y}}$$

Korvikeleikkausvoimat:

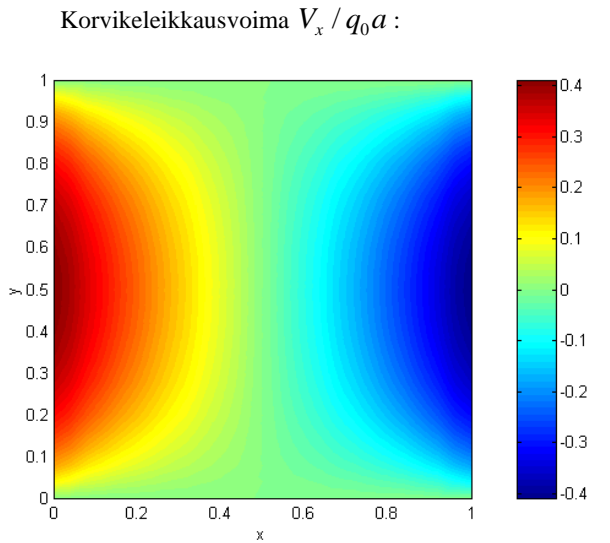
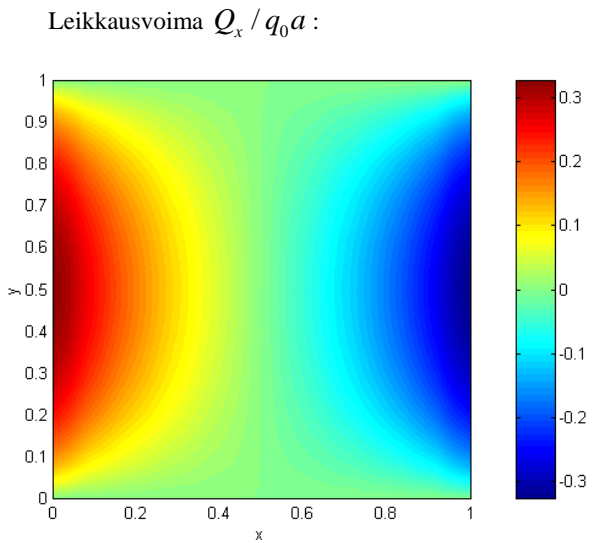
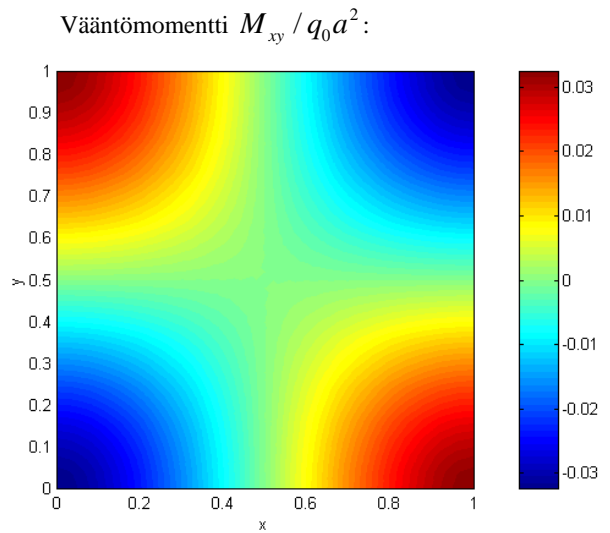
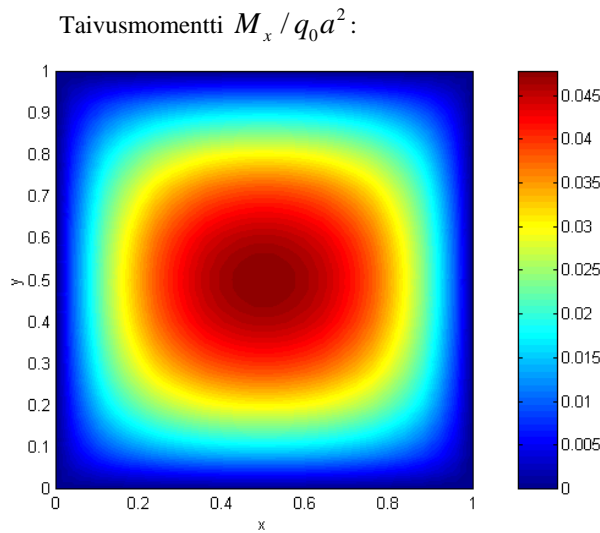
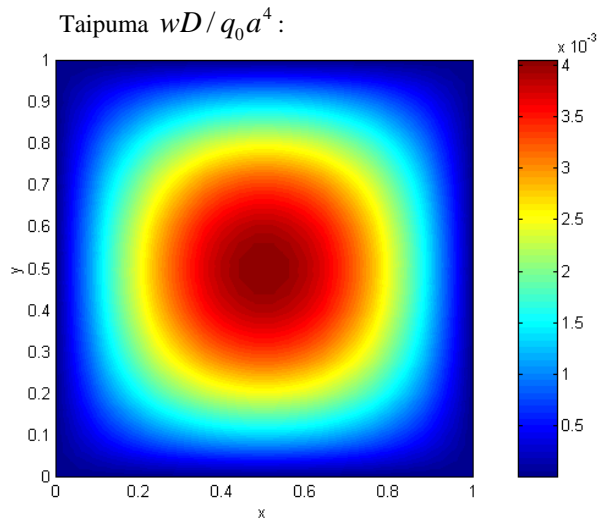
Kaavan (4.5) perusteella saadaan

$$V_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \underline{\underline{-D \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \alpha_i [\alpha_i^2 + (2-\nu) \beta_j^2] \cos \alpha_i x \sin \beta_j y}}$$

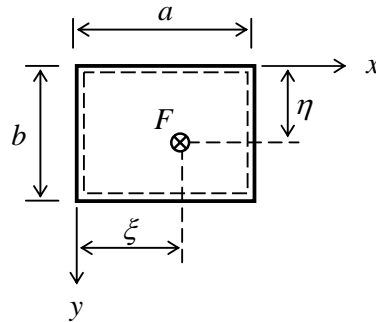
$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = \underline{\underline{-D \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \beta_j [\beta_j^2 + (2-\nu) \alpha_i^2] \sin \alpha_i x \cos \beta_j y}}$$

Laskelma on nyt mahdollista suorittaa laatimalla kaksoisalleviivattuihin kaavoihin perustuva ohjelma jollakin matematiikkaohjelmistolla.

Tarkastellaan lopuksi esimerkkinä tasaisen kuorman kuormittamaa q_0 neliölaattaa. Lähtöarvot tässä tapauksessa ovat $b = a$, $\xi = \eta = c = d = a/2$. Seuraavan sivun kuvassa on esitetty MATLAB-ohjelmalla lasketut taipuman $w(x, y)$, taivutusmomentin $M_x(x, y)$, vääntömomentin $M_{xy}(x, y)$, leikkausvoiman $Q_x(x, y)$ ja korvikeleikkausvoiman $V_x(x, y)$ dimensiottomat jakaumat. Näiden suureiden maksimi- ja minimiarvot voidaan myös määrittää likimain kuvan avulla. Niiden dimensiottomat arvot saadaan ao. väripylvään ylä- ja alapään numeroarvoina. Kuvan perusteella voidaan esimerkiksi päätellä, että $w_{\max} \approx 0,004q_0a^2/D$ ja $M_{x,\max} \approx 0,047q_0a^2$, jotka vastaavat edellisessä esimerkissä saatuja tuloksia.



Esimerkki 6.3: Määritetään käyttäen hyväksi esimerkin 6.2 tulosta ja rajatarkastelua taipuman sarjan kertoimien w_{ij} lauseke suorakaidelaatalle, jota kuormittaa pistekuorma F kohdassa $x = \xi$, $y = \eta$. Määritetään saadun tuloksen avulla laatan keskipisteen taipuma, kun pistekuorma vaikuttaa laatan keskipisteessä.



Ilmaistaan suorakaidekuorman intensiteetti q_0 resultantin F avulla:

$$F = 4q_0 cd \Rightarrow q_0 = \frac{F}{4cd}$$

Sijoitetaan tulos suorakaidekuorman kehittämän kertoimien kaavaan:

$$q_{ij} = \frac{4F}{ab} \sin \alpha_i \xi \frac{\sin \alpha_i c}{\alpha_i c} \sin \beta_j \eta \frac{\sin \beta_j d}{\beta_j d} .$$

Suoritetaan rajankäynti¹, jossa $c \rightarrow 0$, $d \rightarrow 0$:

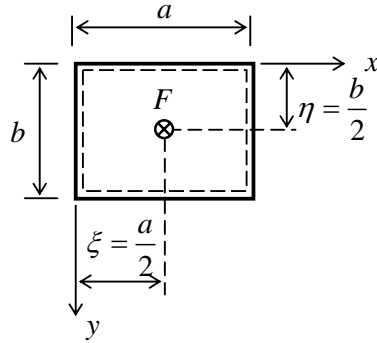
$$\begin{aligned} q_{ij} &= \lim_{c \rightarrow 0, d \rightarrow 0} \left(\frac{4F}{ab} \sin \alpha_i \xi \frac{\sin \alpha_i c}{\alpha_i c} \sin \beta_j \eta \frac{\sin \beta_j d}{\beta_j d} \right) \\ &= \frac{4F}{ab} \sin \alpha_i \xi \lim_{c \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \alpha_i c}{\alpha_i c} \right) \sin \beta_j \eta \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \beta_j d}{\beta_j d} \right) \\ &= \frac{4F}{ab} \sin \alpha_i \xi \sin \beta_j \eta \end{aligned}$$

Taipuman sarjan kertoimet:

$$w_{ij} = \frac{q_{ij}}{D(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} = \frac{4F}{Dab(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} \sin \alpha_i \xi \sin \beta_j \eta$$

¹ Rajankäynnissä käytettiin hyväksi tulosta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Pistekuorma laatan keskipisteessä $\xi = a/2$, $\eta = b/2$:



Taipuman sarjan kerroin:

$$w_{ij} = \frac{4F}{Dab(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} \sin \frac{\alpha_i a}{2} \sin \frac{\beta_j b}{2} = \frac{Fb^2}{D} \frac{4}{\pi^4 \frac{a}{b} [(\frac{b}{a}i)^2 + j^2]^2} \sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2}$$

Taipuma laatan keskipisteessä:

$$\begin{aligned} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \sin \frac{\alpha_i a}{2} \sin \frac{\beta_j b}{2} = \frac{Fb^2}{D} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{4}{\pi^4 \frac{a}{b} [(\frac{b}{a}i)^2 + j^2]^2} \sin^2 \frac{i\pi}{2} \sin^2 \frac{j\pi}{2} \\ &= \frac{Fb^2}{D} \sum_{i=1,3,\dots}^n \sum_{j=1,3,\dots}^n \frac{4}{\pi^4 \frac{a}{b} [(\frac{b}{a}i)^2 + j^2]^2} \end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruusmerkki johtuu taas siitä, että i :n ja j :n parillisilla arvoilla sinitermi häviää ja parittomilla se saa arvon 1.

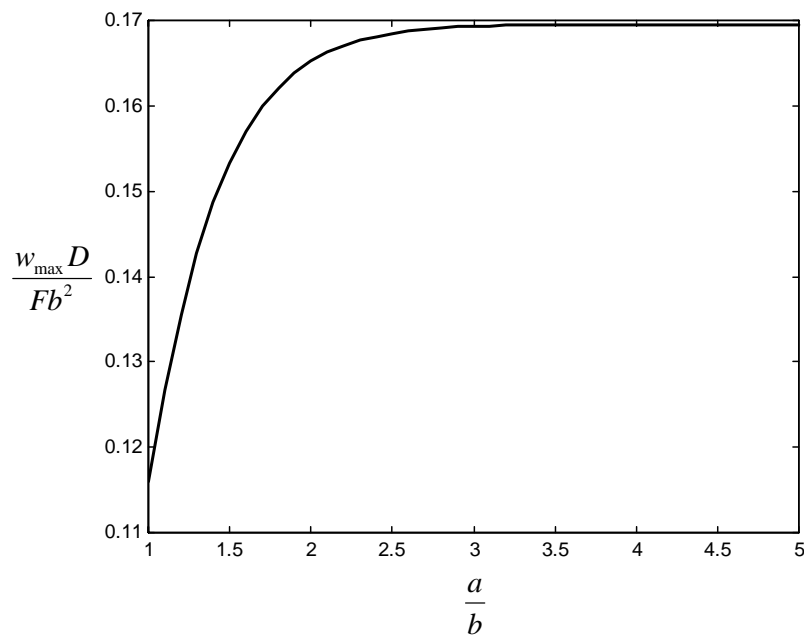
Taivutusmomentti M_y laatan keskipisteessä:

$$\begin{aligned} M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) &= D \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (v\alpha_i^2 + \beta_j^2) \sin \frac{\alpha_i a}{2} \sin \frac{\beta_j b}{2} \\ &= F \sum_{i=1,3,\dots}^n \sum_{j=1,3,\dots}^n \frac{4[(iv\frac{b}{a})^2 + j^2]}{\pi^2 \frac{a}{b} [(\frac{b}{a}i)^2 + j^2]^2} \sin^2 \frac{i\pi}{2} \sin^2 \frac{j\pi}{2} \end{aligned}$$

Tutkitaan ensin sarjojen suppenevuutta sivusuhteen a/b arvoilla 1 ja 2 ottamalla sarjaan eri määrä termejä.

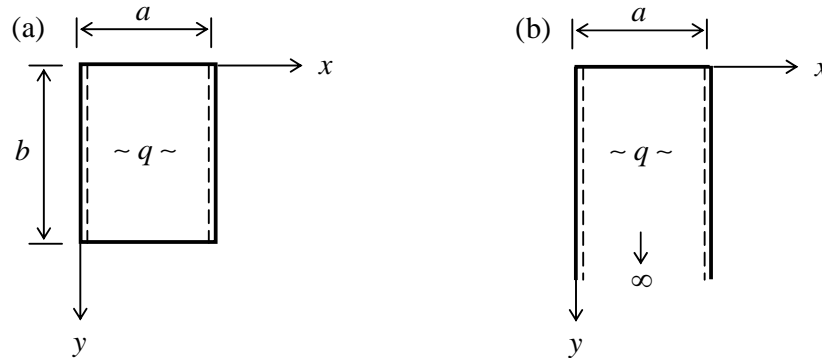
n	Termit $n \times n$	$w(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})D/(Fb^2)$		$M_y(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})/F$	
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 1$	$a/b = 2$
1	1	0,0103	0,0131	0,1317	0,1394
3	9	0,0112	0,0155	0,1990	0,2085
5	25	0,0114	0,0160	0,2401	0,2496
7	49	0,0115	0,0163	0,2695	0,2791
15	225	0,0116	0,0165	0,3409	0,3505
25	625	0,0116	0,0165	0,3910	0,4006
100	10000	0,0116	0,0165	0,5304	0,5399

Nähdään, että taipuma suppenee, mutta taivutusmomentti ei. Tämä johtuu siitä, että ideaalisen pistekuorman kohdalla laatan taivutusmomentti on ääretön. Laskemalla laatan taipuman arvoja eri sivusuhteiden arvoilla, saadaan alla oleva käyrä.



6.2 Yksinkertaiseen sinisarjaan perustuva, ns. Lévy'n ratkaisu suorakaide-laatalle ja laattakaistalle

Lévy'n (Maurice Lévy, 1899) ratkaisu on käyttökelpoinen, kun tarkasteltavan laatan **kaksi vastakkaista reunaa** on **vapaasti tuettu**. Kysymykseen tulee **suorakaidelaatta** (kuva 6.2a) tai puoliääretön **laattakaista** (kuva 6.2b), jonka kaksi vastakkaista reunaa on vapaasti tuettu.



Kuva 6.2: y-akselin suuntaisilta reunoiltaan vapaasti tuettu (a) suorakaidelaatta ja (b) laattakaista.

Siinä probleeman tuntematon funktio, taipuma $w(x, y)$, esitetään yksinkertaisen Fourierin sinisarjan avulla. Tarkastellaan kuvan 6.2 y-akselin suuntaisilta reunoiltaan vapaasti tuettua suorakaidelaattaa ja esitetään taipuma yksinkertaisena sinisarjana (vrt. liite A)

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(y) \sin \alpha_i x, \quad (6.8)$$

missä

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{a} \quad (6.9)$$

ja sarjan kertoimet $w_i(y)$ ovat muuttujan y tuntemattomia funktioita. Helposti nähdään, että taipuman lauseke (6.8) toteuttaa laatan y-akselin suuntaisilla reunoilla seuraavat ehdot

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \text{ kun } x = 0 \text{ ja } x = a \quad (6.10)$$

Nämä ovat vapaasti tuetun reunan reunaehdot (vrt. kaava (5.10)). Taipuman lauseke (6.8) **toteuttaa** siis automaattisesti **vapaasti tuetun reunan reunaehdot** laatan y-akselin suuntaisilla reunoilla. Reunaehtoja x-akselin suuntaisilla reunoilla taipuma (6.8) ei sen sijaan automaattisesti toteuta. Lévy'n ratkaisua käytettäessä laatan x-akselin suuntaisten reunojen reunaehdot voidaan valita halutun tyyppisiksi, joten muunlaisetkin kuin vapaasti tuetut reunat tulevat kysymykseen.

Jotta taipuman lauseke (6.8) saataisiin *toteuttamaan laatan differentiaaliyhtälö*, lausutaan myös laatan jakautunut kuormitus $q(x, y)$ yksinkertaisena sinisarjana

$$q(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(y) \sin \alpha_j x, \quad (6.11)$$

jonka kertoimet ovat tunnettuja muuttujan y funktioita ja voidaan määrittää kaavalla

$$q_j(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha_j x dx. \quad (6.12)$$

Sijoittamalla taipuman ja kuorman lausekkeen (6.8) ja (6.11) laatan taipuman differentiaaliyhtälöön

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

saadaan aluksi

$$\sum w_i \alpha_i^4 \sin \alpha_i x - 2 \sum \frac{d^2 w_i}{dy^2} \alpha_i^2 \sin \alpha_i x + \sum \frac{d^4 w_i}{dy^4} \sin \alpha_i x = \frac{1}{D} \sum q_i \sin \alpha_i x$$

ja edelleen

$$\sum \left[\frac{d^4 w_i}{dy^4} - 2 \alpha_i^2 \frac{d^2 w_i}{dy^2} + \alpha_i^4 w_i - \frac{q_i}{D} \right] \sin \alpha_i x = 0.$$

Tämä yhtälö toteutuu, jos sarjan kussakin termissä sinilausekkeiden tuloa edeltävä hakasulkulauseke häviää. Näin taipuman sinisarjan (6.8) kerroinfunktiolle $w_i(y)$ saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^4 w_i}{dy^4} - 2 \alpha_i^2 \frac{d^2 w_i}{dy^2} + \alpha_i^4 w_i = \frac{q_i}{D}. \quad (6.13)$$

Yhtälö (6.13) on neljännen kertaluvun lineaarinen, tavallinen differentiaaliyhtälö funktion $w_i(y)$ ratkaisemiseksi.

Tällaisen lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisu on muotoa

$$w_i(y) = \bar{w}_i(y) + w_{0i}(y), \quad (6.14)$$

missä $\bar{w}_i(y)$ on homogeenisen² yhtälön yleinen ratkaisu ja $w_{0i}(y)$ on täydellisen yhtälön eräs yksityisratkaisu.

Homogeenisen differentiaaliyhtälön **yleinen ratkaisu** voidaan esittää muodossa

$$\bar{w}_i(y) = (A_i + B_i \alpha_i y) e^{\alpha_i y} + (C_i + D_i \alpha_i y) e^{-\alpha_i y} \quad (6.15)$$

tai vaihtoehtoisesti muodossa

$$\bar{w}_i = (A_i + B_i \alpha_i y) \cosh \alpha_i y + (C_i + D_i \alpha_i y) \sinh \alpha_i y \quad (6.16)$$

missä A_i , B_i , C_i ja D_i ovat integrointivakiot (liite B), jotka voidaan määrittää laatan x -akselin suuntaisilla reunoilla vallitsevien reunaehtojen perusteella. Ratkaisu (6.15) soveltuu käytettäväksi, kun kysymyksessä on **puoliääretön laattakaista**, ja ratkaisu (6.16), kun kysymyksessä on **suorakaidelaatta**.

Levy'n ratkaisua käytettäessä joudutaan funktioita (6.15) ja (6.16) derivoimaan. Koska derivointi on melko työlästä, tarvittavat derivaatat on määritetty valmiiksi taulukkoon 6.1.

Taulukko 6.1: Funktion $\bar{w}_i(y)$ derivaattoja

Funktio:	$\bar{w}_i(y) = (A_i + B_i \alpha_i y) e^{\alpha_i y} + (C_i + D_i \alpha_i y) e^{-\alpha_i y}$
1. derivaatta	$\frac{d\bar{w}_i}{dy} = \alpha_i [(A_i + B_i + B_i \alpha_i y) e^{\alpha_i y} + (-C_i + D_i - D_i \alpha_i y) e^{-\alpha_i y}]$
2. ”	$\frac{d^2 \bar{w}_i}{dy^2} = \alpha_i^2 [(A_i + 2B_i + B_i \alpha_i y) e^{\alpha_i y} + (C_i - 2D_i + D_i \alpha_i y) e^{-\alpha_i y}]$
3. ”	$\frac{d^3 \bar{w}_i}{dy^3} = \alpha_i^3 [(A_i + 3B_i + B_i \alpha_i y) e^{\alpha_i y} + (-C_i + 3D_i - D_i \alpha_i y) e^{-\alpha_i y}]$
Funktio:	$\bar{w}_i = (A_i + B_i \alpha_i y) \cosh \alpha_i y + (C_i + D_i \alpha_i y) \sinh \alpha_i y$
1. derivaatta	$\frac{d\bar{w}_i}{dy} = \alpha_i [(C_i + B_i + D_i \alpha_i y) \cosh \alpha_i y + (A_i + D_i + B_i \alpha_i y) \sinh \alpha_i y]$
2. ”	$\frac{d^2 \bar{w}_i}{dy^2} = \alpha_i^2 [(A_i + 2D_i + B_i \alpha_i y) \cosh \alpha_i y + (C_i + 2B_i + D_i \alpha_i y) \sinh \alpha_i y]$
3. ”	$\frac{d^3 \bar{w}_i}{dy^3} = \alpha_i^3 [(C_i + 3B_i + D_i \alpha_i y) \cosh \alpha_i y + (A_i + 3D_i + B_i \alpha_i y) \sinh \alpha_i y]$

Levy'n ratkaisua käytettäessä joudutaan myös toistuvasti muodostamaan laatan eri voima- ja siirtymäsuureiden sarjakehitelmiä. Laskentatyön vähentämiseksi sarja-

² Homogeenisella differentiaaliyhtälöllä ymmärretään yhtälöä, jossa esiintyy vain tuntemattoman funktion ja sen derivaattoja sisältäviä termejä, mutta ei tunnetusta funktiosta muodostuvaa termiä. Esimerkiksi yhtälöä (6.13) vastaavassa homogeenisessä yhtälössä oikean puoleinen, kuormituksen $q_i(y)$ sarjan kertoimen sisältävä termi on nolla.

kehitymät ja kehitymien kertoimien lausekkeet (taipuman kertoimen $w_i = \bar{w}_i + w_{0i}$ ja sen derivaattojen) avulla ilmaistuna on muodostettu valmiiksi taulukossa 6.2.

Taulukko 6.2: Laatan voima- ja siirtymäsuureiden sarjakehityksiä

Suur e	Sarjakehitymä	Kerroin
w	$w = \sum w_i \sin \alpha_i x$	$w_i = \bar{w}_i + w_{0i}$
φ_x	$\varphi_x = \sum \varphi_{xi} \cos \alpha_i x$	$\varphi_{xi} = \alpha_i w_i$
φ_y	$\varphi_y = \sum \varphi_{yi} \sin \alpha_i x$	$\varphi_{yi} = \frac{dw_i}{dy}$
M_x	$M_x = \sum M_{xi} \sin \alpha_i x$	$M_{xi} = -D(-\alpha_i^2 w_i + \nu \frac{d^2 w_i}{dy^2})$
M_y	$M_y = \sum M_{yi} \sin \alpha_i x$	$M_{yi} = -D(\frac{d^2 w_i}{dy^2} - \nu \alpha_i^2 w_i)$
M_{xy}	$M_{xy} = \sum M_{xyi} \cos \alpha_i x$	$M_{xyi} = -D(1-\nu)\alpha_i \frac{dw_i}{dy}$
Q_x	$Q_x = \sum Q_{xi} \cos \alpha_i x$	$Q_{xi} = -D(-\alpha_i^3 w_i + \alpha_i \frac{d^2 w_i}{dy^2})$
Q_y	$Q_y = \sum Q_{yi} \sin \alpha_i x$	$Q_{yi} = -D(\frac{d^3 w_i}{dy^3} - \alpha_i^2 \frac{dw_i}{dy})$
V_x	$V_x = \sum V_{xi} \cos \alpha_i x$	$V_{xi} = -D[-\alpha_i^3 w_i + (2-\nu)\alpha_i \frac{d^2 w_i}{dy^2}]$
V_y	$V_y = \sum V_{yi} \sin \alpha_i x$	$V_{yi} = -D[\frac{d^3 w_i}{dy^3} - (2-\nu)\alpha_i^2 \frac{dw_i}{dy}]$

Täydellisen yhtälön (6.13) *yksityisratkaisulle* voidaan johtaa (liite C) yleispätevä lauseke

$$w_{0i}(y) = \frac{1}{2\alpha_i^3 D} \int_0^y [\alpha_i(y-t) \cos h \alpha_i(y-t) - \sin h \alpha_i(y-t)] q_i(t) dt. \quad (6.17)$$

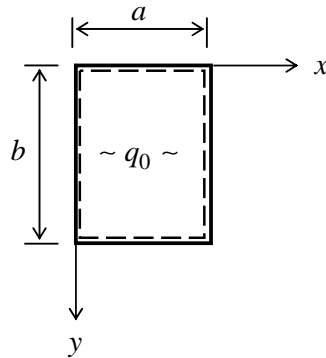
Siinä erikoistapauksessa, jossa *kuormitus* on *vain x:n funktio* ts. $q = q(x)$, tai se *rippuu lineaarisesti y:stä*, voidaan johtaa (liite D) toisenlainen *yksityisratkaisu*

$$w_{0i} = \frac{q_i}{\alpha_i^4 D}, \quad (6.18)$$

jota on tällaisissa tapauksissa usein helpompi käyttää.

Huomautus: Jos laatalle ei ole jakautunutta kuormaa, yksityisratkaisu luonnollisesti häviää ts. $w_{0i} = 0$.

Esimerkki 6.4: Määritetään käyttäen Lévy'n menetelmää kaikki kaavat, joita tarvitaan oheisen, tasaisen kuorman q_0 kuormittaman, vapaasti tuetun suorakaidelaatan taipuman w , taivutusmomentin M_x , vääntömomentin M_{xy} ja korvikeleikkausvoiman V_x määrittämiseksi laatan pisteessä, jonka koordinaatit ovat x ja y .



Kuorman sarjan kertoimet:

$$q_i = \frac{2}{a} \int_0^a q_0 \sin \alpha_i x dx = \frac{2q_0}{a} \left[-\frac{\cos \alpha_i x}{\alpha_i} \right]_0^a = \frac{2q_0}{\alpha_i a} (1 - \cos \alpha_i a) = \frac{2q_0}{i\pi} (1 - \cos i\pi)$$

Helposti nähdään, että parillisilla i :n arvoilla kertoimet ovat nolliä ja parittomilla saadaan

$$q_i = \frac{4q_0}{i\pi}, \quad (i = 1, 3, 5, \dots)$$

Yksityisratkaisu:

Koska kuorma ei riipu y :stä, yksityisratkaisu saadaan kaavalla (6.18)

$$w_{0i} = \frac{4q_0}{i\pi\alpha_i^4 D}, \quad (i = 1, 3, 5, \dots)$$

Reunaehdot x -akselin suuntaisilla reunoilla:

Reunat $y = 0$ ja $y = b$ ovat vapaasti tuettuja, joten reunaehdot ehdot:

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) = 0$$

$$w(x, b) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b) = 0$$

Näitä vastaavat reunaehdot taipuman sarjan kertoimille ovat

$$w_i(0) = 0, \quad \frac{d^2 w_i}{dy^2}(0) = 0,$$

$$w_i(b) = 0, \quad \frac{d^2 w_i}{dy^2}(b) = 0.$$

Sijoittamalla näihin yleinen ratkaisu

$$w_i = \bar{w}_i + w_{0i} = (A_i + B_i \alpha_i y) \cosh \alpha_i y + (C_i + D_i \alpha_i y) \sinh \alpha_i y + w_{0i}$$

ja sen toisen derivaatan lauseke³

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_i}{dy^2} &= \frac{d^2 \bar{w}_i}{dy^2} + \overbrace{\frac{d^2 w_{0i}}{dy^2}}^0 \\ &= \alpha_i^2 [(A_i + 2D_i + B_i \alpha_i y) \cosh \alpha_i y + (C_i + 2B_i + D_i \alpha_i y) \sinh \alpha_i y] \end{aligned}$$

saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A_i + w_{0i} = 0, \\ A_i + 2D_i = 0, \\ (A_i + B_i \alpha_i b) \cosh \alpha_i b + (C_i + D_i \alpha_i b) \sinh \alpha_i b + w_{0i} = 0, \\ (A_i + 2D_i + B_i \alpha_i b) \cosh \alpha_i b + (C_i + 2B_i + D_i \alpha_i b) \sinh \alpha_i b = 0, \end{cases}$$

jonka ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A_i}} &= -w_{0i}, \\ \underline{\underline{B_i}} &= w_{0i} \frac{1 - \cosh \alpha_i b}{2 \sinh \alpha_i b}, \\ \underline{\underline{C_i}} &= w_{0i} \frac{(1 - \cosh \alpha_i b)(\alpha_i b - 2 \sinh \alpha_i b)}{2 \sinh^2 \alpha_i b}, \\ \underline{\underline{D_i}} &= \frac{w_{0i}}{2}. \end{aligned}$$

Saatujen integrointivakioiden avulla taipuman sarjan kerroinfunktio, sen ensimmäinen ja toinen derivaatta saadaan siis (vrt. taulukko 6.1) kaavoista

$$\underline{\underline{w_i(y) = (A_i + B_i \alpha_i y) \cosh \alpha_i y + (C_i + D_i \alpha_i y) \sinh \alpha_i y + w_{0i},}}$$

³ Yksityisratkaisu on y:n suhteen vakio.

$$\frac{d\bar{w}_i}{dy} = \alpha_i [(C_i + B_i + D_i \alpha_i y) \cosh \alpha_i y + (A_i + D_i + B_i \alpha_i y) \sinh \alpha_i y],$$

$$\frac{d^2 w_i}{dy^2} = \alpha_i^2 [(A_i + 2D_i + B_i \alpha_i y) \cosh \alpha_i y + (C_i + 2B_i + D_i \alpha_i y) \sinh \alpha_i y].$$

Taipuman w , taivutusmomentin M_x , vääntömomentin M_{xy} sekä korvikeleikkausvoiman V_x (reunalla $x = 0$) lausekkeet:

Taulukosta 6.2 saadaan sarjakehitelmiksi

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i(y) \sin \alpha_i x,$$

$$M_x(x, y) = \sum_{i=1}^n M_{xi}(y) \sin \alpha_i x,$$

$$M_{xy}(x, y) = \sum_{i=1}^n M_{xyi}(y) \cos \alpha_i x,$$

$$V_x(x, y) = \sum_{i=1}^n V_{xi}(y) \cos \alpha_i x$$

ja kertoimien lausekkeiksi

$$M_{xi}(y) = -D(-\alpha_i^2 w_i + \nu \frac{d^2 w_i}{dy^2}),$$

$$M_{xyi}(y) = -D(1 - \nu) \alpha_i \frac{dw_i}{dy},$$

$$V_{xi}(y) = -D[-\alpha_i^3 w_i + (2 - \nu) \alpha_i \frac{d^2 w_i}{dy^2}].$$

Laskelma on nyt mahdollista suorittaa sopivalla matematiikkaohjelmalla käyttäen kaksoisalleviivattuja kaavoja.

Liite A: Fourierin sarjat

Fourierin sarjat ovat korvaamaton apuväline monien sovelletun mekaniikan ongelmien analyttiseen käsittelyyn. Tällaisia ongelmia ovat esimerkiksi kimmoteorian osittaisdifferentiaaliyhtälöt, rakenteiden värähtelyt, lämmön virtaus sekä sähkömagneettiset aallot.

A.1 Yksinkertainen Fourierin sarja

Fourierin teoreeman mukaan mielivaltainen jaksollinen funktio⁴ $f(x)$ voidaan esittää äärettömänä sarjana, jossa esiintyy kosini- ja sinitermejä. Täten alkuperäinen funktio korvataan lukuisten sini- ja kosiniaaltojen superpositiolla. Jaksollisen funktion $f(x)$, jonka jakson pituus on⁵ $p = 2L$, Fourierin sarja voidaan esittää muodossa

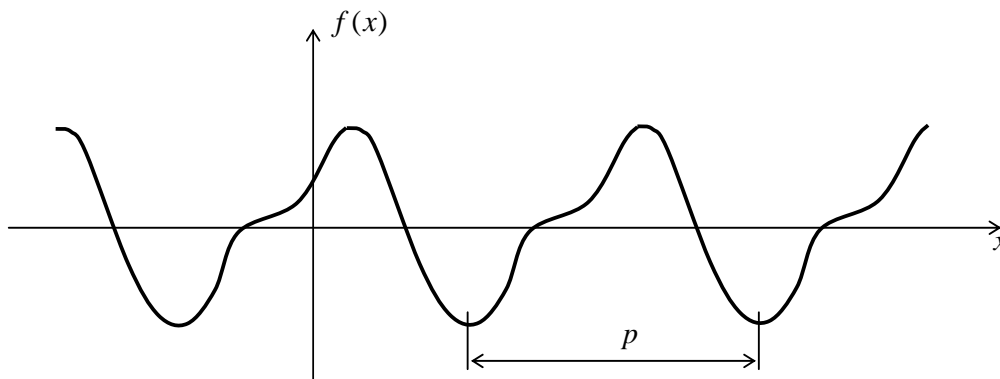
$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + \dots + a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \dots \\ + b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} + \dots$$

tai lyhyemmin

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \alpha_i x + b_i \sin \alpha_i x), \quad (\text{A.1})$$

missä

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{L}. \quad (\text{A.2})$$



Kuva A.1: Mielivaltainen jaksollinen funktio $f(x)$

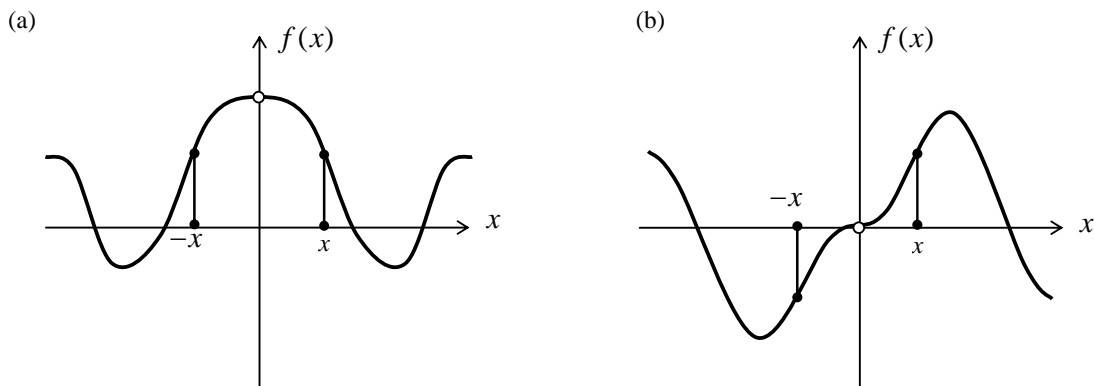
⁴ Funktion $f(x)$ sanotaan olevan jaksollinen, jos on positiivinen luku p , siten että $f(x + p) = f(x)$ (vrt. kuva A.1). Lukua p kutsutaan **jakson pituudeksi**.

⁵ Seuraavissa tarkasteluissa on tarkoituksenmukaista käyttää jakson pituuden p sijasta sen puolikasta L .

Jos funktio $f(x)$ tunnetaan, sarjan kertoimet saadaan kaavoilla

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_i &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \alpha_i x dx \\ b_i &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \alpha_i x dx \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.3})$$

Tapauksissa, joissa tarkasteltava funktio $f(x)$ on joko **parillinen** tai **pariton**, Fourierin sarjalle on tarkoituksenmukaista esittää vastaavat hieman yksinkertaisemmat kaavat. Muistamme, että funktio $f(x)$ on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$, ja se on pariton, jos $f(-x) = -f(x)$ (vrt. kuva A.2). (Näin esimerkiksi $\cos \alpha_i x$ on parillinen- ja $\sin \alpha_i x$ on pariton funktio.)



Kuva A.2: (a) Parillinen funktio ja (b) pariton funktio

Jos funktio $f(x)$ on parillinen, saadaan

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \alpha_i x dx = 0, \quad \int_{-L}^L f(x) \cos \alpha_i x dx = 2 \int_0^L f(x) \cos \alpha_i x dx$$

ja jos funktio $f(x)$ on pariton, saadaan

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \alpha_i x dx = 2 \int_0^L f(x) \sin \alpha_i x dx, \quad \int_{-L}^L f(x) \cos \alpha_i x dx = 0.$$

Näiden tulosten avulla **parillisen funktion** $f(x)$ **kosinisarjalle** saadaan esitys

$$\boxed{f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cos \alpha_i x,} \quad (\text{A.4})$$

missä sarjan kertoimet ovat

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \\ f_i &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \alpha_i x dx \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

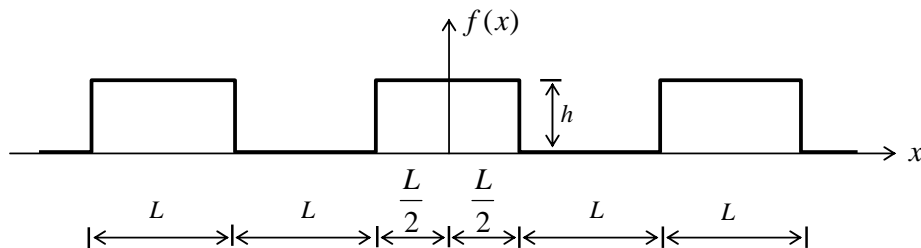
Vastaavasti *parittoman funktion* $f(x)$ *sinisarjalle* saadaan esitys

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sin \alpha_i x, \quad (\text{A.6})$$

missä sarjan kertoimet ovat

$$f_i = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \alpha_i x dx \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.7})$$

Esimerkki A.1: Kehitetään oheinen ”hammasfunktio” Fourier-sarjaksi.



Kysymyksessä on parillinen funktio, joten käytetään kosinisarjaa. Integrointivälillä $0 \leq x \leq L$ funktio $f(x)$ on

$$f(x) = \begin{cases} h, & \text{kun } 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ 0, & \text{kun } \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}$$

Kaavasta (A.5) seuraa sarjan kertoimille

$$f_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{1}{L} \left(\int_0^{L/2} h dx + \int_{L/2}^L 0 dx \right) = \frac{h}{L} \Big|_0^{L/2} x = \frac{h}{2},$$

$$f_i = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \alpha_i x dx = \frac{2}{L} \left(\int_0^{L/2} h \cos \alpha_i x dx + \int_{L/2}^L h \cdot 0 dx \right) = \frac{2h}{\alpha_i L} \Big|_0^{L/2} \sin \alpha_i x = \frac{2h}{\alpha_i L} \sin \frac{\alpha_i L}{2}$$

$$= \frac{2h}{i\pi} \sin \frac{i\pi}{2}.$$

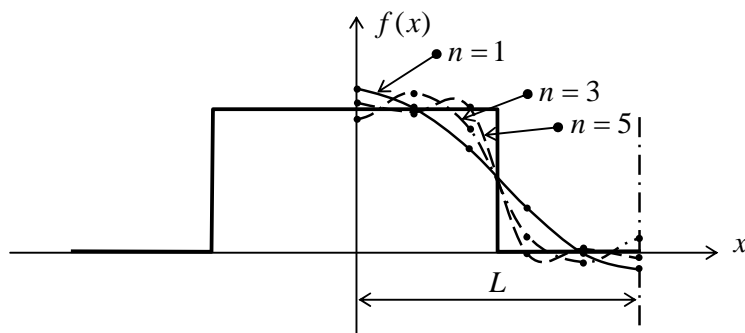
Kaavasta (A.4) saadaan, kun sarjasta otetaan n termiä

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i \cos \alpha_i x = \frac{h}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{2h}{i\pi} \sin \frac{i\pi}{2} \cos \left(i\pi \frac{x}{L} \right).$$

Oheiseen taulukkoon on laskettu funktion $f(x)/h$ arvoja välillä $0 \leq x \leq L$, kun $n = 1, 3$ ja 5 .

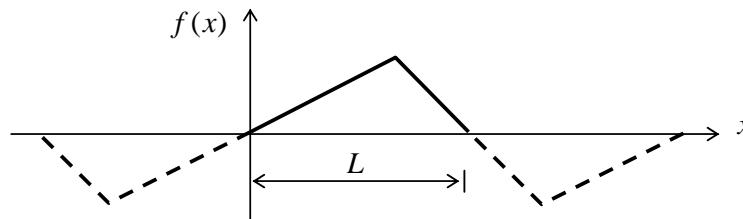
x/L	$n=1$	$n=3$	$n=5$
0	1,137	0,924	1,052
0,2	1,015	1,081	0,953
0,4	0,697	0,868	0,996
0,6	0,303	0,132	0,004
0,8	-0,015	-0,081	0,047
1	-0,137	0,076	-0,052

Oheiseen kuvaan on piirretty funktion $f(x)$ kuvaaja, kun $n = 1, 3$ ja 5 .



Tietyllä äärellisellä välillä määritelty ei-jaksollinen funktio voidaan myös esittää Fourierin sarjana ajattelemalla sen jatkuvan määrittelyvälinsä yli. Välillä $0 \leq x \leq L$ määritelty funktio $f(x)$ on kuvassa A.3 ajateltu jatkuvan jaksollisena parittomana funktiona. Se voidaan siten esittää sinisarjana

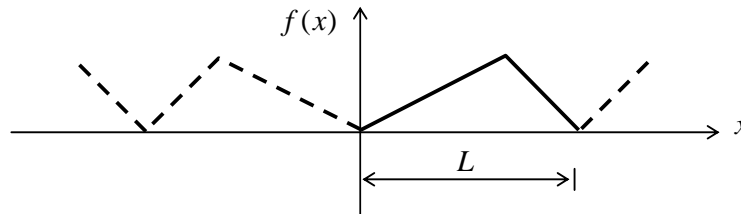
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sin \alpha_i x. \quad (\text{A.8})$$



Kuva A.3: Välillä $0 \leq x \leq L$ määritelty funktio $f(x)$ ja sen jaksollinen pariton jatke.

Saman funktion $f(x)$ on kuvassa A.4 ajateltu jatkuvan jaksollisena parillisena funktiona. Se voidaan siten esittää myös kosinisarjana

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cos \alpha_i x \quad (\text{A.9})$$



Kuva A.4: Välillä $0 \leq x \leq L$ määritelty funktio $f(x)$ ja sen jaksollinen parillinen jatke.

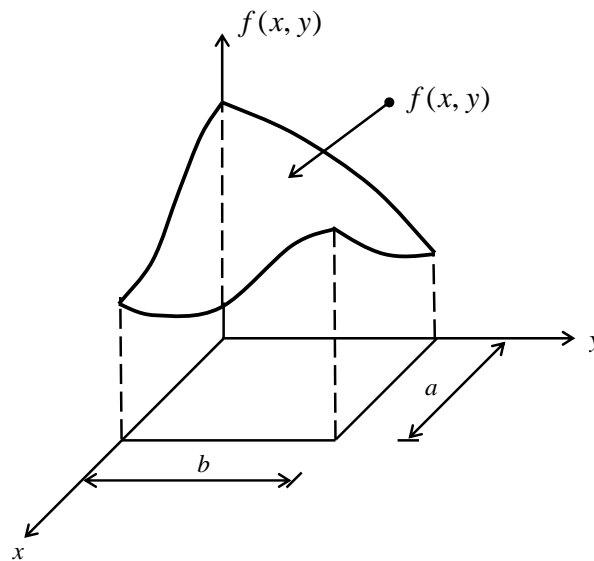
A.2 Kaksinkertainen Fourierin sarja

Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota $f(x, y)$ joka on määritelty suorakaiteen muotoisessa alueessa $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ (kuva A.5). Kehitetään funktio ensin välillä $0 \leq x \leq a$ muuttujan x sinisarjaksi

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(y) \sin \alpha_i x, \quad (\text{A.10})$$

missä

$$f_i(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \alpha_i x dx \quad (\text{A.11})$$



Kuva A.5: Suorakaiteen muotoisessa alueessa määritelty kahden muuttujan funktio

ja $\alpha_i = i\pi/a$. Nyt sarjan kertoimet $f_i(y)$ ovat yhden muuttujan y funktioita. Ajatellaan edelleen ne kehitetyksi välillä $0 \leq y \leq b$ muuttujan y sinisarjaksi

$$f_i(y) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij} \sin \beta_j y, \quad (\text{A.12})$$

missä

$$f_{ij} = \frac{2}{b} \int_0^b f_i(y) \sin \beta_j y dy \quad (\text{A.13})$$

ja $\beta_j = j\pi/b$.

Sijoittamalla kertoimien $f_i(y)$ kehitemä (A.12) funktion $f(x, y)$ kehittämään (A.10) ja kertoimien $f_i(y)$ lauseke (A.11) kertoimien f_{ij} lausekkeeseen (A.13) saadaan funktion $f(x, y)$ kaksinkertaiselle Fourier sinisarjalle lauseke

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y \quad (\text{A.14})$$

ja sen kertoimille lauseke

$$f_{ij} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \alpha_i x \sin \beta_j y dx dy. \quad (\text{A.15})$$

Näissä kaavoissa on siis käytetty lyhennysmerkinjä

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{a}, \quad \beta_j = \frac{j\pi}{b}. \quad (\text{A.16})$$

Liite B: Lévy'n ratkaisussa esiintyvän differentiaaliyhtälön (6.13) homogeenisen osan yleisen ratkaisun määrittäminen

Ilman alaindeksiä i differentiaaliyhtälön (6.13) homogeeninen osa on

$$\frac{d^4 w}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 w}{dy^2} + \alpha^4 w = 0. \quad (\text{B.1})$$

Otetaan yritteeksi $w = e^{ry}$ ja sijoitetaan se yhtälöön (B.1), jolloin saadaan $(r^4 - 2\alpha^2 r^2 + \alpha^4)e^{ry} = 0$ ja karakteristinen yhtälö on

$$r^4 - 2\alpha^2 r^2 + \alpha^4 = 0. \quad (\text{B.2})$$

Sijoituksella $\xi = r^2$ saadaan tästä toisen asteen yhtälö $\xi^2 - 2\alpha^2 \xi + \alpha^4 = 0$, jonka ratkaisuksi tulee kaksoisjuuri $\xi = \alpha^2$. Näin r :n määrittämiseksi saadaan kaksi identtistä yhtälöä $r^2 = \alpha^2$, joista molemmilla on kaksi ratkaisua $r = +\alpha$ ja $r = -\alpha$. Näin karakteristisen yhtälön neljä juurta ovat $r_1 = r_2 = \alpha$, $r_3 = r_4 = -\alpha$. Tämän tuloksen perusteella saadaan seuraavat yhtälön (B.1) toteuttavat funktiot $w_1 = e^{\alpha y}$, $w_2 = ye^{\alpha y}$, $w_3 = e^{-\alpha y}$ ja $w_4 = ye^{-\alpha y}$. Yhtälön (B.1) yleinen ratkaisu saadaan näiden lineaarikombinaationa eli $\bar{w} = Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 + Dw_4$. Näin etsimämme ratkaisu saa muodon

$$\underline{\underline{\bar{w}(y) = (A + By)e^{\alpha y} + (C + Dy)e^{-\alpha y}}}. \quad (\text{B.3})$$

Tästä saadaan edelleen

$$\begin{aligned} \bar{w}(y) &= Ae^{\alpha y} + Ce^{-\alpha y} + Bye^{\alpha y} + Dye^{-\alpha y} \\ &= \frac{A+C}{2}(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) + \frac{A-C}{2}(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) \\ &\quad + \frac{B+D}{2}y(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) + \frac{B-D}{2}y(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) \\ &= (A+C)\cosh \alpha y + (A-C)\sinh \alpha y + (B+D)y \cosh \alpha y + (B-D)y \sinh \alpha y \end{aligned}$$

ja merkitsemällä

$$A' = A + C, \quad B' = B + D, \quad C' = A - C, \quad D' = B - D$$

lopuksi

$$\underline{\underline{\bar{w}(y) = (A' + B'y)\cosh \alpha y + (C' + D'y)\sinh \alpha y}}. \quad (\text{B.4})$$

Liite C: Lévy'n ratkaisussa esiintyvän differentiaaliyhtälön (6.13) yksityisratkaisu (6.17)

Ilman alaindeksiä i differentiaaliyhtälön (6.13) homogeeninen osa on

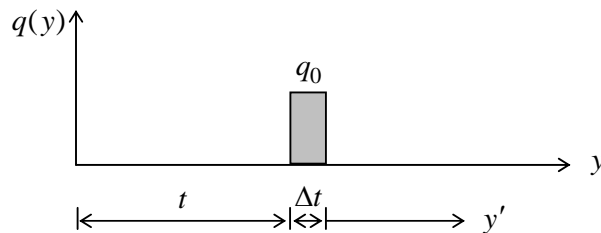
$$\frac{d^4 w}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 w}{dy^2} + \alpha^4 w = \frac{q}{D}. \quad (\text{C.1})$$

Etsitään ensin sen ratkaisu tapauksessa, jossa kuorma $q(y)$ (täsmällisemmin kuorman $q(x, y)$ sarjan kerroin) on välillä $t \leq y \leq t + \Delta t$ vakiosuuruinen q_0 ja muualla nolla ts.

$$q(y) = \begin{cases} q_0 = \text{vakio, kun } t \leq y \leq t + \Delta t \\ 0, \text{ kun } t + \Delta t \leq y \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

ja vaaditaan, että taipuma $w(y)$ (täsmällisemmin taipuman $w(x, y)$ sarjan kerroin) toteuttaa pisteessä $y = t$ seuraavat ehdot

$$w(t) = 0, \quad \frac{dw}{dy}(t) = 0, \quad \frac{d^2 w}{dy^2}(t) = 0, \quad \frac{d^3 w}{dy^3}(t) = 0 \quad (\text{C.2})$$



Kuva C.1: Kuorman $q(y)$ määrittely

Otaksutaan väli Δt , niin pieneksi, että kolme ensimmäistä yhtälöä (C.2) ovat voimassa koko välillä $t \leq y \leq t + \Delta t$. Tällöin differentiaaliyhtälö (C.1) saa tällä välillä muodon

$$\frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{q_0}{D}. \quad (\text{C.3})$$

Integroimalla välin yli saadaan tästä

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \frac{d^4 w}{dy^4} dy &= \int_t^{t+\Delta t} \frac{q_0}{D} dy \Rightarrow \frac{d^3 w}{dy^3}(t + \Delta t) - \frac{d^3 w}{dy^3}(t) = \frac{q_0}{D}(t + \Delta t) - \frac{q_0}{D} \Delta t \\ \Rightarrow \frac{d^3 w}{dy^3}(t + \Delta t) &= \frac{q_0 \Delta t}{D}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Etsitään nyt yhtälön (C.1) ratkaisua alueessa $y \geq t + \Delta t$. Siellä siis $q(y) = 0$, joten kysymyksessä on homogeeninen yhtälö. Kuvan C.1 koordinaatin y' avulla lausuttuna homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on (vrt. taulukko 6.1)

$$w(y') = (A + By') \cos \alpha y' + (C + Dy') \sin \alpha y' \quad (\text{C.5})$$

ja sen on toteutettava alkuehdot

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw}{dy'}(0) = 0, \quad \frac{d^2 w}{dy'^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3 w}{dy'^3}(0) = \frac{q_0 \Delta t}{D}. \quad (\text{C.6})$$

Jälkimmäisistä seuraa (taulukkoa 6.1 hyväksi käyttäen) yhtälöt

$$\begin{aligned} w(0) &\equiv A = 0, \\ \frac{dw}{dy}(0) &\equiv \alpha(C + B) = 0, \\ \frac{d^2 w}{dy^2}(0) &\equiv \alpha^2(A + 2D) = 0, \\ \frac{d^3 w}{dy^3}(0) &\equiv \alpha^3(C + 3B) = \frac{q_0 \Delta t}{D}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

joista seuraa integrointivakioille arvot

$$A = D = 0, \quad B = -C = \frac{q_0 \Delta t}{2\alpha^3 D} \quad (\text{C.8})$$

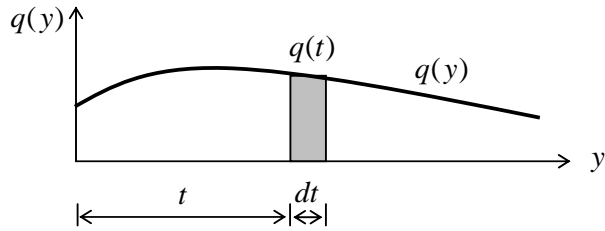
Taipumalle $w(y')$ saadaan näin tulos

$$w(y') = \frac{q_0 \Delta t}{2\alpha^3 D} (\alpha y' \cosh \alpha y' + \sinh \alpha y'), \quad (\text{C.9})$$

joka alkuperäisen koordinaatin y avulla lausuttuna kuuluu

$$w(y) = \frac{q_0 \Delta t}{2\alpha^3 D} [\alpha(y - t - \Delta t) \cosh \alpha(y - t - \Delta t) + \sinh \alpha(y - t - \Delta t)], \quad y \geq t + \Delta t. \quad (\text{C.10})$$

Tarkastellaan nyt varsinaista tehtävää eli yhtälön (C.1) kuormitusta $q(y)$ vastaavan yksityisratkaisun määrittämistä.



Kuva C.2: Funktiota $q(y)$ vastaavan yksityisratkaisun muodostaminen.

Kuvassa C.2 esitetystä differentiaalisesta kuormituksesta aiheutuva koko taipuman differentiaalinen osuus $dw(y)$ saadaan kaavasta (C.10) sijoituksella $\Delta t = dt$ ja ottamalla lisäksi huomioon, että differentiaalinen pituus dt on pituuteen t nähden häviävän pieni. Tulos on

$$dw(y) = \frac{q(t)dt}{2\alpha^3 D} [\alpha(y-t) \cosh \alpha(y-t) + \sinh \alpha(y-t)], \quad y \geq t. \quad (\text{C.11})$$

Koko taipuma $w(y)$ saadaan summaamalla kaikki välillä $0 \leq t \leq y$ olevat kuormituksen differentiaaliset osuudet. Tämä tapahtuu integroimalla välin yli. Tulokseksi saadaan

$$w(y) = \frac{1}{2\alpha^3 D} \int_0^y q(t) [\alpha(y-t) \cosh \alpha(y-t) + \sinh \alpha(y-t)] dt. \quad (\text{C.12})$$

Tämä on etsitty yksityisratkaisu (6.17)

Liite D: Lévy'n ratkaisussa esiintyvän differentiaaliyhtälön (6.13) yksityisratkaisu (6.18)

Tarkastellaan tapausta, jossa kuormitus $q(x, y)$ on koordinaatin y suhteen lineaarinen funktio. Tällöin sen sinisarjan kerroin $q_i(y)$ on myös lineaarinen y :n funktio. Otaksutaan, että yksityisratkaisua vastaava taipuma $w(x, y)$ muuttuu vastaavalla tavalla lineaarisesti y :n funktiona. Sen sinisarjan kerroin $w_i(y)$ on siten myös lineaarinen y :n funktio. Nyt

$$\frac{d^2 w_i}{dy^2} = \frac{d^4 w_i}{dy^4} = 0 \quad (\text{D.1})$$

ja differentiaaliyhtälö (6.13) supistuu muotoon

$$w_i \alpha_i^4 = \frac{q_i}{D}. \quad (\text{D.2})$$

Tästä saamme taipuman sarjan kertoimille tuloksen

$$\underline{\underline{w_i = \frac{q_i}{\alpha_i^4 D}}}. \quad (\text{D.3})$$

Tämä on etsitty yksityisratkaisu (6.18).