



# 1. Matematiikan käsitteitä ja merkintöjä

Seuraavassa esitellään joitakin matematiikan kursseista enemmän tai vähemmän tuttuja käsitteitä. Päätarkoituksena on esitellä näissä luennoissa niille käytettäviä merkintätapoja.

## 1.1 Matriiseista

Matriisi  $[a]$ , jonka dimensiot ovat  $m \times n$ , on järjestetty suorakulmainen taulukko, jossa on  $m \cdot n$  alkia. Käytämme sille merkintää

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

siten, että  $a_{ij}$  matriisin  $[a]$   $i$ :nnessä rivin ja  $j$ :nnessä sarakkeen alkiota. Matriisin  $[a]$

**transpoosi** on toinen matriisi, jolle käytetään merkintää  $[a]^T$ , jonka dimensiot ovat  $n \times m$  ja jonka alkiot ovat samat kuin  $[a]$ :n paitsi, että rivi- ja sarakenumerot on vaihdettu, ts.

$$[a]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Matriisia, jonka rivien ja sarakkeiden lukumäärä on sama ts.  $m = n$  kutsutaan **neliömatriisiksi**. Matriisia, jossa on vain yksi rivi ts.  $m = 1$ , kutsutaan **rivimatriisiksi** tai myös **vaakavektoriksi**. Rivimatriisille  $[b]$ , jossa on  $n$  alkia  $b_i$ , käytetään merkintää

$$[b] = [b_1, b_2, \dots, b_n]. \quad (1.3)$$

Matriisia, jossa on vain yksi sarake ts.  $n = 1$ , kutsutaan **sarakematriisiksi** tai myös **pystyvektoriksi**. Sarakematriisille  $\{c\}$ , jossa on  $m$  alkia  $c_i$ , käytetään merkintää

$$\{c\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{Bmatrix}. \quad (1.4)$$

Sarakematriisin merkinnässä käytettävien kaarisulkujen tarkoituksena on erottaa sarakematriisit matriiseista, jossa on useita rivejä ja sarakkeita.

Kahdelle matriisille  $[a]$  ja  $[b]$ , joilla on samat dimensiot, määritellään **matriisusumma**  $[c] = [a] + [b]$ . Summamatriisin alkiot saadaan yhteenlaskettavamatriisien vastinalkioiden summasta eli

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (1.5)$$

Kahdelle matriisille  $[a]$  ja  $[b]$ , joiden dimensiot ovat  $l \times m$  ja  $m \times n$ , määritellään **matriisitulo**  $[c] = [a][b]$ , jonka dimensiot ovat  $l \times n$ . Tulomatriisin alkiot saadaan kaavalla

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}. \quad (1.6)$$

Tämä merkitsee sitä, että tulomatriisin  $[c]$   $i$ :nnessä rivin ja  $j$ :nnessä sarakkeen alkiota  $c_{ij}$  saadaan laskemalla yhteen matriisin  $[a]$   $i$ :nnessä rivin ja matriisin  $[b]$   $j$ :nnessä sarakkeen vastinalkioiden tulot.

Neliömatriisin **determinantti** on luku, joka on summa kaikista niistä matriisin alkioiden tuloista, joissa otetaan yksi ja vain yksi alkiota jokaiselta riviltä ja yksi ja vain yksi alkiota jokaiselta sarakeelta, ja joiden merkit määräytyvät tietyn säännön mukaisesti. Neliömatriisin  $[a]$  determinanttia merkitään

$$\det[a] = |a| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.7)$$

$1 \times 1$  matriisin  $[a] = a_{11}$  determinantin arvo on  $\det[a] = |a_{11}| = a_{11}$ .  $2 \times 2$  matriisin  $[a]$  determinantin arvo saadaan kaavalla

$$\det[a] \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.8)$$

$3 \times 3$  matriisin determinantin arvo voidaan määrittää kaavalla

$$\det[a] \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

(Kehitetty 1. vaakarivin suhteen, ks. seuraava sivu.)

Yleinen tapa determinantin arvon määrittämiseksi on kehittää se halutun pysty- tai vaakarivin  $k$  suhteen kaavoilla

$$\det[a] = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} = a_{1k} A_{1k} + \dots + a_{nk} A_{nk}, \quad (1.10)$$

$$\det[a] = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj} = a_{k1} A_{k1} + \dots + a_{kn} A_{kn}.$$

Termi  $A_{ij}$  on alkion  $a_{ij}$  ns. **komplementti**

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}, \quad (1.11)$$

missä  $D_{ij}$  on determinantin alkion  $a_{ij}$  **alideterminantti**. Se on sen  $(n-1) \times (n-1)$  matriisin determinantti, joka saadaan poistamalla  $[a]$ :sta alkion  $a_{ij}$  sisältävä pysty- ja vaakarivi.

Neliömatriisin  $[a]$  **käänteismatriisi**  $[a]^{-1}$  on matriisi, jolle pätee

$$[a]^{-1}[a] = [a][a]^{-1} = [I], \quad (1.12)$$

missä

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

on yksikömmatriisi.

Käänteismatriisin yleinen lauseke on

$$[a]^{-1} = \frac{1}{\det[a]} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

jossa on syytä huomata komplementtien  $A_{ij}$  sijoitus transponoituihin aseisiin. Käänteismatriisi on olemassa vain silloin, kun  $\det[a] \neq 0$ . Jos  $\det[a] \neq 0$ , matriisin sanotaan olevan **säännöllinen**, ja jos  $\det[a] = 0$ , **singulaarinen**.  $2 \times 2$  matriisin käänteismatriisille saadaan aluksi

$$[a]^{-1} = \frac{1}{\det[a]} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Komplementeille saadaan helposti  $A_{11} = a_{22}$ ,  $A_{12} = -a_{21}$ ,  $A_{21} = -a_{12}$  ja  $A_{22} = A_{11}$ , joten  $2 \times 2$  matriisin käänteismatriisi saa muodon

$$[a]^{-1} = \frac{1}{\det[a]} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Tämä kaava on melko helppo muistaa. Sen mukaan  $2 \times 2$  matriisin  $[a]$  käänteismatriisi saadaan kertomalla determinantin käänteisarvolla matriisi, joka saadaan matriisista  $[a]$  vaihtamalla diagonaalitermit ja ei-diagonaalitermien merkki.

Tarkastellaan **lineaarista yhtälöryhmää**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1.16)$$

jossa  $n$  tuntematonta ja  $n$  yhtälöä. Sen matriisimuoto on

$$[a]\{x\} = \{b\}, \quad (1.17)$$

missä

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}. \quad (1.18)$$

Neliömatriisia  $[a]$  kutsutaan yhtälöryhmän **kerroinmatriisiksi** ja pystyvektoria  $\{b\}$  sen **vakiovektoriksi**. Yhtälöryhmän ratkaisu syntyy muodollisesti kertomalla yhtälön kumpikin puoli vasemmalta käänteismatriisilla  $[a]^{-1}$ :

$$\begin{aligned} [a]^{-1}[a]\{x\} &= [a]^{-1}\{b\} \Rightarrow [I]\{x\} = [a]^{-1}\{b\} \\ \Rightarrow \{x\} &= [a]^{-1}\{b\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Käytännössä jos  $n \geq 4$ , käänteismatriisin määrittäminen käsin alkaa käydä työlääksi. Tällöin yhtälöryhmä kannattaa ratkaista laskimella tai tietokoneella, jonka valmisohjelma perustuu tavallisesti Gaussin algoritmiin.

## 1.2 Vektoreista

Vektori kolmidimensioisessa avaruudessa määritellään suunnattuna janana, jolla on annettu suuruus ja suunta. Tämän monisteen tekstissä merkitsemme vektoria sen päätepisteiden P ja Q avulla muodossa  $\overline{PQ}$  tai paksunnetulla kirjaimella, esimerkiksi  $\mathbf{a}$ . Käsin kirjoitetussa tekstissä käytämme ylänuolta  $\bar{a}$  tai yläviivaa  $\bar{a}$ .

Vektorit ovat **yhtä suuria**, jos niillä on sama suuruus ja suunta. **Yksikkövektori** on vektori, jonka suuruus on 1. **Nollavektori** on vektori, jonka suuruus on nolla. Sitä merkitsemme  $\mathbf{0}$  (tai käsin kirjoituksessa  $\bar{0}$ ). Käytämme symboleja  $|\overline{PQ}|$ ,  $|\mathbf{a}|$  ja  $a$  esittämään  $\overline{PQ}$ :n ja  $\mathbf{a}$ :n **suuruuksia** (itseisarvoja).

Kolmidimensioisessa avaruudessa, johon on liitetty karteeminen koordinaatisto  $x, y, z$ , jokainen vektori  $\mathbf{a}$  voidaan tunnetusti esittää muodossa

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1.20)$$

missä  $a_x, a_y$  ja  $a_z$  ovat  $\mathbf{a}$ :n komponentit sekä  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  ovat koordinaatiston **kantavektorit**, eli positiivisten koordinaattiakselien  $x, y$  ja  $z$  suuntaiset yksikkövektorit. Informaation vektorista  $\mathbf{a}$  (ko. koordinaatistossa) sisältyy siis sen kolmeen komponenttiin  $a_x, a_y$  ja  $a_z$ . Näin se voidaan myös esittää esimerkiksi sarakematriisina

$$\{\mathbf{a}\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}. \quad (1.21)$$

Vektorin  $\mathbf{a}$  **itseisarvo**, eli **suuruus** on siten

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\{\mathbf{a}\}^T \{\mathbf{a}\}}. \quad (1.22)$$

Vektoreiden  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  **skalaaritulo** (eli **pistetulo**) määritellään kaavalla

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \dots (0 \leq \theta \leq \pi), \quad (1.23)$$

missä  $\theta$  on vektoreiden välinen kulma. Toisaalta se on tulo, jonka tekijöinä ovat vektorin suuruus ja toisen vektorin komponentti ensimmäisen suunnalle, ts.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} : n \text{ suuruus})(\mathbf{b} : n \text{ komponentti } \mathbf{a} : \text{lle}) \quad (1.24)$$

Vektoreiden  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  skalaaritulo voidaan myös esittää niiden komponenttien avulla

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \{\mathbf{a}\}^T \{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{b}\}^T \{\mathbf{a}\} \quad (1.25)$$

Tässä yhteydessä on tärkeää mainita kaavaan (1.23) perustuva, näissä luennoissa varsin usein esiintyvä kaava, jolla voidaan määrittää annetun vektorin skalaarikomponentti haluttuun suuntaan: Vektorin  $\mathbf{a}$  skalaarikomponentti, suuntaan jonka määrittelee yksikkövektori  $\mathbf{n}$ , saadaan kaavalla

$$a_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}. \quad (1.26)$$

Samalla tavalla kuin kahden vektorin skalaaritulo on skalaarisuure, on kahden  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  vektorin **vektoritulo** (tai **ristitulo**) uusi vektori  $\mathbf{c}$ ; ja voimme kirjoittaa  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Vektorin  $\mathbf{c}$  suuruus määritellään kaavalla

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \dots (0 \leq \theta \leq \pi), \quad (1.27)$$

missä  $\theta$  on  $\mathbf{a}$ :n ja  $\mathbf{b}$ :n välinen kulma ja sen suunta määritellään kohtisuoraksi  $\mathbf{a}$ :n ja  $\mathbf{b}$ :n määrittelemää tasoa vastaan sillä tavalla, että  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ja  $\mathbf{c}$  muodostavat oikeakätisen systeemin. Vektoreiden  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  vektoritulo voidaan esittää niiden komponenttien avulla muodossa:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.28)$$

Vektoritulon  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  itseisarvo  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  on yhtä suuri kuin sen suunnikkaan pinta-ala, jonka sivuina ovat vektorit  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$ .

Vektoreiden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ja  $\mathbf{c}$  **skalaarikolmitulon** arvo voidaan määrittää kaavalla

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.29)$$

Se on yhtä suuri kuin sen suuntaissärmiön tilavuus, jonka sivuina ovat vektorit  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ja  $\mathbf{c}$ . Vektoreiden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ja  $\mathbf{c}$  **vektorikolmitulon** määrittämiseen voidaan käyttää seuraavaa kehityskaavaa

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (1.30)$$

Vektorikäsitteilyssä on usein mukava käyttää hyväksi kantavektoreiden piste- ja ristituloille helposti saatavia seuraavia tuloksia

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (1.31)$$

ja

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \begin{cases} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}. \end{cases} \quad (1.32)$$

Funktion  $f(x, y, z)$  kokonaisdifferentiaali

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1.33)$$

on sen differentiaalinen muutos siirryttäessä pisteestä  $P(x, y, z)$  viereiseen pisteeseen  $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ . Se voidaan esittää vektorimuodossa seuraavasti

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.34)$$

missä  $d\mathbf{x} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$  on vastaava paikkavektorin differentiaalinen muutos ja  $\vec{\nabla}$  on derivointioperaattori **nabla**, joka kohdistettuna funktioon  $f$  antaa vektorin

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1.35)$$

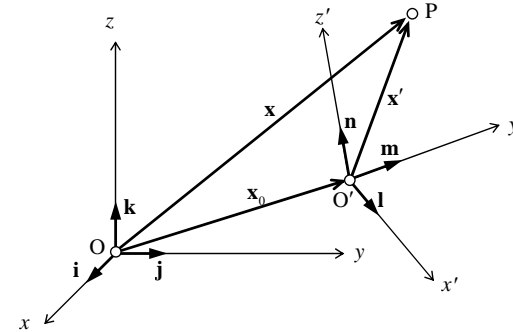
### 1.3 Koordinaatiston muunnos

Tarkastellaan karteesisista koordinaatistoa  $x, y, z$ , jonka kantavektorit ovat  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ja origo on pisteessä  $O$ , sekä koordinaatistoa  $x', y', z'$ , jonka kantavektorit ovat  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$  ja origo on pisteessä  $O'$  (kuva 1.1). Kantavektorit  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$  koordinaatistossa  $x, y, z$  ovat

$$\mathbf{l} = l_x \mathbf{i} + l_y \mathbf{j} + l_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{m} = m_x \mathbf{i} + m_y \mathbf{j} + m_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} \quad (1.36)$$

ja origon  $O'$  paikkavektori on

$$\mathbf{x}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}. \quad (1.37)$$



**Kuva 1.1:** Koordinaatiston muunnos

Tarkasteltavan pisteen  $P$  paikkavektorit näissä koordinaatistoissa ovat

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{x}' = x'\mathbf{l} + y'\mathbf{m} + z'\mathbf{n}. \quad (1.38)$$

Kuvan 1.1 perusteella saadaan  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}'$ , josta seuraa

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0. \quad (1.39)$$

Kertomalla tämä yhtälö pistemäisesti puolittain kantavektoreilla  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$  ja  $\mathbf{n}$  sekä soveltamalla kaavaa (1.26), saadaan

$$\begin{aligned} x' &= l_x(x - x_0) + l_y(y - y_0) + l_z(z - z_0), \\ y' &= m_x(x - x_0) + m_y(y - y_0) + m_z(z - z_0), \\ z' &= n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) \end{aligned} \quad (1.40)$$

eli matriisimuodossa

$$\{x'\} = [L](\{x\} - \{x_0\}) \quad (1.41)$$

missä

$$\{x'\} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}, \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \{x_0\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (1.42)$$

ja matriisia

$$[L] = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

kutsutaan **koordinaatiston muunnosmatriisiksi**. Tämän matriisin jälkimmäinen muoto on saatu toteamalla, että  $l_x = \cos(x', x)$ ,  $l_y = \cos(x', y)$ , jne., missä  $\cos(x', x)$ ,  $\cos(x', y)$ , jne. ovat koordinaattiakselien välisiä suuntakosineja.

Koordinaatiston muunnosmatriisi osoittautuu olevan **ortogonaalinen**, eli sen transpoosi on myös sen käänteismatriisi, eli

$$[L]^T = [L]^{-1}. \quad (1.44)$$

Tämä tulos todetaan kirjoittamalla ensin seuraava yhtälökettju:

$$\begin{aligned} [L][L]^T &= \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_x l_x + l_y l_y + l_z l_z & l_x m_x + l_y m_y + l_z m_z & l_x n_x + l_y n_y + l_z n_z \\ m_x l_x + m_y l_y + m_z l_z & m_x m_x + m_y m_y + m_z m_z & m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z \\ n_x l_x + n_y l_y + n_z l_z & n_x m_x + n_y m_y + n_z m_z & n_x n_x + n_y n_y + n_z n_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} & \mathbf{l} \cdot \mathbf{m} & \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{l} & \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} & \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} & \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} & \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]. \end{aligned}$$

Käytettiin hyväksi tietoa, että koordinaatiston  $x', y', z'$  koordinaattiakselit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli se on ortogonaalinen. Tulos (1.44) seuraa nyt saadusta yhteydestä käänteismatriisin määritelmän nojalla. Kaavasta (1.41) seuraa nyt käänteinen yhteys

$$\{x\} = \{x_0\} + [L]^T \{x'\}. \quad (1.45)$$

Yhtälöt (1.41) ja (1.45) ilmaisevat pisteen P koordinaattien  $x, y, z$  ja  $x', y', z'$  välisen koordinaattimuunnoksen.

Tarkastellaan vielä miten vektorin  $\mathbf{a}$  komponentit käyttäytyvät tarkasteltavassa koordinaatiston muunnoksessa. Olkoot vektorin päätepisteet A ja B. Tällöin

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A, \quad (1.46)$$

missä  $\mathbf{x}_A$  ja  $\mathbf{x}_B$  ovat sen päätepisteiden paikkavektorit. Sen komponenteille  $a_x, a_y, a_z$  ja  $a'_x, a'_y, a'_z$  saadaan näin

$$\{a\} = \{x_B\} - \{x_A\}, \quad \{a'\} = \{x'_B\} - \{x'_A\}, \quad (1.47)$$

missä siis

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}, \quad \{a'\} = \begin{Bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{Bmatrix} \quad (1.48)$$

Soveltamalla tuloksia (1.41) ja (1.45), saadaan näistä helposti

$$\{a'\} = [L]\{a\} \quad (1.49)$$

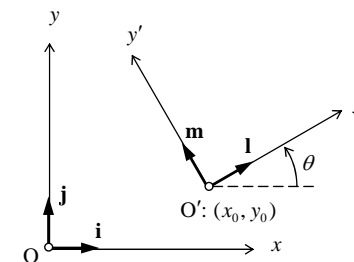
ja

$$\{a\} = [L]^T \{a'\}. \quad (1.50)$$

Yhtälöt (1.49) ja (1.50) ilmaisevat, kuinka vektorin  $\mathbf{a}$  komponentit  $a_x, a_y, a_z$  ja  $a'_x, a'_y, a'_z$  käyttäytyvät koordinaattimuunnoksessa.

**Tasotapauksessa** (vrt. kuva 1.2) koordinaatiston muunnoksen matriisikaavat (1.41), (1.45), (1.49) ja (1.50) ovat myös voimassa. Nyt vain vektoreilla on kaksi komponenttia, joten

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \{x'\} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}, \quad \{a\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}, \quad \{a'\} = \begin{Bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{Bmatrix}, \quad \{x_0\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} \quad (1.51)$$



**Kuva 1.2:** Koordinaatiston muunnos tasotapauksessa

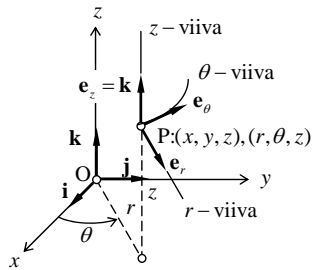
ja koordinaatiston muunnosmatriisi on  $2 \times 2$  matriisi

$$[L] = \begin{bmatrix} l_x & l_y \\ m_x & m_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (1.52)$$

jossa kulma  $\theta$  on  $x$ - ja  $x'$ - akselin välinen kulma.

#### 1.4 Sylinterikoordinaatisto

Tarkastellaan **sylinterikoordinaatistoa** (vrt. kuva 1.3), jonka origo yhtyy karteesisen koordinaatiston origoon ja akseli sen  $z$ -akseliin. Tällöin karteesisten koordinaattien  $x, y, z$  ja sylinterikoordinaattien  $r, \theta, z$  yhteydet ovat



**Kuva 1.3:** Sylinterikoordinaatit, sylinterikoordinaatiston koordinaattiviivat ja kantavektorit

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z \end{cases} \quad (1.53)$$

ja vastaavasti sylinteri- ja karteesisten koordinaattien yhteydet ovat

$$\begin{cases} \theta = \arctan(y/x), \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = z. \end{cases} \quad (1.54)$$

Koordinaatiston tiettyä koordinaattia vastaava **koordinaattiviiva** ajatellaan viivaksi, jonka piste P piirtää, kun tämä koordinaatti muuttuu muiden koordinaattien pysyessä vakioina. Sylinterikoordinaatteja  $r, \theta$  ja  $z$  vastaavat  $r$ -,  $\theta$ - ja  $z$ -koordinaattiviivat on esitetty kuvassa 1.3. Nämä viivat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, josta syystä

sylinterikoordinaatisto on **suorakulmainen** (ortogonaalinen) koordinaatisto, kuten karteesinen koordinaatistokin on. Sylinterikoordinaattien  $\theta$ -viiva on kaareva, josta syystä sylinterikoordinaatisto on esimerkki **käyräviivaisesta** koordinaatistosta. Karteesinen koordinaatisto on sitä vastoin **suoraviivainen**.

Koordinaatiston kantavektorit ovat koordinaattiviivojen suuntaiset yksikkövektorit. Karteesisen koordinaatiston kantavektorit  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  ovat kotisuorassa toisiaan vastaan ja lisäksi vakioita. Tämän johdosta erilaiset mekaniikan tarkastelut ja yhtälöt tässä koordinaatistossa ovat mahdollisimman yksinkertaisia. Myös sylinterikoordinaatiston kantavektorit  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  ja  $\mathbf{e}_z$ , ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, mutta ne eivät enää kaikki ole vakioita.

Sylinterikoordinaatiston kantavektorit karteesisen koordinaatiston kannassa lausuttuina ovat

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}. \quad (1.55)$$

Havaitaan, että kantavektorit  $\mathbf{e}_r$  ja  $\mathbf{e}_\theta$  riippuvat koordinaatista  $\theta$ . Tämä johdosta on tärkeää huomata, että suoritettaessa osittaisderivoineja, kaikki **kantavektorit eivät ole vakioita**. Derivoimalla kantavektorit  $\mathbf{e}_r$  ja  $\mathbf{e}_\theta$  koordinaatin  $\theta$  suhteen ja vertaamalla tuloksia lausekkeiden (1.55) kanssa saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r. \quad (1.56)$$

Kantavektorien muut (ensimmäiset) osittaisderivaatat sylinterikoordinaattien  $r, \theta, z$  suhteen ovat nollia. Vektori  $\mathbf{a}$  sylinterikoordinaatiston kannassa lausuttuna on

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_z \mathbf{e}_z, \quad (1.57)$$

missä  $a_r, a_\theta$  ja  $a_z$  ovat sen asianomaiset komponentit.

Karteesisen- ja sylinterikoordinaatiston välinen koordinaatiston muunnosmatriisi saadaan ajattelemalla pisteeseen P sijoitetuksi karteesinen koordinaatisto  $x', y', z'$ , jonka akselit yhtyvät  $r$ -,  $\theta$ - ja  $z$ -viivojen suuntiin tässä pisteessä. Tällöin  $x', y', z'$  koordinaatiston kantavektorit ovat  $l_x = \cos \theta, l_y = \sin \theta, l_z = 0, m_x = -\sin \theta, m_y = \cos \theta, m_z = 0, n_x = 0, n_y = 0$  ja  $n_z = 0$ , joten koordinaatiston muunnosmatriisiksi saadaan

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

Funktion  $f(r, \theta, z)$  kokonaisdifferentiaali sylinterikoordinaatistossa

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1.59)$$

on sen differentiaalinen muutos siirryttäessä pisteestä  $P:(r, \theta, z)$  viereiseen pisteeseen  $Q:(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$ . Se voidaan esittää vektorimuodossa seuraavasti

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.60)$$

missä  $d\mathbf{x} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + dz\mathbf{e}_z$  on vastaava paikkavektorin differentiaalinen muutos ja  $\vec{\nabla}$  on **nabla operaattori** sylinterikoordinaatistossa, joka kohdistettuna funktioon  $f$  antaa vektorin

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (1.61)$$



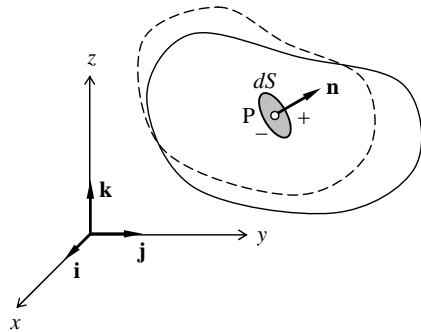
## 2. Jännitystila

### 2.1 Jännitysvektori eli traktio

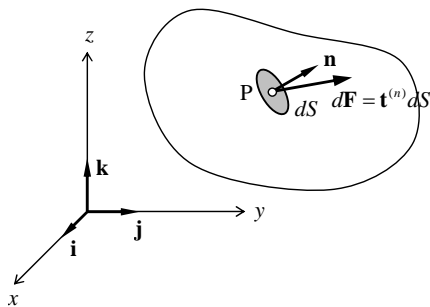
Tarkastellaan kappaletta, joka siihen vaikuttavan ulkoisen kuormituksen vaikutuksesta muuttaa muotoaan eli **deformoituu**. Kappaleeseen syntyy deformaation seurauksena sisäinen **jännitystila**, jonka luonnetta tarkastellaan seuraavassa. Ajatellaan deformaation kappaleen tarkasteltavaan pisteeseen P asetetuksi pinta-alkio  $dS$ , jota vastaan kohtisuora yksikkövektori (yksikkönormaalivektori) on

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}, \quad (2.1)$$

(vrt. kuva 2.1). Jotta kappaleen deformaation pinta-alkion vastakkaiset puolet pysyisivät toisissaan kiinni, täytyy niiden välillä vaikuttaa voima.



Kuva 2.1: Deformoitunut kappale ja sen sisällä oleva pinta-alkio



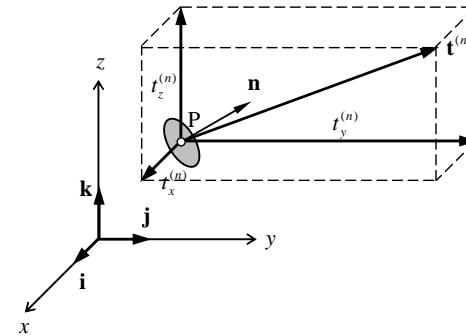
Kuva 2.2: Jännitysvektorin määrittely

Merkitään differentiaalista voimaa, jolla pinta-alkion  $dS$  positiivinen puoli (yksikkövektorin osoittama puoli) vaikuttaa sen negatiiviseen puoleen symbolilla  $d\mathbf{F}$ . **Jännitysvektori** eli **traktio**  $\mathbf{t}^{(n)}$  määritellään nyt tarkasteltavaan pisteeseen P ja

yksikkönormaaliiin  $\mathbf{n}$  liittyvänä pinta-alaa kohti laskettuna voimana (vektori, kuva 2.2), jonka avulla differentiaalinen voima  $d\mathbf{F}$  saadaan lausekkeesta

$$d\mathbf{F} = \mathbf{t}^{(n)} dS. \quad (2.2)$$

Jännitysvektorin symbolissa  $\mathbf{t}^{(n)}$  yläindeksi  $(n)$  viittaa yksikkövektoriin  $\mathbf{n}$  muistuttaen siitä, että sen arvo ei riipu pelkästään sijainnista kappaleessa (piste P) vaan myös pinta-alkion asennosta, jonka yksikkövektori  $\mathbf{n}$  ilmaisee. Tämä yläindeksi voidaan myös jättää merkitsemättä. Jännitysvektorin dimensio on siis voima jaettuna pinta-alalla.



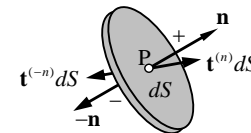
Kuva 2.3: Jännitysvektori ja sen suorakulmaiset komponentit

Jännitysvektori voidaan esittää suorakulmaisessa  $x, y, z$ -koordinaatistossa muodossa (kuva 2.3)

$$\mathbf{t}^{(n)} = t_x^{(n)} \mathbf{i} + t_y^{(n)} \mathbf{j} + t_z^{(n)} \mathbf{k}, \quad (2.3)$$

missä  $t_x^{(n)}$ ,  $t_y^{(n)}$  ja  $t_z^{(n)}$  ovat sen skalaarikomponentit.

Pisteeseen P liittyvä jännitysvektori riippuu siis valitusta suunnasta  $\mathbf{n}$ . Erityisesti suuntaan  $-\mathbf{n}$  liittyvää jännitysvektoria merkitään seuraavassa  $\mathbf{t}^{(-n)}$ . Kuva 2.4 esittää pisteeseen P liittyvän pinta-alkion  $dS$  muotoisen ohuen levyä kappaleen osan vapaakappalekuviota. Levyä paksuus otaksutaan tässä pinta-alkion  $dS$  mittoihin nähden häviävän pieneksi. Tällöin voidaan levyä vaikuttava tilavuusvoima sekä sen reunoihin vaikuttavat voimat jättää huomiotta.



Kuva 2.4: Kappaleen ohuen levyä kappaleen osan vapaakappalekuviota

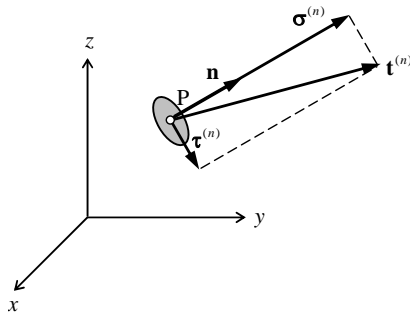
Levyn tasapainoyhtälö on

$$\mathbf{t}^{(n)} dS + \mathbf{t}^{(-n)} dS = \mathbf{0},$$

josta seuraa tulos

$$\mathbf{t}^{(-n)} = -\mathbf{t}^{(n)}, \quad (2.4)$$

eli tarkasteltavaan pinta-alkion vastakkaisiin puoliin liittyvät jännitysvektorit ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset.



Kuva 2.5: Normaalijännitys ja leikkausjännitys

Jännitysvektorin  $\mathbf{t}^{(n)}$  pinta-alkion normaalin suuntaista komponenttia  $\sigma^{(n)}$  kutsutaan **normaalijännitysvektoriksi** ja pinta-alkion suuntaista komponenttia  $\tau^{(n)}$  **leikkausjännitysvektoriksi** (kuva 2.5). Jännitysvektorin normaalin suuntaista skalaarikomponenttia  $\sigma_n$  kutsutaan **normaalijännitykseksi**. (Sille käytetään alaindeksiä  $n$ , joka viittaa sekä sen vaikutuspintaan että positiiviseen suuntaan, jotka molemmat yksikkövektori  $\mathbf{n}$  ilmaisee.) Jos se on positiivinen, kysymyksessä on vetojännitys, ja jos se on negatiivinen, kysymyksessä on puristusjännitys. Normaalijännitys saadaan vektorioopin perusteella kaavalla

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^{(n)} = n_x t_x^{(n)} + n_y t_y^{(n)} + n_z t_z^{(n)} \quad (2.5)$$

ja normaalijännitysvektori on siten

$$\sigma^{(n)} = \sigma_n \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

Leikkausjännitysvektorille saadaan kuvan 2.5 perusteella

$$\tau^{(n)} = \mathbf{t}^{(n)} - \sigma^{(n)} \quad (2.7)$$

ja sen itseisarvolle

$$\tau^{(n)} = |\tau^{(n)}| = \sqrt{|\mathbf{t}^{(n)}|^2 - |\sigma^{(n)}|^2} = \sqrt{|\mathbf{t}^{(n)}|^2 - \sigma_n^2}. \quad (2.8)$$

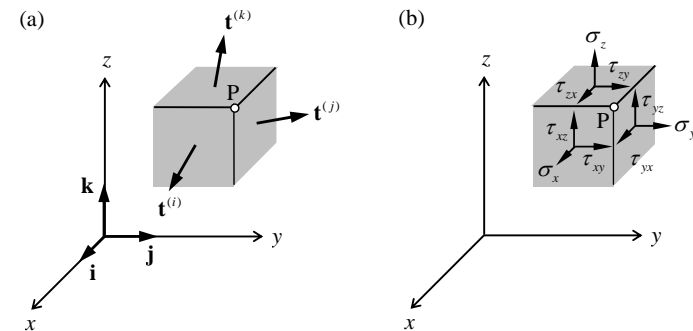
Jälkimmäistä kutsutaan myös pinta-alkion **leikkausjännityksen suuruudeksi**. (Käytetään yläindeksiä  $(n)$ , koska kysymyksessä ei ole skalaarikomponentti vaan vektorin  $\tau^{(n)}$  itseisarvo. Tarvittaessa voidaan myös puhua jännitysvektorin ja normaalijännityksen suuruuksista ja käyttää niille merkintöjä  $t^{(n)} = |\mathbf{t}^{(n)}|$  ja  $\sigma^{(n)} = |\sigma^{(n)}| = |\sigma_n|$ .)

## 2.2 Jännityskomponentit

Koordinaattitasojen suuntaisten pinta-alkioiden (vastaavat yksikkönormaalivektorit ovat  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$ ) jännitysvektorit  $\mathbf{t}^{(i)}$ ,  $\mathbf{t}^{(j)}$  ja  $\mathbf{t}^{(k)}$  tarkasteltavassa pisteessä P (kuva 2.6a) esitetään muodossa

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(i)} &= \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}, \\ \mathbf{t}^{(j)} &= \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}, \\ \mathbf{t}^{(k)} &= \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

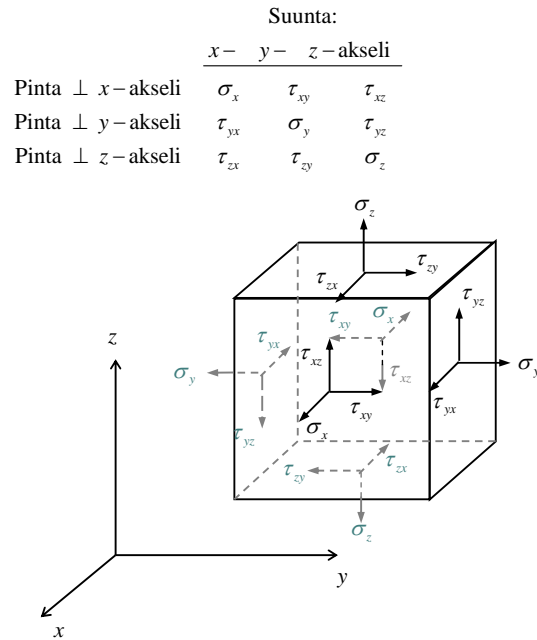
Näiden yhdeksää skalaarikomponenttia  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  ja  $\sigma_z$ , joita on havainnollistettu kuvassa 2.6, kutsutaan pisteen P **jännityskomponenteiksi**. Pintoja vastaan kohtisuorat jännityskomponentit  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\sigma_z$  ovat **normaalijännityksiä** ja pintojen suuntaiset komponentit  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  ja  $\tau_{zy}$  ovat **leikkausjännityksiä**.



Kuva 2.6 (a) koordinaattitasojen suuntaisten pinta-alkioiden jännitysvektorit ja (b) niiden skalaarikomponentit eli jännityskomponentit

Jännityskomponenttien alaindeksit viittaavat sekä niiden **vaikutuspintaan** että niiden **suuntaan**. Esimerkiksi normaalijännityksen  $\sigma_x$  ainoa alaindeksi  $x$  ilmaisee, että se vaikuttaa  $x$ -akselia vastaan kohtisuoralla pinnalla ja että se on  $x$ -akselin

suuntainen. Vastaavasti leikkausjännityksen  $\tau_{xy}$  ensimmäinen alaindeksi  $x$  ilmaisee, että se vaikuttaa  $x$ -akselia vastaan kohtisuoralla pinnalla ja toinen  $y$  ilmaisee, että se on  $y$ -akselin suuntainen. Jännityskomponenttien vaikutuspintoja ja suuntia havainnollistaa vielä oheinen kaavio.



**Kuva 2.7** Jännityskomponenttien positiiviset suunnat:

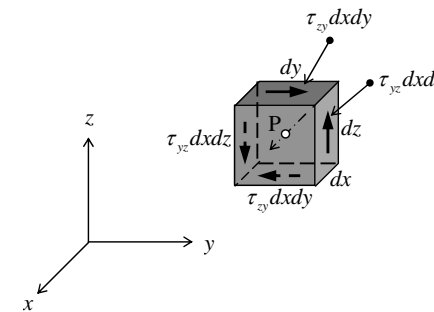
Kuvassa 2.7 on esitetty jännityskomponenttien **positiiviset suunnat**. Nämä ovat kaavan (2.4) perusteella kuvan särmiön vastakkaisilla tahkoilla vastakkaisuuntaiset. Tahkoilla, joiden **ulkoiset normaalit** suuntautuvat **positiivisten** koordinaattiakselien mukaisesti, myös **jännityskomponentit** suuntautuvat **positiivisten** koordinaattiakselien mukaisesti (kuvassa mustalla merkityt jännityskomponentit). Tahkoilla, joiden **ulkoiset normaalit** suuntautuvat **negatiivisten** koordinaattiakselien mukaisesti, myös **jännityskomponentit** suuntautuvat **negatiivisten** koordinaattiakselien mukaisesti (kuvassa harmaalla merkityt jännityskomponentit). Erityisesti **normaalijännitykset** ovat positiivisia, kun ne osoittavat särmiöstä **ulospäin** (ulkoisen normaalin suuntaan).

Jännityskomponentit esitetään usein matriisina

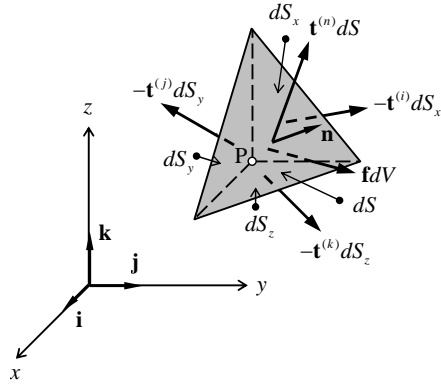
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

jota kutsutaan **jännitysmatriisiksi**. Koordinaattitasoja vastaan kohtisuoria jännityskomponentteja  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\sigma_z$  kutsutaan normaalijännityskomponenteiksi eli lyhyemmin **normaalijännityksiksi** ja koordinaattitasojen suuntaisia  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ , jne. leikkausjännityskomponenteiksi eli lyhyemmin **leikkausjännityksiksi**.

Jännityskomponentit eivät kuitenkaan ole toisistaan riippumattomia, vaan leikkausjännitysten välillä on yhteydet  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ,  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  ja  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ . Kuvan 2.7 suorakulmaiseen särmiöön viitaten ne merkitsevät, että tiettyyn särmiöön liittyvillä takoilla olevat särmiöä vastaan kohtisuorat leikkausjännitykset ovat yhtä suuret. Nämä yhteydet perustuvat tasapainoon ja ne tullaan johtamaan täsmällisemmin myöhemmin. Tässä esitetään yksinkertainen tarkastelu, jonka oikeellisuus varmentuu myöhemmässä johdossa. Tarkastellaan kuvan 2.8 mukaista suorakulmaisen särmiön muotoisen kappaleen differentiaalisen osan vapakappalekuviota, johon on merkitty vain ne voimat, jotka aiheuttavat momenttia osan keskipisteen P kautta kulkevan  $x$ -akselin suuntaisen akselin suhteen. Nämä voimat muodostavat kaksi voimaparia, ja momenttitasapainoyhtälö kyseisen akselin suhteen on  $\tau_{yz} dx dz \cdot dy - \tau_{xy} dx dy \cdot dz = 0$ , josta seuraa tulos  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ . Vastaavaan tapaan tarkastellen saadaan esitetyt kaksi muuta yhteyttä. Näin toisistaan riippumattomia jännityskomponentteja onkin vain **kuusi** kappaletta. Jännitysmatriisi  $[\sigma]$  on siten **symmetrinen** ja sille voidaan kirjoittaa  $[\sigma]^T = [\sigma]$ , missä yläindeksi  $T$  merkitsee matriisin transponointia. Näitä tietoja hyödynnetään jatkossa.



**Kuva 2.8** Suorakulmaisen särmiön muotoisen kappaleen differentiaalinen osa ja siihen vaikuttavia voimia



Kuva 2.9 Differentiaalisen tetraedrin vapaakappalekuvio

### 2.3 Jännitysvektorin komponenttien ja jännityskomponenttien välinen yhteys

Tarkastellaan kuvan 2.9 mukaista kappaleen sisällä olevan differentiaalisen tetraedrin vapaakappalekuviota. Sen vinon pintaan, jonka yksikkönormaalivektori on  $\mathbf{n}$ , vaikuttaa jännitysvektori  $\mathbf{t}^{(n)}$  sekä koordinaattiakseleita vastaan kohtisuoriin pintoihin, joiden yksikkönormaalivektorit ovat  $-\mathbf{i}$ ,  $-\mathbf{j}$  ja  $-\mathbf{k}$ , vaikuttavat jännitysvektorit  $\mathbf{t}^{(-i)} \equiv -\mathbf{t}^{(i)}$ ,  $\mathbf{t}^{(-j)} \equiv -\mathbf{t}^{(j)}$  ja  $\mathbf{t}^{(-k)} \equiv -\mathbf{t}^{(k)}$ . Lisäksi siihen vaikuttaa tilavuutta kohti laskettu ns. **tilavuusvoima**<sup>1</sup>  $\mathbf{f}$ . Tetraedriin vaikuttava voimaresultantti on

$$d\mathbf{F} = \mathbf{t}^{(n)} dS - \mathbf{t}^{(i)} dS_x - \mathbf{t}^{(j)} dS_y - \mathbf{t}^{(k)} dS_z + \mathbf{f} dV,$$

missä  $dV$  on tetraedrin tilavuus. Ottamalla huomioon, että vinon pinnan  $dS$  projektiolle on voimassa

$$dS_x = n_x dS, \quad dS_y = n_y dS, \quad dS_z = n_z dS$$

sekä, että tetraedrin tilavuus on

$$dV = \frac{1}{3} dS \cdot dh,$$

missä  $dh$  on tetraedrin huipun etäisyys vinosta pinnasta, voimaresultantti saa muodon

<sup>1</sup> Tilavuusvoimalla  $\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}$  tarkoitetaan tilavuutta kohti laskettua voimaa, joka aiheuttaa tarkasteltavassa pisteessä P olevaan tilavuusalkioon  $dV$  voiman  $d\mathbf{F} = \mathbf{f} dV$ . Yleisin rakennustekniikassa esiintyvä tilavuusvoima on oma pain. Jos  $z$ -akseli suuntautuu ylöspäin, omaa painoa vastaava tilavuusvoima on  $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{k}$ .

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{t}^{(n)} - n_x \mathbf{t}^{(i)} - n_y \mathbf{t}^{(j)} - n_z \mathbf{t}^{(k)} + \frac{1}{3} \mathbf{f} dh) dS \approx (\mathbf{t}^{(n)} - n_x \mathbf{t}^{(i)} - n_y \mathbf{t}^{(j)} - n_z \mathbf{t}^{(k)}) dS.$$

Yhtälöketjun viimeinen termi saatiin edellisestä pudottamalla sulkulausekkeen viimeinen termi differentiaalisen pienenä pois. Tasapainoehdosta  $d\mathbf{F} = \mathbf{0}$  seuraa nyt pinta-alkion, jonka yksikkönormaaliksi on  $\mathbf{n}$ , jännitysvektorille lauseke

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}^{(i)} n_x + \mathbf{t}^{(j)} n_y + \mathbf{t}^{(k)} n_z. \quad (2.11)$$

Tämän vektoryhtälön  $x$ - akselin suuntainen komponenttiyhtälö saadaan seuraavasti:

$$t_x^{(n)} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{t}^{(i)} n_x + \mathbf{i} \cdot \mathbf{t}^{(j)} n_y + \mathbf{i} \cdot \mathbf{t}^{(k)} n_z = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z,$$

ja  $y$ - ja  $z$ - akselien suuntaiset yhtälöt vastaavaan tapaan. Näin **jännitysvektorin komponenttien ja jännityskomponenttien** välille on saatu yhteydet

$$\begin{aligned} t_x^{(n)} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z, \\ t_y^{(n)} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z, \\ t_z^{(n)} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nämä yhteydet voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti

$$\{t\}^{(n)} = [\sigma]^T \{n\} = [\sigma] \{n\}, \quad (2.13)$$

missä

$$\{t\}^{(n)} = \begin{Bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_y^{(n)} \\ t_z^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

on jännitysvektorin komponenttien muodostama pystyvektori.

### 2.4 Normaalijännitys jännityskomponenttien avulla

Pinnan, jonka yksikkönormaalivektori on  $\mathbf{n}$ , normaalijännityksen lauseke (2.5) voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti

$$\sigma_n = \{n\}^T \{t\}^{(n)}. \quad (2.15)$$

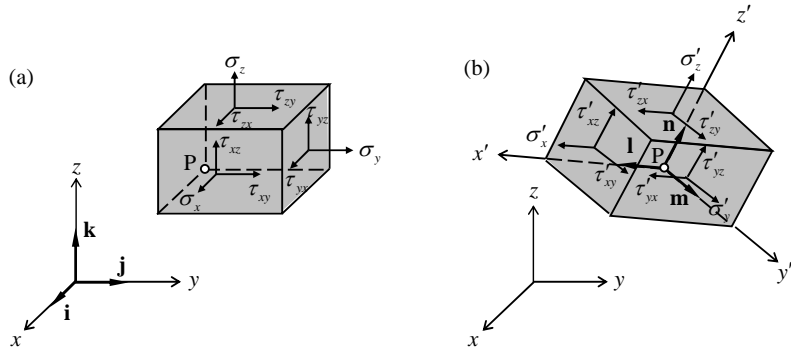
Sijoittamalla tähän jännitysvektorin komponenttien lauseke (2.13) saadaan

$$\sigma_n = \{n\}^T [\sigma] \{n\}. \quad (2.16)$$

Tämän kaavan avulla voidaan määrittää **normaalijännitys** pinnalla, jonka yksikkönormaalivektori on  $\mathbf{n}$ , kun **jännityskomponentit** tarkasteltavassa pisteessä P tunnetaan.

## 2.5 Jännityskomponentit koordinaatiston kierrossa

Määritetään jännityskomponentit koordinaatistossa  $x', y', z'$ , jonka kantavektorit ovat  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$  ja  $\mathbf{n}$  (kuva 2.10), kun ne koordinaatistossa  $x, y, z$  tunnetaan.



**Kuva 2.10** Jännityskomponentit koordinaatiston kierrossa: (a) tunnetut jännityskomponentit (b) määritettävät jännityskomponentit

Määrittelynsä mukaan jännityskomponentti  $\sigma'_x$  on jännitysvektorin  $\mathbf{t}^{(l)}$  skalaarikomponentti  $x'$ -akselin suuntaan, joten sille saadaan

$$\sigma'_x = \mathbf{l} \cdot \mathbf{t}^{(l)} = l_x t_x^{(l)} + l_y t_y^{(l)} + l_z t_z^{(l)} = \{\mathbf{l}\}^T \{\mathbf{t}\}^{(l)} = \{\mathbf{l}\}^T [\boldsymbol{\sigma}] \{\mathbf{l}\}.$$

Vastaavasti jännityskomponentti  $\tau'_{xy}$  on jännitysvektorin  $\mathbf{t}^{(l)}$  skalaarikomponentti  $y'$ -akselin suuntaan, joten sille saadaan

$$\tau'_{xy} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}^{(l)} = m_x t_x^{(l)} + m_y t_y^{(l)} + m_z t_z^{(l)} = \{\mathbf{m}\}^T \{\mathbf{t}\}^{(l)} = \{\mathbf{m}\}^T [\boldsymbol{\sigma}] \{\mathbf{l}\}.$$

Näin edeten voidaan määrittää samantyyppiset lausekkeet kaikille jännityskomponenteille  $\sigma'_x, \tau'_{xy}, \tau'_{xz}, \tau'_{yx}, \sigma'_y, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}, \tau'_{zy}$  ja  $\sigma'_z$ . Kaikki nämä lausekkeet voidaan esittää yhtenä matriisilausekkeena

$$[\boldsymbol{\sigma}'] = [\mathbf{L}][\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{L}]^T, \quad (2.17)$$

missä

$$[\boldsymbol{\sigma}'] = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

on kierretyn koordinaatiston jännitysmatriisi ja

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

on koordinaatiston muunnosmatriisi (1.43), joka muodostuu kantavektoreiden  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$  ja  $\mathbf{n}$  komponenteista. Kaava (2.19) oikeellisuus voidaan osoittaa esittämällä matriisi  $[\mathbf{L}]$  ja  $[\mathbf{L}]^T$  ositetussa muodossa

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} \{\mathbf{l}\}^T \\ \{\mathbf{m}\}^T \\ \{\mathbf{n}\}^T \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{L}]^T = [\{\mathbf{l}\} \quad \{\mathbf{m}\} \quad \{\mathbf{n}\}]$$

ja laskemalla jännityskomponentteja  $\sigma'_x, \tau'_{xy}$  jne. kaavaa (2.17) käyttäen. Matemaattisesti suureiden joukkoa, josta muodostettu matriisi  $[\boldsymbol{\sigma}]$  käyttäytyy karteesisen koordinaatiston muunnoksessa kaavan (2.17) mukaisesti, kutsutaan toisen kertaluvun tensoriksi. Tämän vuoksi lujuusopissa ja rakenteiden mekaniikassa puhutaan usein **jännitystensorista**, jonka komponentit ovat jännityskomponentit  $\sigma'_x, \tau'_{xy}$  jne..

## 2.6 Pääjännitykset

Tarkastellaan pisteen P jännitystilaa ja yritetään löytää suunta (yksikkönormaaliksi  $\mathbf{n}$ ), jota vastaavalla pinta-alkiolla **ei ole leikkausjännitystä** eli leikkausjännitysvektori  $\boldsymbol{\tau}^{(n)}$  häviää. Kaavan (2.7) perusteella tällöin tulisi olla voimassa

$$\mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \sigma_n \mathbf{n}$$

eli

$$t_x^{(n)} = \sigma n_x, \quad t_y^{(n)} = \sigma n_y, \quad t_z^{(n)} = \sigma n_z,$$

missä normaalijännityksen alaindeksi  $n$  on jätetty pois. Matriisimuodossa

$$\{\mathbf{t}\}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \{\mathbf{n}\}.$$

Kaavan (2.13) perusteella seuraa tästä

$$([\sigma] - \sigma[I])\{n\} = \{0\}, \quad (2.20)$$

missä  $[I]$  on  $3 \times 3$  yksikkövektori. Alkioittain kirjoitettuna matriisiyhtälö (2.20) saa muodon

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.21)$$

Se on homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä, jossa on kolme yhtälöä. Tuntemattomina ovat normaalijännitys  $\sigma$  sekä yksikkönormaalien komponentit  $n_x$ ,  $n_y$  ja  $n_z$ . Jotta homogeenisella yhtälöryhmällä (2.21) olisi ei-triviaali ratkaisu ( $\{n\} \neq \{0\}$ ), tulee sen kerroinmatriisin determinantin hävitä, joten saadaan ehto

$$\det([\sigma] - \sigma[I]) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (2.22)$$

Kehittämällä yhtälön (2.22) vasemman puolen determinanti, se saa muodon

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (2.23)$$

missä

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \det[\sigma] = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Yhtälö (2.23) on kolmannen asteen yhtälö, jossa on tuntemattomana pelkästään normaalijännitys  $\sigma$ , ja se voidaan siten ratkaista. Ratkaisuksi saadaan kolme arvoa  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$ , ja niitä kutsutaan **pääjännityksiksi**. Jos pääjännitykset esitetään **suuruusjärjestyksessä**, niille voidaan käyttää merkintöjä,  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  ja  $\sigma_{III}$ . Näin suurin mahdollinen pääjännitys tarkasteltavassa pisteessä P on  $\sigma_{\max} = \sigma_I$  ja pienin pääjännitys  $\sigma_{\min} = \sigma_{III}$ .

Koska pääjännitykset ovat kolmannen asteen yhtälön juuret, tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0, \quad (2.25)$$

josta se saadaan edelleen muotoon (2.23) ja kertoimille  $I_1$ ,  $I_2$  ja  $I_3$  lausekkeet

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Koska pääjännitykset  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  karakterisoivat tarkasteltavan pisteen fysikaalista jännitystilaa, ne ovat riippumattomia käytettävästä koordinaatistosta eli invariantteja. Täten yhtälöiden (2.26) perusteella myös kertoimet  $I_1$ ,  $I_2$  ja  $I_3$  ovat invariantteja ja niitä kutsutaan **jännitysinvariantteiksi**.

Käytännön laskuja varten on yhtälö (2.23) on mukavinta ratkaista taskulaskinta tai sopivaa matematiikkaohjelmaa (esim. Mathcad) käyttäen. **Huom!** Tentissä on käytettävä taskulaskinta, joten kolmannen asteen yhtälön ratkaisemien taskulaskimella kannattaa opetella.

Seuraavassa esitetään kaavat ja laskennan vaiheet, jos laskimessa ei ole mahdollisuutta kolmannen asteen yhtälön ratkaisemiseen. Lähteenä on käytetty teosta: M.R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1968, s.32. Määritetään ensin apusuureet  $Q$  ja  $R$  kaavoilla

$$Q = \frac{3I_2 - I_1^2}{9}, \quad R = \frac{2I_1^3 + 27I_3 - 9I_1I_2}{54} \quad (2.27)$$

ja toiseksi **diskriminantti**  $D$  kaavalla

$$D = Q^3 + R^2. \quad (2.28)$$

Jos  $D < 0$ , yhtälön juuret ovat reaalisia ja erisuuria. Jos  $D = 0$ , juuret ovat reaalisia ja vähintään kaksi niistä on yhtä suurta. Jos  $D > 0$ , yksi juuri on reaalinen ja kaksi muuta konjugaattiluvut. (Tätä viimeinen tapaus ei tässä tule kysymykseen, koska pääjännitykset ovat reaalilukuja.) Määritetään sitten apukulma  $\varphi$  kaavalla

$$\varphi = \arccos \frac{R}{\sqrt{-Q^3}} \quad (2.29)$$

ja lopuksi yhtälön juuret  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  kaavoilla

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi\right) + \frac{I_1}{3}, \\ \sigma_2 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 120^\circ\right) + \frac{I_1}{3}, \\ \sigma_3 &= 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 240^\circ\right) + \frac{I_1}{3}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Pääjännitysten  $\sigma_i$ ,  $i=1,2,3$  arvojen lisäksi on tarpeen tuntea myös niiden suunnat. Halutun pääjännityksen  $\sigma_i$  suuntaisen yksikkövektorin  $\mathbf{n}^i$  komponenttien  $n_x^i$ ,  $n_y^i$  ja  $n_z^i$  määrittämiseksi on käytettävissä yhtälö (2.21), jossa nyt  $\sigma_i$  on tunnettu eli

$$([\sigma] - \sigma_i [I])\{n^i\} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \\ n_z^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.31)$$

Koska tämä yhtälöryhmä on homogeeninen, sillä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua, vaan sen kahden yhtälön avulla voidaan kaksi tuntemattomista  $n_x^i$ ,  $n_y^i$  ja  $n_z^i$  ilmaista kolmannen avulla. Kolmas yhtälö, joka tarvitaan tehtävän ratkaisemiseksi, on ehto, että yksikkövektorin pituus on 1 eli  $|\mathbf{n}^i| = 1$ . Siis

$$n_x^{i2} + n_y^{i2} + n_z^{i2} = 1. \quad (2.32)$$

Kaksi yhtälöistä (2.31) ja yhtälö (2.32) muodostavat siis kolme yhtälöä, joista pääjännityksen  $\sigma_i$  suuntaisen yksikkövektorin  $\mathbf{n}^i$  komponentit  $n_x^i$ ,  $n_y^i$  ja  $n_z^i$  saadaan ratkaistuksi.

Seuraavassa osoitetaan, että keskenään erisuuret **pääjännitykset** ovat **kohtisuorassa toisiaan vastaan**. Tarkastellaan pääjännityksiä  $\sigma_i$  ja  $\sigma_j$  vastaavia yksikkövektoreita  $\mathbf{n}^i$  ja  $\mathbf{n}^j$ . Soveltamalla yhtälöitä (2.31), saadaan matriisimuodossa

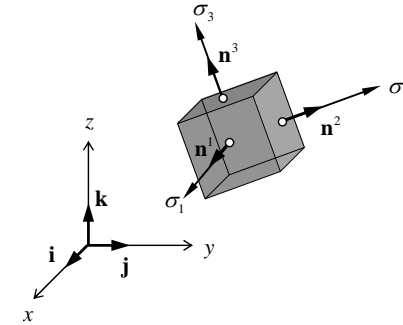
$$([\sigma] - \sigma_i [I])\{n^i\} = \{0\}, \quad ([\sigma] - \sigma_j [I])\{n^j\} = \{0\}.$$

Kertomalla edellinen yhtälö puolittain pystyvektorin  $\{n^j\}$  transpoosille ja jälkimmäinen pystyvektorin  $\{n^i\}$  transpoosilla ja vähentämällä näin saadut kaksi yhtälöä puolittain toisistaan ja käyttämällä lopuksi yhteyttä  $\mathbf{n}^i \cdot \mathbf{n}^j = \{n^i\}^{iT} \{n^j\}$  saadaan yhtälö

$$(\sigma_i - \sigma_j) \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{n}^j = 0. \quad (2.33)$$

Jos nyt pääjännitykset  $\sigma_i$  ja  $\sigma_j$  ovat erisuuret, täytyy pistetulon  $\mathbf{n}^i \cdot \mathbf{n}^j$  hävitä ja ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Voidaan tehdä seuraavat päätelmät: Jos kaikki pääjännitykset ovat erisuuria, ts.  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ , yhtälöiden (2.33) toteutuminen edellyttää, että  $\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^2 = 0$ ,  $\mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{n}^3 = 0$  ja  $\mathbf{n}^3 \cdot \mathbf{n}^1 = 0$  eli kaikki kolme pääjännitystä ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tässä tapauksessa kaikkien pääjännitysten suunnat voidaan määrittää. Jos kaksi pääjännitystä on yhtä suurta, esimerkiksi  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ , yhtälöiden (2.33) toteutuminen edellyttää, että  $\mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{n}^3 = 0$  ja  $\mathbf{n}^3 \cdot \mathbf{n}^1 = 0$  eli yhtä suuret pääjännitykset  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  ovat kohtisuorassa erisuurta pääjännitystä  $\sigma_3$  vastaan. Tässä tapauksessa erisuuren pääjännityksen suunta  $\mathbf{n}^3$  voidaan määrittää ja kaikissa sitä vastaan kohtisuorissa suunnissa on sama pääjännitys, suuruudeltaan  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Jos kaikki

pääjännitykset ovat yhtä suuret, ts.  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , yhtälöt (2.33) toteutuvat automaattisesti. Tässä tapauksessa kaikissa suunnissa on sama pääjännitys, suuruudeltaan  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Kuva 2.11 on havainnollistaa pääjännityksiä.



Kuva 2.11 Pääjännitykset

## 2.7 Jännitystila pääjännityskoordinaatistossa, Mohrin ympyrät ja suurin leikkausjännitys

Tarkastellaan jännitystila koordinaatistossa, jonka akselit yhtyvät pääjännitysten suuntiin. Näin valittua koordinaatistoa kutsutaan **pääjännityskoordinaatistiksi**. Siinä on voimassa  $\sigma_x = \sigma_1$ ,  $\sigma_y = \sigma_2$  ja  $\sigma_z = \sigma_3$  sekä  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ . Pinnan, jonka yksikkönormaalivektori on  $\mathbf{n}$ , traktion komponenteille saadaan kaavan (2.13) avulla

$$\{t\}^{(n)} = [\sigma]\{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_x \\ \sigma_2 n_y \\ \sigma_3 n_z \end{Bmatrix}, \quad (2.34)$$

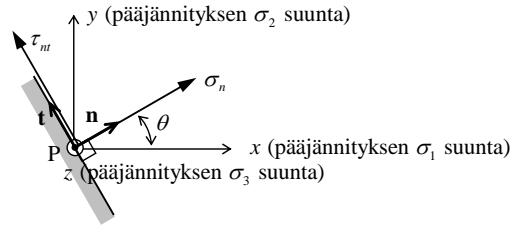
ja sen normaalijännitykselle kaavan (2.15) avulla

$$\sigma_n = \{n\}^T \{t\}^{(n)} = [n_x, n_y, n_z] \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_x \\ \sigma_2 n_y \\ \sigma_3 n_z \end{Bmatrix} = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2 \quad (2.35)$$

Tämän pinnan leikkausjännityksen suuruudelle (itseisarvolle) saadaan kaavan (2.8) perusteella

$$\begin{aligned} \tau^{(n)} &= \sqrt{|\mathbf{t}^{(n)}|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{t_x^{(n)2} + t_y^{(n)2} + t_z^{(n)2} - \sigma_n^2} \\ &= \sqrt{(\sigma_1 n_x)^2 + (\sigma_2 n_y)^2 + (\sigma_3 n_z)^2 - (\sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2)^2} \\ &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_x^2 n_y^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_y^2 n_z^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_z^2 n_x^2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Tuloksen saamiseksi käytettiin hyväksi yhteyttä  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ . Kaavoista (2.35) ja (2.36) saadaan normaalijännitys  $\sigma_n$  ja leikkausjännityksen suuruus  $\tau_n$  pinnalla, jonka yksikkönormaalin  $\mathbf{n}$  komponentit pääjännityskoordinaatistossa ovat  $n_x, n_y, n_z$ .



**Kuva 2.12** Piste P normaali- ja leikkausjännitys pääjännitysten  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  suuntia vastaan kohtisuoralla tasolla

Tutkitaan nyt erityisesti pisteen P normaalijännitystä ja leikkausjännitystä tasolla, joka on kotisuorassa pääjännitysten  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ) määrittelemää tasoa ( $x, y$ -tason) vastaan ja näkyy kuvassa 2.12 kaltevana viivaa. Nyt  $n_x = \cos \theta$ ,  $n_y = \sin \theta$  ja  $n_z = 0$ , missä  $\theta$  on pinnan normaalin ja  $x$ -akselin (pääjännityksen  $\sigma_1$  suunnan) välinen kulma. Traktion komponentit (2.34) saavat muodon

$$\{t\}^{(n)} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.37)$$

ja normaalijännitys (2.35) saa muodon

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta. \quad (2.38)$$

Traktion  $\mathbf{t}^{(n)}$  skalaarikomponentille suuntaan  $\mathbf{t}$ , joka on myös leikkausjännityksen  $\boldsymbol{\tau}^{(n)}$  komponentti  $\tau_n$ , saadaan

$$\begin{aligned} \tau_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^{(n)} &= \{t\}^T \{t\}^{(n)} = [-\sin \theta, \cos \theta, 0] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ \sigma_2 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (2.39)$$

(Tässä merkinnät ovat hieman hämääviä:  $\mathbf{t}$  tarkoittaa tarkastelupinnan suuntaista yksikkövektoria (vrt. kuva 2.12) ja  $\mathbf{t}^{(n)}$  traktiota.) Koska traktiolla (2.37) ei ole  $z$ -akselin suuntaista komponenttia, on  $\tau_n$  leikkausjännitysvektorin  $\boldsymbol{\tau}^{(n)}$  ainoa komponentti ja siten  $\tau^{(n)} = |\boldsymbol{\tau}^{(n)}| = |\tau_n|$ . Skalaarikomponentti  $\tau_n$  on

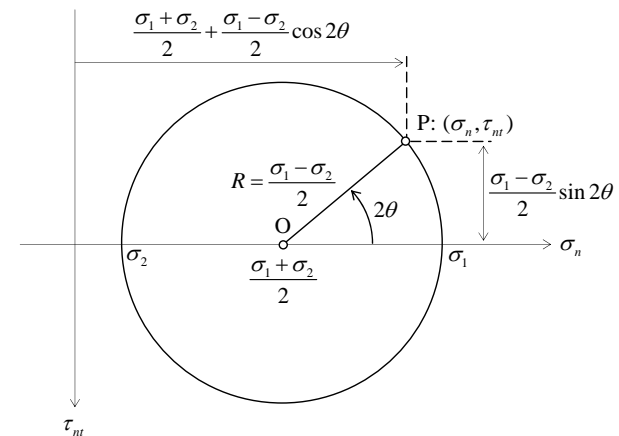
leikkausjännityksen suuruinen skalaarisuure, jonka merkki ilmaisee onko se yksikkövektorin  $\mathbf{t}$  suuntainen vai vastakkainen. Soveltamalla trigonometrisiä yhteyksiä

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

kaavoihin (2.38) ja (2.39) saadaan

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta, \\ \tau_n &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Koordinaatistossa, jonka akselit ovat  $\sigma_n$  ja  $\tau_n$  (jälkimmäinen alaspäin), nämä lausekkeet esittävät kulman  $\theta$  funktiona ympyrää, jonka säde on  $R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$  ja keskipiste on  $\sigma_n$ -akselilla kohdassa  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ . Ympyrää kutsutaan kehittäjänsä mukaan Mohrin ympyräksi (kuva 2.13), siihen palataan tasotapauksien yhteydessä myöhemmin. Nähdään erityisesti että kun  $\theta = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$  ja  $315^\circ$ ,  $\sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$  leikkausjännityksellä on itseisarvoltaan suurin arvo  $\tau^{(n)} = |\tau_n| = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ . Kysymyksessä on neljä tasoa, jotka muodostavat  $45^\circ$  kulman pääjännitysten  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  suuntien kanssa.

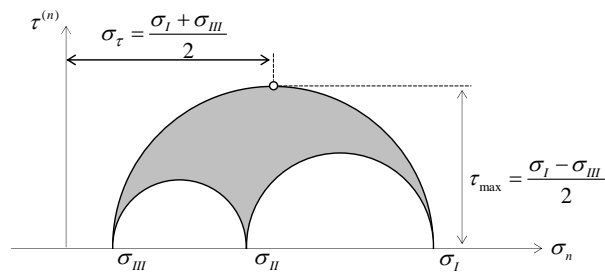


**Kuva 2.13:** Mohrin ympyrä

Päädettiin siis siihen, että kaikkien tasojen, joka ovat kotisuorassa pääjännitysten  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  määrittelemää tasoa vastaan, normaali- ja leikkausjännityksen määrittelemä piste  $P: (\sigma_n, \tau_n)$  sijaitsee pääjännitysten  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  avulla konstruoidulla Mohr'in



ympyrällä (vrt. kuva 2.13). Vastaavasti kaikkien tasojen, joka ovat kohtisuorassa pääjännitysten  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  ( $\sigma_2 > \sigma_3$ ) määrittelemää tasoa vastaan, normaali- ja leikkausjännityksen määrittelemä piste  $P:(\sigma_n, \tau_m)$  sijaitsee pääjännitysten  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  avulla konstruoidulla Mohr' in ympyrällä sekä (itseisarvoltaan) suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaali- jännitys näillä tasoilla ovat  $\tau^{(n)} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$  ja  $\sigma_n = (\sigma_2 + \sigma_3)/2$ . Vastaava tarkastelu pätee myös kaikille tasoille, jotka ovat kohtisuorassa pääjännitysten  $\sigma_3$  ja  $\sigma_1$  määrittelemää tasoa vastaan. Jos akseleiksi otetaan nyt normaali- jännitys  $\sigma_n$  ja leikkausjännityksen suuruus (itseisarvo)  $\tau^{(n)}$  saadaan kolme puoliympyrää, jotka on kuvassa 2.14 piirretty samaan koordinaatistoon. Pääjännityksille on käytetty suuruusjärjestyksen mukaisia alaindeksejä *I, II* ja *III*.



**Kuva 2.14:** Kolmidimensioisen jännitystilän Mohrin ympyrät sekä suurimman leikkausjännityksen ja sitä vastaavan normaali- jännityksen määräytyminen sen avulla.

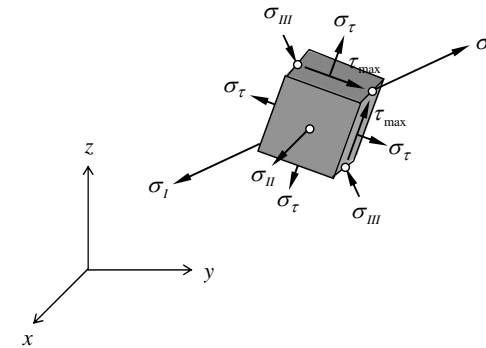
Koordinaattitasoja vastaan kohtisuorien tasojen normaali- jännitystä  $\sigma_n$  ja leikkausjännityksen suuruutta  $\tau^{(n)}$  vastaa siis aina piste jollakin kolmesta puoliympyrästä. Nämä tasot eivät kuitenkaan edusta kaikkia mahdollisia tasoja. Voidaan kuitenkin osoittaa (todistus sivuutetaan tässä), että kaikkien muiden mahdollisten tasojen normaali- ja leikkausjännityksiä vastaavat pisteet  $P:(\sigma_n, \tau_n)$  asettuvat aina kuvassa 2.14 esitetylle varjostetulle alueelle.

Näin voimme päätellä seuraavaa: **Suurin** kappaleen tarkasteltavassa pisteessä  $P$  vaikuttava **leikkausjännitys** (itseisarvo) on

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}), \quad (2.42)$$

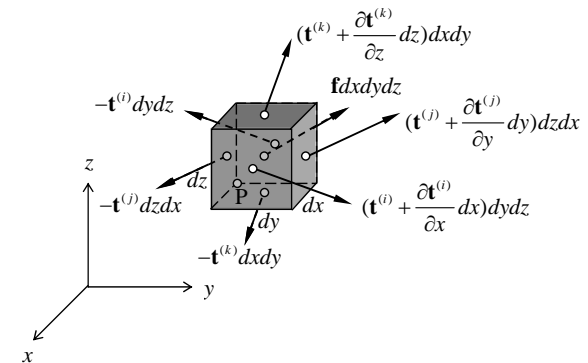
missä  $\sigma_I$  ja  $\sigma_{III}$  ovat suurin ja pienin pääjännitys ko. pisteessä. Nämä esiintyvät neljällä tasolla, jotka muodostavat  $45^\circ$  asteen kulman pääjännitysten  $\sigma_I$  ja  $\sigma_{III}$  suuntien kanssa (kuva 2.15). Näillä tasoilla esiintyvä **normaali- jännitys** on

$$\sigma_\tau = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{III}). \quad (2.43)$$



**Kuva 2.15** Suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaali- jännitys sekä niiden vaikutustasot

## 2.8 Jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt



**Kuva 2.16** Differentiaalisen särmiön vapaakappalekuvio

Kuvan 2.16 differentiaalisen särmiön vaikuttavaksi voimaresultantiksi saadaan

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= (\mathbf{t}^{(i)} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(i)}}{\partial x} dx) dydz - \mathbf{t}^{(i)} dydz + (\mathbf{t}^{(j)} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(j)}}{\partial y} dy) dz dx - \mathbf{t}^{(j)} dz dx \\ &+ (\mathbf{t}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(k)}}{\partial z} dz) dx dy - \mathbf{t}^{(k)} dx dy + \mathbf{f} dx dy dz \quad (2.44) \\ &= (\frac{\partial \mathbf{t}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(k)}}{\partial z} + \mathbf{f}) dx dy dz \end{aligned}$$

Särmiön voimatasapainoehto on  $d\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Koska differentiaalinen tilavuus  $dx dy dz$  on nollassa eroava, tämän yhtälö on voimassa, jos lausekkeen (2.44) sulkulauseke häviää. Näin särmiön vektorimuotoiseksi voimatasapainoyhtälöksi saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{t}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(k)}}{\partial z} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.45)$$

Yhtälön (2.45)  $x$ - akselin suuntaiselle komponenttilyhtälölle saadaan

$$\mathbf{i} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{t}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(k)}}{\partial z} + \mathbf{f} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mathbf{i} \cdot \mathbf{t}^{(i)})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{i} \cdot \mathbf{t}^{(j)})}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{i} \cdot \mathbf{t}^{(k)})}{\partial z} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{f} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$$

Vastaavaan tapaan saadaan  $y$ - ja  $z$ - akselien suuntaiset komponenttilyhtälöt. Voimatasapainoyhtälö (2.44) komponenttimuodossa lausuttuna on siten muotoa

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0.$$

Tämä kolmen ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälön muodostama yhtälöryhmä on **jännityskomponenttien tasapainoyhtälöiden** tavanomainen muoto. Sellaisenaan se on melko vaikea hahmottaa ja muistaa. Tässä on avuksi tiedostaa, että kaikki kolme yhtälöä ovat muodoltaan samanlaiset. Näin, jos muistaa ensimmäisen yhtälön

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0, \quad (2.47)$$

saa muut kaksi yhtälöä soveltamalla siihen kiertovaihtelua

$$\begin{array}{c} z \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \rightarrow y \end{array} \quad (2.48)$$

Kuvan 2.16 differentiaalisen suuntaissärmiön momentille keskipisteensä suhteen saadaan

$$d\mathbf{M} = \frac{dx}{2} \mathbf{i} \times (\mathbf{t}^{(i)} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(i)}}{\partial x} dx) dy dz - \frac{dx}{2} \mathbf{i} \times (-\mathbf{t}^{(i)}) dy dz$$

$$+ \frac{dy}{2} \mathbf{j} \times (\mathbf{t}^{(j)} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(j)}}{\partial y} dy) dz dx - \frac{dy}{2} \mathbf{j} \times (-\mathbf{t}^{(j)}) dz dx$$

$$+ \frac{dz}{2} \mathbf{k} \times (\mathbf{t}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(k)}}{\partial z} dz) dx dy - \frac{dz}{2} \mathbf{k} \times (-\mathbf{t}^{(k)}) dx dy \quad (2.49)$$

$$= [\mathbf{i} \times (\mathbf{t}^{(i)} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{t}^{(i)}}{\partial x} dx) + \mathbf{j} \times (\mathbf{t}^{(j)} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{t}^{(j)}}{\partial y} dy) + \mathbf{k} \times (\mathbf{t}^{(k)} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{t}^{(k)}}{\partial z} dz)] dx dy dz$$

$$= (\mathbf{i} \times \mathbf{t}^{(i)} + \mathbf{j} \times \mathbf{t}^{(j)} + \mathbf{k} \times \mathbf{t}^{(k)}) dx dy dz$$

Yhtälöketjun viimeisen yhtäsuuruusmerkin jälkeinen lauseke saatiin jättämällä edellisen lausekkeen sisempien sulkulausekkeiden jälkimmäiset termit edellisten rinnalla differentiaalisen pieniä pois.

Särmiön momenttitasapainoehto on nyt  $d\mathbf{M} = \mathbf{0}$ . Koska differentiaalinen tilavuus  $dx dy dz$  on nollassa eroava, tämä yhtälö on voimassa, jos lausekkeen (2.49) sulkulauseke häviää. Näin särmiön vektorimuotoiseksi momenttitasapainoyhtälöksi saadaan

$$\mathbf{i} \times \mathbf{t}^{(i)} + \mathbf{j} \times \mathbf{t}^{(j)} + \mathbf{k} \times \mathbf{t}^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (2.50)$$

Sijoittamalla tähän jännitysvektorien komponenttimuotoiset lausekkeet (2.9) saadaan

$$(\tau_{yz} - \tau_{zy}) \mathbf{i} + (\tau_{zx} - \tau_{xz}) \mathbf{j} + (\tau_{xy} - \tau_{yx}) \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

Tämä vektoryhtälö toteutuu, jos

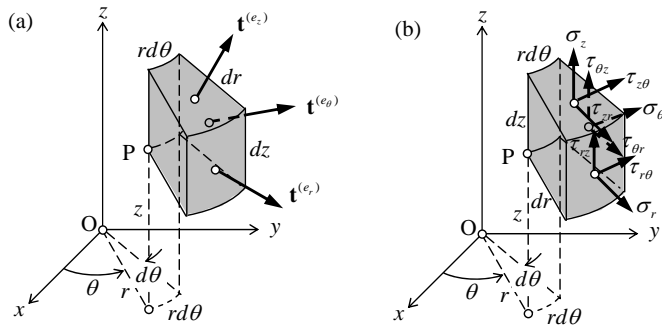
$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.51)$$

Näin särmiön momenttitasapainoehto johti leikkausjännitysten ja jännitysmatriisin symmetrisyyteen, kuten jo edellä olemme yksinkertaistetun tarkastelun perusteella todenneet.

## 2.9 Jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt sylinterikoordinaatissa

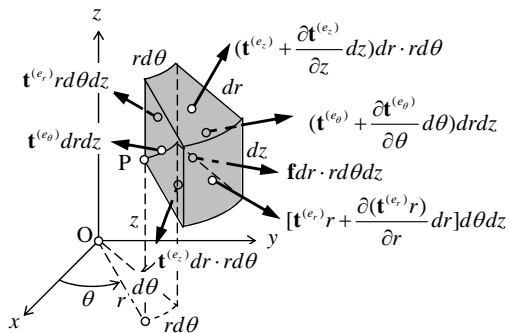
Koordinaattipintojen ( $r = \text{vakio}$ ,  $\theta = \text{vakio}$  ja  $z = \text{vakio}$ ) suuntaisten pinta-alkioiden (vastaavat yksikkönormaalivektorit ovat  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  ja  $\mathbf{e}_z$ ) jännitysvektorit  $\mathbf{t}^{(e_r)}$ ,  $\mathbf{t}^{(e_\theta)}$  ja  $\mathbf{t}^{(e_z)}$  tarkasteltavassa pisteessä P (kuva 2.17a) esitetään sylinterikoordinaatissa muodossa

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{(e_r)} &= \sigma_r \mathbf{e}_r + \tau_{r\theta} \mathbf{e}_\theta + \tau_{rz} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{t}^{(e_\theta)} &= \tau_{\theta r} \mathbf{e}_r + \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta + \tau_{\theta z} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{t}^{(e_z)} &= \tau_{zr} \mathbf{e}_r + \tau_{z\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_z \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (2.52)$$



Kuva 2.17 (a) koordinaattipintojen suuntaisten pinta-alkioiden jännitysvektorit ja (b) jännityskomponentit sylinterikoordinaatissa

Näiden yhdeksän skalaarikomponenttia  $\sigma_r$ ,  $\tau_{r\theta}$ , jne., joita on havainnollistettu kuvassa 2.17b, ovat pisteen P **jännityskomponentit** sylinterikoordinaatissa. Symboli  $\sigma$  viittaa normaalijännitykseen ja symboli  $\tau$  leikkausjännitykseen.



Kuva 2.18: Differentiaalisen särmiön vapaakappalekuvio

Kuvan 2.18 differentiaalisen särmiön vaikuttavaksi voimaresultantiksi saadaan

$$\begin{aligned}d\mathbf{F} &= [\mathbf{t}^{(e_r)} r + \frac{\partial(\mathbf{t}^{(e_r)} r)}{\partial r} dr] d\theta dz - \mathbf{t}^{(e_r)} r d\theta dz + (\mathbf{t}^{(e_\theta)} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_\theta)}}{\partial \theta} d\theta) dr dz - \mathbf{t}^{(e_\theta)} dr dz \\ &\quad + (\mathbf{t}^{(e_z)} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_z)}}{\partial z} dz) dr \cdot rd\theta - \mathbf{t}^{(e_z)} dr \cdot rd\theta + \mathbf{f} dr \cdot rd\theta dz \\ &= [\frac{1}{r} \frac{\partial(\mathbf{t}^{(e_r)} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_z)}}{\partial z} + \mathbf{f}] dr \cdot rd\theta dz \\ &= (\frac{\partial \mathbf{t}^{(e_r)}}{\partial r} + \frac{\mathbf{t}^{(e_r)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_z)}}{\partial z} + \mathbf{f}) dr \cdot rd\theta dz.\end{aligned}\quad (2.53)$$

Särmiön tasapainoehto on  $d\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Koska differentiaalinen tilavuus  $dr \cdot rd\theta dz$  on nollassa eroava, tämän yhtälö on voimassa, jos lausekkeen (2.53) sulkulauseke häviää. Näin särmiön vektorimuotoiseksi tasapainoyhtälöksi sylinterikoordinaatissa saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{t}^{(e_r)}}{\partial r} + \frac{\mathbf{t}^{(e_r)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_z)}}{\partial z} + \mathbf{f} = \mathbf{0}.\quad (2.54)$$

Yhtälön (2.54)  $r$ -viivan suuntaiselle komponenttiyhtälölle saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r \cdot (\frac{\partial \mathbf{t}^{(e_r)}}{\partial r} + \frac{\mathbf{t}^{(e_r)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_z)}}{\partial z} + \mathbf{f}) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{t}^{(e_r)})}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{t}^{(e_r)}}{r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{t}^{(e_z)})}{\partial z} + \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{f} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + f_r &= 0\end{aligned}\quad (2.55)$$

Koska  $\mathbf{e}_r$  riippuu vain koordinaatista  $\theta$ , mutta ei koordinaateista  $r$  ja  $z$ , se voitiin viedä derivaattamerkin sisään yhtälön vasemman puolen ensimmäisessä ja neljännessä termissä. Kolmatta termiä käsittelemme seuraavasti

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{t}^{(e_\theta)}}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r} \mathbf{e}_r + \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta + \tau_{\theta z} \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \cdot (\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \tau_{\theta r} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{1}{r} (\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + \tau_{\theta r} \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta - \sigma_\theta \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_\theta}{r}.\end{aligned}\quad (2.56)$$

Sijoittamalla tulos (2.56) yhtälöön (2.55) saadaan  $r$ -viivan suuntainen komponenttiyhtälö lopulliseen muotoonsa. Vastaavaan tapaan menetellen voidaan johtaa myös  $\theta$ - ja  $z$ -viivojen suuntaiset komponenttiyhtälöt.

Näin on saatu **jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt** sylinterikoordinaatistossa.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + f_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + f_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

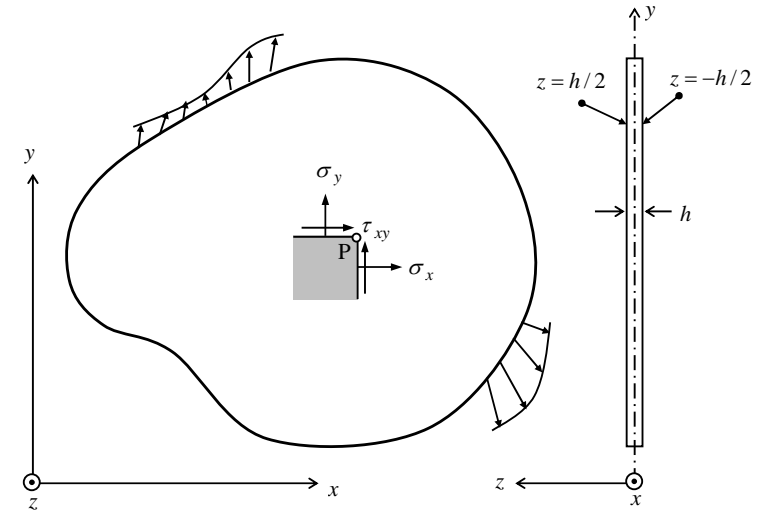
Vastaavaan tapaan kuin karteesisissa koordinaatistossa särmiön momenttitasapainoehto johtaa myös sylinterikoordinaatistossa leikkausjännitysten symmetrisyyteen

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}, \quad \tau_{zr} = \tau_{rz} \quad (2.58)$$

ja vastaavan jännitysmatriisin symmetrisyyteen. Johtoa emme tässä esitä.

## 2.10 Erikoisjännitystilaja

### 2.10.1 Tasojännitystilaja



**Kuva 2.19** Tasojännitystilassa oleva levy

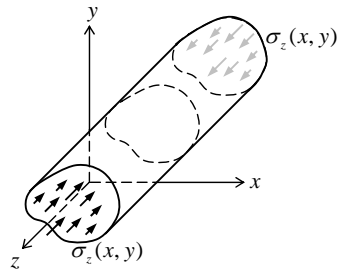
Tarkastellaan yksinkertaistettua fysikaalista tilannetta, jossa ohutta kalvoa tai levyä, jonka paksuus on  $h$ , jännitetään voimilla, jotka vaikuttavat sen tasossa ja ovat tämän suuntaisia. Esimerkki on esitetty kuvassa 2.19. Pinnat  $z = h/2$  ja  $z = -h/2$  ovat vapaita kuormittamattomia. Koska jännityskomponentit  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  häviävät näillä pinnoilla, voimme hyvällä syyllä otaksua niiden häviävän myös pintojen välillä, joten levyssä

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \quad (2.59)$$

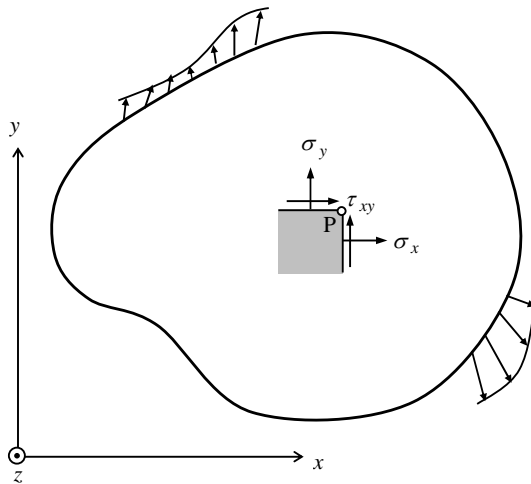
Jännitystilaa, jossa nämä yhtälöt ovat voimassa, kutsutaan **tasojännitystilaksi**  $x, y$ -tasossa. Nollasta eroavat jännityskomponentit tasojännitystilassa ovat siten normaali-jännitykset  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja leikkausjännitys  $\tau_{xy}$  ( $= \tau_{yx}$ ). Tasojännitystilaa jännitysmatriisi on

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

### 2.10.2 Tasomuodonmuutostila



Kuva 2.20 Lieriömäinen kappale tasomuodonmuutostilassa



Kuva 2.21 Tasomuodonmuutostilassa olevan lieriömäisen kappaleen poikkileikkaus

Tarkastellaan kuvan 2.20 lieriömäistä kappaletta. Sen sanotaan olevan **tasomuodonmuutostilassa**, jos sen liike on rajoitettu siten, että partikkelit pääsevät siirtymään vain  $x, y$ -tason suunnassa. Tällainen tilanne syntyy jos kappaletta kuormittaa  $x, y$ -tason suuntainen kuormitus, joka ei vaihtelee  $z$ -akselin suunnassa. Tällöin kappaleen jännitystilalla on kaikissa  $z$ -akselia vastaa kohtisuorissa poikkileikkauksissa sama ja tarkastelu voidaan rajoittaa kuvan 2.21 mukaiseen poikkileikkaukseen. Kappaleessa ei tällöin voi olla  $z$ -akselin suuntaisia leikkauksijännityksiä  $\tau_{xz}$  ja  $\tau_{yz}$ , mutta partikkelien  $z$ -akselin suuntaisen liikkeen estämiseksi tarvitaan sopivasti vaihteleva normaalijännitys  $\sigma_z(x, y)$ .

Nollasta eroavat jännityskomponentit tasomuodonmuutostilassa ovat siten normaalijännitykset  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ja leikkauksijännitys  $\tau_{xy} (= \tau_{yx})$ . Tasomuodonmuutostilan jännitysmatriisi on

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

### 2.10.3 Taso- ja tasomuodonmuutostilan jännityksistä

Taso- ja tasomuodonmuutostilan jännitystilaa voidaan pääosin hallita tarkastelemalla jännityksiä pinoilla, jotka ovat kohtisuorassa  $x, y$ -tasoa vastaan. Jos otetaan käyttöön  $2 \times 2$  jännitysmatriisi

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

voidaan edellä kolmidimensioiselle jännitystilalle johdettuja matriisikaavoja soveltaa myös taso- ja tasomuodonmuutostilassa.

Esimerkiksi traktion  $\mathbf{t}^{(n)}$  komponenteille  $x, y$ -tasoa vastaan kohtisuoralla pinnalla, jonka yksikkönormaali on  $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}$ , saadaan

$$\{t\}^{(n)} = [\sigma] \{n\}, \quad (2.63)$$

missä

$$\{t\}^{(n)} = \begin{Bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_y^{(n)} \end{Bmatrix}, \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

ja  $\theta$  on yksikkönormaalien ja  $x$ -akselin välinen kulma. Jos kuitenkin syystä tai toisesta haluttaisiin määrittää traktion komponentit pinnalla, joka ei ole kohtisuorassa  $x, y$ -tasoa vastaan ja jonka kaikki yksikkönormaalien komponentit  $n_x, n_y$  ja  $n_z$  ovat siten nollasta eroavia, jouduttaisiin yhtälössä (2.63) käyttämään  $3 \times 3$  matriisia (2.60) tai (2.61) ja jälkimmäisessä tapauksessa myös traktion komponentille  $t_z^{(n)}$  saataisiin nollasta eroava arvo  $t_z^{(n)} = \sigma_z n_z$ .

**Normaalijännitykselle ja leikkauksijännitykselle** ( $x, y$ -tasoa vastaan kohtisuoralla) pinnalla, jonka normaali muodostaa  $x$ -akseliin nähden kulman  $\theta$  saadaan

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \{n\}^T [\sigma] \{n\} = [\cos \theta, \sin \theta] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \\ &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

Kyseisen pinnan leikkausjännitykselle (komponentille pinnan tangentin) suuntaan  $\mathbf{t} = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$  saadaan

$$\begin{aligned} \tau_m &= \{\mathbf{t}\}^T [\boldsymbol{\sigma}] \{\mathbf{n}\} = [-\sin \theta, \cos \theta] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \\ &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Soveltamalla trigonometrisia yhteyksiä

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

näihin kaavoihin saadaan **normaalijännitykselle** ja **leikkausjännitykselle** tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilassa pinnalla, jonka normaali muodostaa  $x$ - akseliin nähden kulman  $\theta$ , käyttökelpoiset kaavat

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \tau_m &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Tarkastellaan vielä **jännityskomponenttien käyttäytymistä koordinaatiston kierrossa**. Jännityskomponentit  $\sigma'_x$  ja  $\tau'_{xy}$  saadaan suoraan kaavoilla (2.65), kun  $\theta$  on  $x'$  ja  $x$ - akselien välinen kulma. Jännityskomponentti  $\sigma'_y$  on taas normaalijännitys pinnalla, jonka normaalin suuntakulma on  $\theta + 90^\circ$ . Sille saadaan

$$\begin{aligned} \sigma'_y &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta + 180^\circ) + \tau_{xy} \sin(2\theta + 180^\circ), \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Näin on saatu jännityskomponenttien käyttäytymiselle koordinaatiston kierrossa tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilassa käyttökelpoiset kaavat

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \sigma'_y &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \tau'_{xy} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Tarkastellaan seuraavassa **pääjännitysten** ja **suurimman leikkausjännityksen** määrittämistä tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilassa. Koska  $z$ - akselia vastaan kohtisuoran tason leikkausjännitykset  $\tau_{zx}$  ja  $\tau_{zy}$  häviävät, vaikuttaa sillä pelkkä

normaalijännitys  $\sigma_z$  (tasojännitystilassa erityisesti  $\sigma_z = 0$ ). Näin se on yksi pääjännityksistä ja merkitsemme  $\sigma_3 = \sigma_z$ . Muut pääjännitykset ovat siten  $x, y$ - taso vastaan kohtisuoralla pinnalla ja ne voidaan määrittää seuraavasti. Yhtälön (2.22) kaksidimensioinen vastine on

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

josta saadaan kehittämällä

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0.$$

Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisuna saadaan pääjännityksille  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x + \sigma_y)^2}{4} - \sigma_x \sigma_y + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4\sigma_x \sigma_y + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

Näitä pääjännityksiä vastaavat pääsuunnat saadaan soveltamalla yhtälön (2.31) kaksidimensioista vastinetta

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (i = 1, 2)$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan

$$(\sigma_x - \sigma_i) \cos \theta_i + \tau_{xy} \sin \theta_i = 0 \Rightarrow \tan \theta_i = \frac{\sigma_i - \sigma_x}{\tau_{xy}} \Rightarrow \theta_i = \arctan \frac{\sigma_i - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

Näin olemme saaneet tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilan pääjännityksille kaavan

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \sigma_3 = \sigma_z \quad (2.67)$$

ja pääjännitysten  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  suuntakulmille  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  kaavan

$$\theta_i = \arctan \frac{\sigma_i - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad (i = 1, 2). \quad (2.68)$$

Pääjännitys  $\sigma_3$  on  $z$ - akselin suuntainen.

On tärkeää havaita, että näin määritetyt pääjännitykset eivät ole suuruusjärjestyksessä, vaikkakin helposti nähdään, että  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ . Kun ne pannaan suuruusjärjestykseen ja merkitään  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  ja  $\sigma_{III}$  voidaan suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys määrittää kaavoilla (2.42) ja (2.43). Jos  $\sigma_I = \sigma_1$ ,  $\sigma_{II} = \sigma_3$  ja  $\sigma_{III} = \sigma_2$ , suurin leikkausjännitys ja sitä vastaava normaalijännitys ovat erityisesti

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \sigma_\tau = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (2.69)$$

ja ne vaikuttavat  $x, y$ -tasoa vastaan kohtisuorilla tasoilla, jotka muodostavat  $45^\circ$  kulmat pääjännitysten suuntiin  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  nähden. Jos  $\sigma_I = \sigma_3$ ,  $\sigma_{II} = \sigma_1$  ja  $\sigma_{III} = \sigma_2$ ,  $\tau_{\max}$  ja  $\sigma_\tau$  vaikuttavat tasoilla, jotka muodostavat  $45^\circ$  kulmat  $z$ -akselin suunnan ja suunnan  $\theta_2$  kanssa. Jos  $\sigma_I = \sigma_1$ ,  $\sigma_{II} = \sigma_2$  ja  $\sigma_{III} = \sigma_3$ ,  $\tau_{\max}$  ja  $\sigma_\tau$  vaikuttavat tasoilla, jotka muodostavat  $45^\circ$  kulmat suunnan  $\theta_1$  ja  $z$ -akselin suunnan kanssa.

Seuraavassa konstruoinme **tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilan Mohrin jännitysympyrän**, jolla on tärkeä merkitys useilla rakennustekniikan aloilla, erityisesti maamekaniikassa.

Siirtämällä ylemmän yhtälön (2.65) oikean puolen ensimmäinen termi vasemmalle puolelle, korottamalla saadut yhtälöt puolittain toiseen ja summaamalla vielä näin saadut yhtälöt puolittain saadaan yhtälö

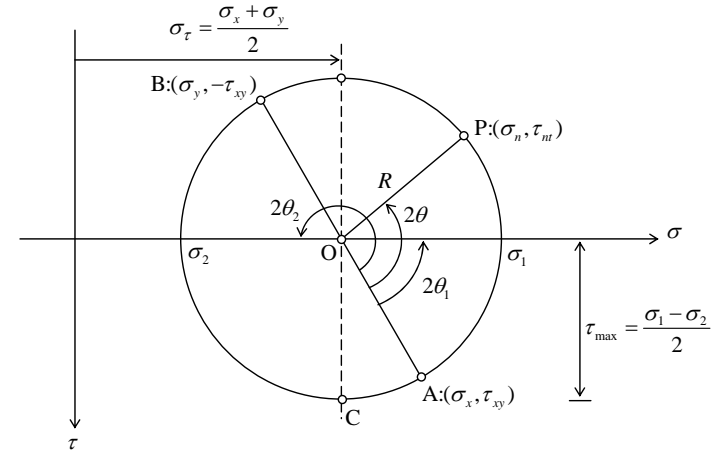
$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_m^2 = R^2, \quad (2.70)$$

missä

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (2.71)$$

Koordinaatistossa, jonka akselit ovat  $\sigma$  ja  $\tau$  (jälkimmäinen alaspäin), lauseke (2.70) esittää ympyrää, jonka säde on  $R$  ja keskipiste on  $\sigma$ -akselilla kohdassa  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ . Ympyrää kutsutaan kehittäjänsä mukaan Mohr'in jännitysympyräksi (kuva 2.22). Kaavoista (2.65) nähdään helposti, että kulman arvoa  $\theta = 0$  vastaa ympyrän piste A:  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  sekä arvoa  $\theta = 90^\circ$  vastaa ympyrän piste B:  $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ . Kulmaa  $\theta$  vastaava piste P:  $(\sigma_n, \tau_m)$  ympyrällä saadaan kiertämällä ympyrän sädetä asemasta OA lähtien kulman  $2\theta$  vastapäivään, jolloin saadaan säde OP.

Kuvasta 2.22 nähdään myös, että ympyrän ja  $\sigma$ -akselin leikkauspisteiden abskissat antavat  $(x, y)$ -tason suuntaiset pääjännitykset  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  sekä ympyrän säteen vastaavat kiertokulmat  $2\theta_1$  ja  $2\theta_2$  antavat niiden suuntakulmien  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  kaksinkertaiset arvot. Myös huippupisteen C ordinaatta on suurin  $(x, y)$ -tasoa vastaan

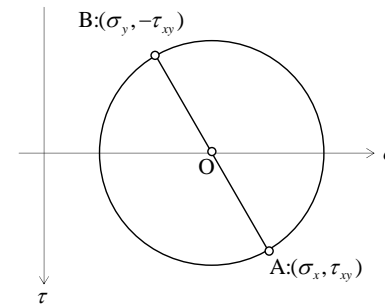


**Kuva 2.22** Tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilan Mohrin jännitysympyrää.

kohtisuoralla tasolla esiintyvä) leikkausjännitys  $\tau_{\max}$  ja ympyrän keskipisteen O abskissa on sitä vastaava normaalijännitys  $\sigma_\tau$ .

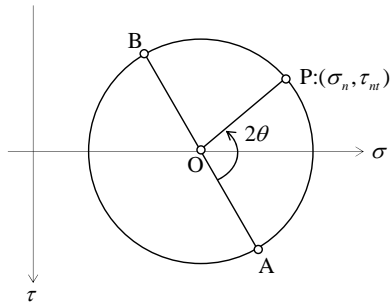
Seuraavassa esittelemme kuinka **Mohrin ympyrä konstruoidaan**, kun tarkasteltavan pisteen jännityskomponentit  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$  tunnetaan, ja kuinka sitä **käytetään**.

Piirretään  $\sigma, \tau$ -koordinaatisto, jossa  $\tau$ -akseli on alaspäin. Merkitään tähän koordinaatistoon pisteet A ja B, joiden koordinaatit ovat  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  ja  $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ . Piirretään jana AB, joka leikkaa  $\sigma$ -akselin pisteessä O. Piirretään piste O keskipisteenä ja jana OA säteenä ympyrä. Tämä on kyseisen jännitystilän Mohrin ympyrä (vrt. kuva 2.23).



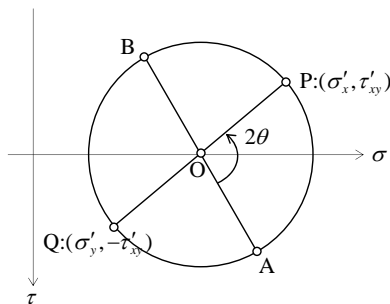
**Kuva 2.23** Mohrin ympyrän konstruointi

Normaalijännitys  $\sigma_n$  ja leikkausjännitys  $\tau_m$  pinnalla, jonka normaali muodostaa kulman  $\theta$   $x$ -akselin kanssa, saadaan kiertämällä ympyrän sädettä asemasta OA lähtien kulman  $2\theta$  vastapäivään asentoon OP. Tällöin pisteen P koordinaatit ovat  $\sigma_n$  ja  $\tau_m$  (vrt. kuva 2.24).



**Kuva 2.24** Normaalijännityksen  $\sigma_n$  ja leikkausjännityksen  $\tau_m$  määrittäminen pinnalla, jonka normaali muodostaa kulman  $\theta$   $x$ -akselin suhteen

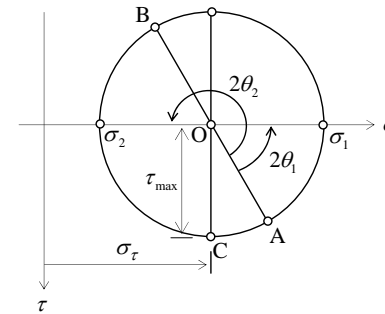
Jännityskomponentit  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  ja  $\tau'_{xy}$  koordinaatistossa  $x', y'$ , jonka  $x'$ -akseli muodostaa kulman  $\theta$   $x$ -akselin suhteen, saadaan kiertämällä ympyrän halkaisijaa asemasta BA lähtien kulman  $2\theta$  vastapäivään asentoon QP. Tällöin pisteen P koordinaatit ovat  $\sigma'_x$  ja  $\tau'_{xy}$  sekä pisteen Q koordinaatit ovat  $\sigma'_y$  ja  $-\tau'_{xy}$  (vrt. kuva 2.25).



**Kuva 2.25:** Jännityskomponenttien  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  ja  $\tau'_{xy}$  määrittäminen koordinaatistossa  $x', y'$ , jonka  $x'$ -akseli muodostaa kulman  $\theta$   $x$ -akselin suhteen

Pääjännitykset  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  saadaan ympyrän ja  $\sigma$ -akselin leikkauspisteiden abskissoina ja niiden suuntakulmien  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  kaksinkertaiset arvot ovat säteen vastaavat kiertokulmat. Suurin ( $x, y$ -tasoa vastaan kohtisuoralla tasolla) esiintyvä

leikkausjännitys  $\tau_{\max}$  ja sitä vastaava normaalijännitys  $\sigma_\tau$  saadaan ympyrän huippupisteen C ordinaattana ja ympyrän keskipisteen O abskissana (vrt. kuva 2.26).



**Kuva 2.26:** Pääjännitysten  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , niiden suuntakulmien  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  sekä suurimman ( $x, y$ -tasoa vastaan kohtisuoralla pinnalla vaikuttavan) leikkausjännityksen  $\tau_{\max}$  ja sitä vastaavan normaalijännityksen  $\sigma_\tau$  määrittäminen

## 2.11 Keskimääräinen normaalijännitys ja deviatoriset jännityskomponentit

Ns. **keskimääräinen normaalijännitys**  $\sigma_m$  määritellään nimensä mukaisesti normaalijännitysten keskiarvona eli

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (2.72)$$

Ensimmäisen jännitysinvariantin  $I_1$  avulla lausuttuna se on

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (2.73)$$

Jos kappaleessa (lepotilassa oleva neste voidaan myös ymmärtää kappaleeksi) vallitsee hydrostaattinen paine  $p$ , normaalijännityksille on voimassa  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ , leikkausjännitykset häviävät ja keskimääräinen normaalijännitys on  $\sigma_m = -p$ .

Ns. **deviatoriset jännityskomponentit** määritellään seuraavasti. Deviatoriset normaalijännitykset ovat

$$s_x = \sigma_x - \sigma_m, \quad s_y = \sigma_y - \sigma_m, \quad s_z = \sigma_z - \sigma_m \quad (2.74)$$

ja deviatoriset leikkausjännitykset ovat



$$s_{xy} = \tau_{xy}, \quad s_{yz} = \tau_{yz}, \quad s_{zx} = \tau_{zx}. \quad (2.75)$$

Deviatoriselle jännitysmatriisille

$$[s] = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{yz} & s_z \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

saadaan siten

$$[s] = [\sigma] - \sigma_m [I]. \quad (2.77)$$

Jännitysmatriisiin jakamisella ns. **deviaatio-osaan**  $[s]$  ja **hydrostaattiseen osaan**  $\sigma_m [I]$  kaavan

$$[\sigma] = [s] + \sigma_m [I] \quad (2.78)$$

mukaisesti on tärkeä merkitys, kun kuvataan esimerkiksi metallien plastista käyttäytymistä.

### 3. Muodonmuutostila

#### 3.1 Siirtymä

Tarkastellaan deformoituvaa kappaletta. Sen tyypillinen partikkeli, joka on alkutilassa pisteessä P, siirtyy deformaatioissa pisteeseen P' (kuva 3.1). Piste P koordinaatit  $x, y, z$ , jotka kuvaavat kappaleen partikkelien asemia alkutilassa, valitaan tarkastelussa riippumattomiksi muuttujiksi. Koska piste P' on saman partikkelin asema deformaation tapahduttua, sen koordinaatit  $x', y', z'$  ovat koordinaateista  $x, y, z$  riippuvia funktioita. Niille voidaan siten kirjoittaa

$$x' = x'(x, y, z), \quad y' = y'(x, y, z), \quad z' = z'(x, y, z). \quad (3.1)$$

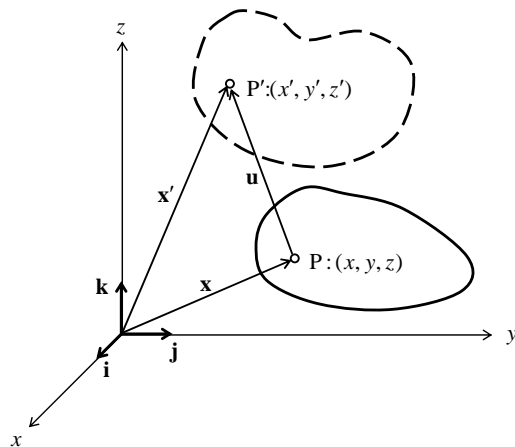
Käytettäessä vektoriesitystä, jossa pisteiden P ja P' paikkavektorit ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \\ \mathbf{x}' &= x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

yhteydet (3.1) saavat muodon

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

Jos tarkastellaan kappaletta liikettä ajan  $t$  funktiona, tulee lausekkeiden (3.1) ja (3.3) oikeanpuoleisiin funktioihin lisämuuttujaksi aika  $t$ .



Kuva 3.1: Siirtymävektori

Tarkasteltavan partikkelin **siirtymävektori**

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad (3.4)$$

on pisteiden P ja P' välinen vektori eli

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}, \quad (3.5)$$

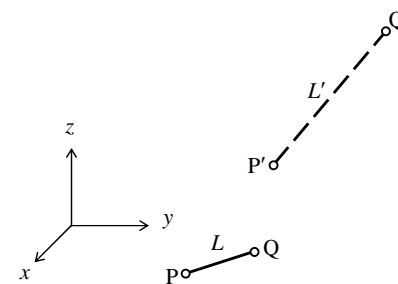
ja sen komponenteille saadaan

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z. \quad (3.6)$$

Nähdään, että siirtymävektori on paikkavektorin  $\mathbf{x}$  funktio eli  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  ja siirtymäkomponentit ovat koordinaattien  $x, y, z$  funktioita eli  $u = u(x, y, z)$ , jne.

#### 3.2 Janan venymä

Tarkastellaan kuvan 3.2 janaa. Se voi olla kuminauha, suoran sauvan akseli tai differentiaalinen materiaalisäie kappaleen sisällä. Aluksi janan päät ovat pisteissä P ja Q ja siirtyvät sitten pisteisiin P' ja Q'. Janan pituus alkutilassa on  $L$  ja lopputilassa  $L'$ . Janan lopputilan ja alkutilan pituuksien erotus  $\Delta L = L' - L$  kuvaa sen pituuden muutosta deformaatioissa. Jos se on positiivinen, jana pitenee eli venyy, tai jos se on negatiivinen, jana lyhenee eli puristuu. Tätä pituuksien erotusta kutsutaan janan pituudenmuutokseksi eli absoluuttiseksi venymäksi. Se riippuu janan pituudesta ja sen dimensio on pituus.



Kuva 3.2: Janan venymä

Rakenteiden mekaniikassa tarvitsemme pituuden muutosta kuvaavan suureen, joka on dimensioton. Tällaiselle suurelle käytetään nimitystä suhteellinen venymä eli lyhyemmin **venymä**. Venymä voidaan määrittellä eri tavoin. Niin sanottu **insinöörivenymä** määritellään suhteellisenä pituuden muutoksena alkupituuden suhteen, eli

$$e = \frac{\Delta L}{L} = \frac{L' - L}{L}. \quad (3.7)$$

Se voitaisiin myös määrittellä suhteellisenä pituudenmuutoksena loppupituuden suhteen, eli

$$e' = \frac{\Delta L}{L'} = \frac{L' - L}{L'} \quad (3.8)$$

jolloin puhutaan ns. **todellisesta venymästä**. Lujuusopin ja rakenteiden mekaniikan perustarkasteluissa käytetään muotoa (3.7).

Käyttökelpoisen venymän määrittely lujuusopin ja rakenteiden mekaniikassa tapahtuu kaavalla

$$\varepsilon = \frac{L'^2 - L^2}{2L^2} \quad (3.9)$$

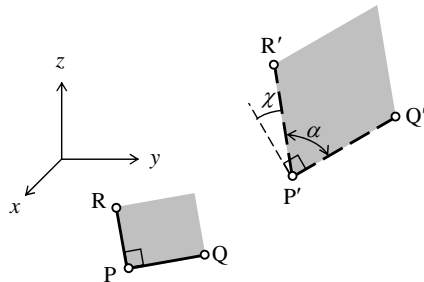
Kysymyksessä on niin sanottu **Lagrangen venymä**, jolla ei ole vastaavaa geometrista tulkintaa kuin insinöörivenymällä. Jos kuitenkin janan pituus muuttuu vähän, saadaan

$$\varepsilon = \frac{(L' - L) \overbrace{(L' + L)}^{\approx 2L}}{2L^2} \approx \frac{L' - L}{L} = e \quad (3.10)$$

Näin pituuden muutoksen ollessa pieni Lagrangen venymä on likimain yhtä suuri kuin insinöörivenymä eli suhteellinen pituuden muutos alkupituuden suhteen. Kantavat rakenteet ovat yleensä suhteellisen jäykkiä, jolloin tämä oletus on yleensä voimassa.

### 3.3 Nelikulmion liukumiskulma

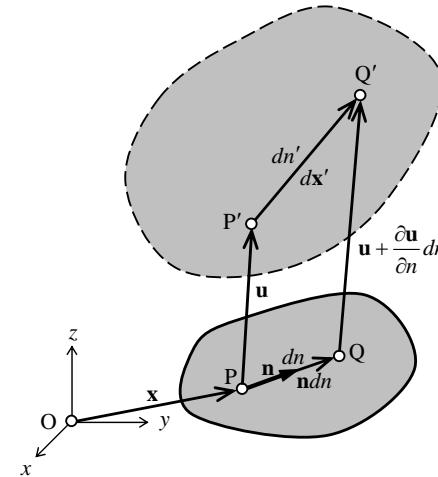
Tarkastellaan kuvan 3.3 nelikulmiota, joka kokee deformaation. Alkutilassa se on suorakaiteen muotoinen, jolloin janat PQ ja PR ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Deformaation jälkeen siitä on tullut suunnikas, jolloin janojen P'Q' ja P'R' välinen kulman on  $\alpha$ . Kulma  $\chi = \pi/2 - \alpha$  on siten janojen PQ ja PR välisen suoran kulman muutos (pienenemä) deformaatiossa ja sitä kutsutaan tässä **liukumiskulmaksi**.



**Kuva 3.3:** Liukumiskulma

## 3.4 Deformoituvan kappaleen venymä ja liukuma

### 3.4.1 Venymä



**Kuva 3.4:** Venymän  $\varepsilon_n$  määrittäminen

Tarkastellaan deformoituvan kappaleen pisteeseen P liittyvää jana-alkiota (kuva 3.4), jonka suuntainen yksikkövektori alkutilassa on

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} \quad (3.11)$$

ja jonka pituudet alku- ja lopputilassa ovat  $dn$  ja  $dn'$ . Jana-alkion päätepisteiden koordinaatit alkutilassa ovat

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_Q = \mathbf{x} + \mathbf{n}dn \quad (3.12)$$

ja lopputilassa

$$\mathbf{x}'_P = \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}'_Q = \mathbf{x} + \mathbf{n}dn + \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} dn \quad (3.13)$$

Jana-alkion päiden välisille vektoreille alku- ja deformaation tilassa saadaan nyt

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P = \mathbf{n}dn, \quad (3.14)$$

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_Q - \mathbf{x}'_P = \left( \mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right) dn \quad (3.15)$$

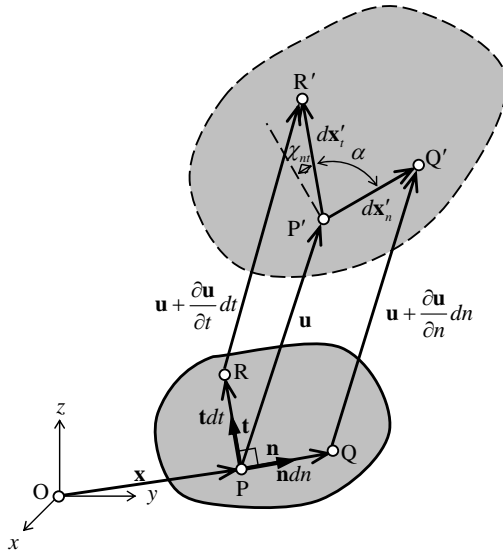
ja deformatuneen jana-alkion pituuden neliölle

$$dn'^2 = |dx'|^2 = dx'_i \cdot dx'_i = \left(\mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right) \cdot \left(\mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right) dn^2 = \left(1 + 2\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right) dn^2 \quad (3.16)$$

Nyt deformatuvan kappaleen pisteen P **venymälle** suuntaan  $\mathbf{n}$  saadaan kaavaa (3.9) soveltamalla lauseke

$$\varepsilon_n = \frac{dn'^2 - dn^2}{2dn^2} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|^2 \quad (3.17)$$

### 3.42 Liukumiskulma ja liukuma



**Kuva 3.5:** Liukumiskulman  $\chi_m$  määrittäminen

Tarkastellaan nyt kahta deformatuvan kappaleen pisteeseen P liittyvää jana-alkiota PQ ja PR, jotka ovat alkutilassa kohtisuorassa toisiaan vastaan. Niiden suuntaiset yksikkövektorit alkutilassa ovat

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{t} = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}. \quad (3.18)$$

sekä pituudet alkutilassa ovat  $dn$  ja  $dt$ . Jana-alkioiden päätepisteiden paikkavektorit deformatuneessa tilassa ovat

$$\mathbf{x}'_P = \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}'_Q = \mathbf{x} + \mathbf{n}dn + \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} dn, \quad \mathbf{x}'_R = \mathbf{x} + \mathbf{t}dt + \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt. \quad (3.19)$$

Jana-alkion päiden välisille vektoreille deformatuneessa tilassa saadaan nyt

$$dx'_n = \mathbf{x}'_Q - \mathbf{x}'_P = \left(\mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right) dn, \quad dx'_t = \mathbf{x}'_R - \mathbf{x}'_P = \left(\mathbf{t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) dt. \quad (3.20)$$

Näiden pistetulolle saadaan

$$dx'_n \cdot dx'_t = \left(\mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right) dn \cdot \left(\mathbf{t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) dt = \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) dn dt. \quad (3.21)$$

Toisaalta pistetulon määrittelyn perusteella ja venymän lausekkeen (3.17) avulla saadaan

$$\begin{aligned} dx'_n \cdot dx'_t &= |dx'_n| |dx'_t| \cos \alpha = dn' dt' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi_m\right) \\ &= dn dt \sqrt{1 + 2\varepsilon_n} \sqrt{1 + 2\varepsilon_t} \sin \chi_m. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Tässä käytettiin hyväksi Lagrangen venymän määrittelykaavan avulla seuraavasti saatavia jana-alkioiden uusien pituuksien lausekkeita:

$$\varepsilon_n = \frac{dn'^2 - dn^2}{2dn^2} \Rightarrow dn' = \sqrt{1 + 2\varepsilon_n} dn, \quad \varepsilon_t = \frac{dt'^2 - dt^2}{2dt^2} \Rightarrow dt' = \sqrt{1 + 2\varepsilon_t} dt$$

Merkitsemällä lausekkeiden (3.21) ja (3.22) oikeat puolet yhtä suuriksi, saadaan kappaleen pisteen P suuntiin  $\mathbf{n}$  ja  $\mathbf{t}$  liittyvälle **liukumiskulmalle** tulos

$$\chi_m = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_n} \sqrt{1 + 2\varepsilon_t}} \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right). \quad (3.23)$$

Tätä vastaten kappaleen pisteen P suuntiin  $\mathbf{n}$  ja  $\mathbf{t}$  liittyvä **liukuma** määritellään kaavalla

$$\gamma_m = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \quad (3.24)$$

Liukumiskulman avulla lausuttuna se on siten

$$\gamma_m = \sqrt{1 + 2\varepsilon_n} \sqrt{1 + 2\varepsilon_t} \sin \chi_m. \quad (3.25)$$

Kantavien rakenteiden yhteydessä venymät  $\varepsilon_n$  ja  $\varepsilon_t$  ovat yleensä ykköseen nähden pieniä. Liukumiskulma  $\chi_m$  on tällöin myös niin pieni, että sen sini voidaan korvata sillä itsellään. Näin liukumalle saadaan

$$\gamma_m \approx \chi_m, \quad (3.26)$$

eli se on liukumiskulman suuruinen.

### 3.43 Lagrangen ja infinitesimaalinen venymä ja liukuma

Pisteen P venymälle suuntaan  $\mathbf{n}$  ja suuntiin  $\mathbf{n}$  ja  $\mathbf{t}$  liittyvälle liukumalle saatiin siis **siirtymävektorin**  $\mathbf{u}$  avulla ilmaistut lausekkeet

$$\varepsilon_n = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|^2, \quad (3.27)$$

$$\gamma_m = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \quad (3.28)$$

**Siirtymäkomponenttien** avulla lausuttuina ne ovat

$$\varepsilon_n = n_x \frac{\partial u}{\partial n} + n_y \frac{\partial v}{\partial n} + n_z \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 \right], \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \gamma_m = & n_x \frac{\partial u}{\partial t} + n_y \frac{\partial v}{\partial t} + n_z \frac{\partial w}{\partial t} + t_x \frac{\partial u}{\partial n} + t_y \frac{\partial v}{\partial n} + t_z \frac{\partial w}{\partial n} \\ & + \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nämä ovat venymän ja liukuman yleiset lausekkeet eli **Lagrangen** venymä ja liukuma. Usein voidaan otaksua, että siirtymien derivaatat ovat niin pieniä, että niiden neliöt ja tulot voidaan otaksua niiden itsensä rinnalla häviävän pieniksi. Tällöin puhutaan **infinitesimaalisesta** venymästä ja liukumasta. Lausekkeista (2.29) ja (3.30) saadaan näille

$$\varepsilon_n = n_x \frac{\partial u}{\partial n} + n_y \frac{\partial v}{\partial n} + n_z \frac{\partial w}{\partial n}, \quad (3.31)$$

$$\gamma_m = n_x \frac{\partial u}{\partial t} + n_y \frac{\partial v}{\partial t} + n_z \frac{\partial w}{\partial t} + t_x \frac{\partial u}{\partial n} + t_y \frac{\partial v}{\partial n} + t_z \frac{\partial w}{\partial n} \quad (3.32)$$

Siirtymävektorin avulla lausutut **infinitesimaalinen** venymä ja liukuma ovat

$$\varepsilon_n = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}, \quad (3.33)$$

$$\gamma_m = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}. \quad (3.34)$$

Koska kantavat rakenteet ovat yleensä varsin jäykkiä ja muodonmuutokset siten pieniä, perustuu rakenteiden suunnittelu laajalti perinteisen infinitesimaalisiin muodonmuutoksiin perustuvan rakenteiden mekaniikan käyttöön.

### 3.5 Muodonmuutoskomponentit karteesisessa koordinaatistossa

#### 3.51 Infinitesimaaliset muodonmuutoskomponentit

**Venymäkomponentit**, joita kutsutaan usein myös lyhyesti **venymiksi** ja merkitään  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ja  $\varepsilon_z$ , määritellään koordinaattiakselien  $x$ ,  $y$  ja  $z$  suuntiin liittyvinä venyminä. Esimerkiksi  $x$ -akselin suuntaan liittyen  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$  ja  $n = x$ , joten kaavasta (3.33) seuraa

$$\varepsilon_x = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Vastaavan tapaan saadaan lausekkeet kahdelle muulle venymäkomponentille  $\varepsilon_y$  ja  $\varepsilon_z$ . Saadut kolme **infinitesimaalista** venymäkomponenttia ovat siten

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.35)$$

**Liukumakomponentit**, joita kutsutaan usein myös lyhyesti **liukumiksi** ja merkitään  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  ja  $\gamma_{zx}$ , määritellään koordinaattiakselien  $x$ ,  $y$  ja  $z$  suuntiin liittyvinä liukumina. Esimerkiksi  $x$ - ja  $y$ -akselien suuntiin liittyen  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{j}$ ,  $n = x$  ja  $t = y$  joten kaavasta (3.34) seuraa

$$\gamma_{xy} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vastaavan tapaan saadaan lausekkeet kahdelle muulle liukumakomponentille  $\gamma_{yz}$  ja  $\gamma_{zx}$ . Saadut kolme **infinitesimaalista** liukumakomponenttia ovat siten

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3.36)$$

Helposti nähdään, että kolmelle muulle liukumakomponentille pätee,  $\gamma_{yx} = \gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{zy} = \gamma_{yz}$  ja  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ . Venymä- ja liukumakomponentteja yhdessä kutsutaan **muodonmuutoskomponenteiksi**. Riippumattomia muodonmuutoskomponentteja on siten, kuten jännityskomponentteja, kuusi kappaletta.

Lausekkeet (3.35) ja (3.36) ovat infinitesimaalisten muodonmuutoskomponenttien ja siirtymien yhteydet. Ne näyttävät merkittävää osaa perinteisessä lujuusopissa ja rakenteiden mekaniikassa.

#### 3.52 Lagrangen muodonmuutoskomponentit

Menettelemällä vastaavaan tapaan kuin edellä voidaan johtaa Lagrangen muodonmuutoskomponenttien ja siirtymien väliset yhteydet:

Esimerkiksi  $x$ -akselin suuntaan liittyen  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$  ja  $n = x$ , joten kaavasta (3.27) seuraa

$$\varepsilon_x = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right|^2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Vastaavan tapaan saadaan lausekkeet kahdelle muulle venymäkomponentille  $\varepsilon_y$  ja  $\varepsilon_z$ .

Saadut kolme venymäkomponenttia ovat siten

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Esimerkiksi  $x$ - ja  $y$ -akselien suuntiin liittyen  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{j}$ ,  $n = x$  ja  $t = y$  joten kaavasta (3.28) seuraa

$$\gamma_{xy} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Vastaavan tapaan saadaan lausekkeet kahdelle muulle liukumakomponentille  $\gamma_{yz}$  ja  $\gamma_{zx}$ . Saadut kolme liukumakomponenttia ovat siten

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Lausekkeet (3.37) ja (3.38) ovat Lagrangen muodonmuutoskomponenttien ja siirtymien yhteydet. Ne näyttelevät merkittävää osaa modernissa numeerisii menetelmiin perustuvassa lujuusopissa ja rakenteiden mekaniikassa.

### 3.6 Venymä ja liukuma muodonmuutoskomponenttien avulla

Pisteen P kautta kulkevan yksikkövektorin  $\mathbf{n}$  suuntaisen suoran vektorimuotoinen yhtälö on

$$\mathbf{x}^n(n) = \mathbf{x}_p + \mathbf{n}n, \quad (3.39)$$

missä  $\mathbf{x}_p$  on pisteen P paikkavektori ja  $n$  yksikkövektorin  $\mathbf{n}$  suuntainen koordinaatti. Tämän yhtälön komponenttiesitys on

$$x^n(n) = x_p + n_x n, \quad y^n(n) = y_p + n_y n, \quad z^n(n) = z_p + n_z n. \quad (3.40)$$

Siirtymävektorin derivaatalle koordinaatin  $n$  suhteen saadaan soveltamalla ketjuderivointia funktioon  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^n(n), y^n(n), z^n(n))$  ja lausekkeita (3.40)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{dx^n}{dn} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{dy^n}{dn} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{dz^n}{dn} = n_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (3.41)$$

Siirtymävektorin derivaatalle yksikkövektorin  $\mathbf{t}$  suuntaisen koordinaatin  $t$  suhteen saadaan vastaavasti

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = t_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + t_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + t_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (3.42)$$

Näitä tuloksia hyväksi käyttäen venymän lausekkeesta (3.27) saadaan

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|^2 = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \\ &= (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}) \cdot \left( n_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( n_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \cdot \left( n_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \\ &= n_x^2 \underbrace{\left( \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)}_{\varepsilon_x} + n_y^2 \underbrace{\left( \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)}_{\varepsilon_y} + n_z^2 \underbrace{\left( \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)}_{\varepsilon_z} \\ &\quad + n_x n_y \underbrace{\left( \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)}_{\gamma_{xy}} + n_y n_z \underbrace{\left( \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)}_{\gamma_{yz}} \\ &\quad + n_z n_x \underbrace{\left( \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)}_{\gamma_{zx}} \end{aligned}$$

Lopuksi käytettiin hyväksi venymän ja liukuman lausekkeita (3.27) ja (3.28) sekä sitä, kuinka muodonmuutoskomponentit edellä määriteltiin niitä käyttäen. Näin saadaan pisteen P venymä suuntaan  $\mathbf{n}$  lausutuksi muodonmuutoskomponenttien avulla

$$\varepsilon_n = n_x^2 \varepsilon_x + n_y^2 \varepsilon_y + n_z^2 \varepsilon_z + n_x n_y \gamma_{xy} + n_y n_z \gamma_{yz} + n_z n_x \gamma_{zx}. \quad (3.43)$$

Tämä lauseke voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti

$$\varepsilon_n = \{n\}^T [\varepsilon] \{n\}, \quad (3.44)$$

missä

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}. \quad (3.45)$$

Vastaavan tapaan menetellen voidaan johtaa lauseke, joka lausuu pisteen **P** suuntiin **n** ja **t** liittyvän liukumien muodonmuutoskomponenttien avulla. Se on

$$\gamma_{nt} = 2n_x \varepsilon_x t_x + 2n_y t_y \varepsilon_y + 2n_z t_z \varepsilon_z + (n_x t_y + n_y t_x) \gamma_{xy} + (n_y t_z + n_z t_y) \gamma_{yz} + (n_z t_x + n_x t_z) \gamma_{zx}. \quad (3.46)$$

Tämä lauseke voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti

$$\gamma_{nt} = 2\{n\}^T [\varepsilon] \{t\}, \quad (3.47)$$

missä

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}. \quad (3.48)$$

### 3.7 Muodonmuutoskomponentit koordinaatiston kierrossa

Määritetään muodonmuutoskomponentit koordinaatistossa  $x', y', z'$ , jonka kantavektorit ovat **l**, **m** ja **n**, kun muodonmuutoskomponentit koordinaatistossa  $x, y, z$  tunnetaan. Määrittelynsä mukaan venymäkomponentti  $\varepsilon'_x$  on tarkasteltavan pisteen **P** venymä suuntaan **l**. Tällöin  $\mathbf{n} = \mathbf{l}$  ja  $n = x'$ , jolloin lausekkeesta (3.44) seuraa

$$\varepsilon'_x = \{l\}^T [\varepsilon] \{l\}, \quad (3.49)$$

Vastaavasti liukumakomponentti  $\gamma'_{xy}$  on tarkasteltavan pisteen **P** suuntiin **l** ja **m** liittyvä liukuma. Tällöin  $\mathbf{n} = \mathbf{l}$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{m}$ ,  $n = x'$  ja  $t = y'$ , jolloin lausekkeesta (3.47) seuraa

$$\frac{\gamma'_{xy}}{2} = \{l\}^T [\varepsilon] \{m\}. \quad (3.50)$$

Näin edeten voidaan määrittää samantyyppiset lausekkeet kaikille venymäkomponenteille  $\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_z, \gamma'_{xy}, \gamma'_{yz}$  ja  $\gamma'_{zx}$ . Kaikki nämä lausekkeet voidaan esittää yhtenä matriisilausekkeena

$$[\varepsilon'] = [L][\varepsilon][L]^T, \quad (3.51)$$

missä

$$[\varepsilon'] = \begin{bmatrix} \varepsilon'_x & \frac{\gamma'_{xy}}{2} & \frac{\gamma'_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma'_{xy}}{2} & \varepsilon'_y & \frac{\gamma'_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma'_{zx}}{2} & \frac{\gamma'_{yz}}{2} & \varepsilon'_z \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

on kierretyn koordinaatiston muodonmuutosmatriisi ja

$$[L] = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

on koordinaatiston muunnosmatriisi. Kaavan (3.51) avulla voidaan määrittää muodonmuutoskomponentit  $x', y', z'$ -koordinaatistossa, kun ne  $x, y, z$ -koordinaatistossa tunnetaan. Käänteisellä kaavalla

$$[\varepsilon] = [L]^T [\varepsilon'] [L] \quad (3.54)$$

voidaan tehdä päinvastainen laskelma.

Edellä esitetystä on käynyt ilmi, että jännitystilalla ja muodonmuostilalla on tietty analogia, jossa normaali- ja leikkausjännityksiä vastaavat venymät ja liukumien. Kuten jännitystilän käsittelyn yhteydessä todettiin, että jännityskomponentit, normaali- ja leikkausjännitykset, muodostavat niin sanotun toisen kertaluvun tensorin, jonka matriisi jännitysmatriisi (2.10) on. Syynä tähän oli se, että jännityskomponentit käyttäytyivät koordinaatiston kierrossa kaavan (2.17) mukaisesti. Perinteisessä teknisessä esitystavassa, jota tässä esityksessä noudatamme, muodonmuutoskomponentit, venymät ja liukumien, eivät kuitenkaan sellaisenaan muodosta tällaista tensoria. Venymät ja liukumien puolikkaat sen sijaan muodostavat toisen kertaluvun tensorin, jonka matriisi määrittelemämme muodonmuutosmatriisi (3.45) on. Syynä tähän oli se, että jännityskomponentit käyttäytyivät koordinaatiston kierrossa kaavan (3.51) mukaisesti.

Näin luonnehditun analogian perusteella voimme ottaa käyttöön useita jännitystilän yhteydessä johdettuja tuloksia, kunhan vain korvaamme normaalijännitykset vastaavilla venymillä ja leikkausjännitykset vastaavien liukumien puolikkailla. Seuraavassa käsittelyssä otetaan tämän analogian perusteella käyttöön joitakin tuloksia ilman johtoa.

### 3.8 Päävenymät ja suurin liukuma

Päävenymät saadaan seuraavan kolmannen asteen yhtälön ratkaisuna

$$\det([\varepsilon] - \varepsilon[I]) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (3.55)$$

$$\Rightarrow \varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0$$

missä

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad J_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \varepsilon_x \end{vmatrix}, \quad J_3 = \det[\varepsilon] \quad (3.56)$$

ovat venymäinvariantit. Jos päävenymät  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  ja  $\varepsilon_3$  esitetään suuruusjärjestyksessä, niille käytetään merkintöjä  $\varepsilon_I$ ,  $\varepsilon_{II}$  ja  $\varepsilon_{III}$ . Päävenymän  $i$  suunta saadaan ratkaisemalla homogeeninen yhtälöryhmä

$$([\varepsilon] - \varepsilon_i[I])\{n\} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_i & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon_i & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \\ n_z^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.57)$$

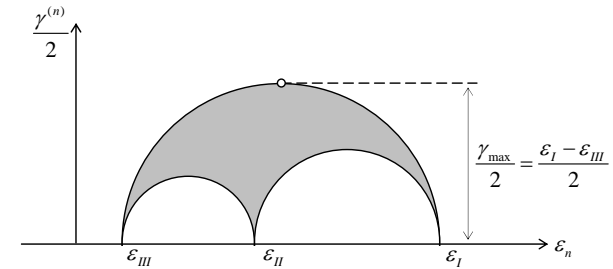
Yhdessä lisäyhtälön (yksikkövektorin pituus on 1)

$$n_x^i{}^2 + n_y^i{}^2 + n_z^i{}^2 = 1 \quad (3.58)$$

kanssa. Tuloksena on päävenymän  $i$  suuntainen yksikkövektori  $\mathbf{n}^i = n_x^i \mathbf{i} + n_y^i \mathbf{j} + n_z^i \mathbf{k}$ . Kuten pääjännitykset myös päävenymät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaavasti kuin kolmidimensioita jännitystilaa voidaan myös kolmidimensioista muodonmuutostilaa havainnollistaa käyttäen kuvan 3.6 mukaisia Mohrin ympyröitä. Kuvan perusteella voidaan muun muassa päätellä, että kappaleen suurin liukuma tarkasteltavassa pisteessä on suurimman ja pienimmän päävenymän erotus, eli

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_I - \varepsilon_{III}. \quad (3.59)$$



Kuva 3.6: Kolmidimensioisen muodonmuutostilan Mohrin ympyrät

### 3.9 Muodonmuutoskomponentit sylinterikoordinaatistossa

Siirtäväktori sylinterikoordinaatistossa on

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z, \quad (3.60)$$

jossa siirtymäkomponentit ovat muuttujien  $r$ ,  $\theta$  ja  $z$  funktioita. Muodonmuutosmatriisi sylinterikoordinaatistossa on

$$[\varepsilon'] = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{\gamma_{r\theta}}{2} & \frac{\gamma_{rz}}{2} \\ \frac{\gamma_{\theta r}}{2} & \varepsilon_\theta & \frac{\gamma_{\theta z}}{2} \\ \frac{\gamma_{zr}}{2} & \frac{\gamma_{z\theta}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Muodonmuutoskomponenttien muuntaminen karteesisesta koordinaatistosta sylinterikoordinaatistoon tai päinvastoin tapahtuu kaavoilla (3.51) ja (3.54), kun koordinaatiston muunnosmatriisina on

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Seuraavassa johdetaan muodonmuutoskomponenttien ja siirtymien yhteydet sylinterikoordinaatistossa. Koska sylinterikoordinaatistoa käytetään yleensä yksinkertaisten analyttisten ratkaisujen määrittämisen yhteydessä, rajoitetaan hyvällä syyllä **infinitesimaalisiin** muodonmuutoksiin.

Venymä  $\varepsilon_r$  on  $r$ -viivaan suuntainen venymä, joten lausekkeessa (3.33)  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$  ja  $dn = dr$ , joten sille saadaan



$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) = \mathbf{e}_r \cdot \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r}_1 + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta}_0 + \frac{\partial u_z}{\partial r} \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z}_0 = \frac{\partial u_r}{\partial r}\end{aligned}$$

Venymä  $\varepsilon_\theta$  on  $\theta$ -viivaan suuntainen venymä, joten lausekkeessa (3.33)  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\theta$  ja  $dn = rd\theta$ , joten sille saadaan

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_\theta \cdot \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + u_r \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \underbrace{\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_r}_0 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \underbrace{\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \underbrace{\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\end{aligned}$$

Venymä  $\varepsilon_z$  on  $z$ -viivaan suuntainen venymä, joten lausekkeessa (3.33)  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  ja  $dn = dz$ , joten sille saadaan

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) = \mathbf{e}_z \cdot \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial z} \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r}_0 + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\theta}_0 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z}_1 = \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}$$

Liukuma  $\gamma_{r\theta}$  on  $r$ - ja  $\theta$ -viivoihin liittyvä liukuma, joten lausekkeessa (3.34)  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_\theta$ ,  $dn = dr$  ja  $dt = rd\theta$ , joten sille saadaan

$$\begin{aligned}\gamma_{r\theta} &= \mathbf{e}_r \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) + \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{u_r}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{e}_\theta \cdot \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r}_1 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z}_0 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \underbrace{\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_r}_0 + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \underbrace{\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta}_1 + \frac{\partial u_z}{\partial r} \underbrace{\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z}_0 \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\end{aligned}$$

Liukuma  $\gamma_{\theta z}$  on  $\theta$ - ja  $z$ -viivoihin liittyvä liukuma, joten lausekkeessa (3.34)  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_z$ ,  $dn = rd\theta$  ja  $dt = dz$ , joten sille saadaan

$$\begin{aligned}\gamma_{\theta z} &= \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{e}_z \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial z} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) + \mathbf{e}_z \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_\theta \cdot \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{e}_z \cdot \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{u_r}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial z} \underbrace{\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_r}_0 + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \underbrace{\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta}_1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \underbrace{\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z}_0 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r}_0 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\theta}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z}_1 \\ &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}\end{aligned}$$

Liukuma  $\gamma_{rz}$  on  $z$ - ja  $r$ -viivoihin liittyvä liukuma, joten lausekkeessa (3.34)  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_r$ ,  $dn = dz$  ja  $dt = dr$ , joten sille saadaan

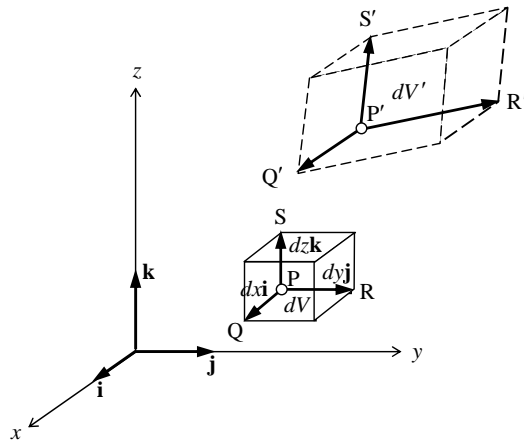
$$\begin{aligned}\gamma_{rz} &= \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial r} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) + \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial z} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_z \cdot \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{e}_r \cdot \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r}_0 + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\theta}_0 + \frac{\partial u_z}{\partial r} \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z}_1 + \frac{\partial u_r}{\partial z} \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r}_1 + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta}_0 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z}_0 \\ &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\end{aligned}$$

Näin olemme johtaneet muodonmuutoskomponenttien ja siirtymien yhteydet sylinterikoordinaatistossa:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.63)$$

### 3.10 Suhteellinen tilavuudenmuutos, keskimääräinen venymä ja deviatoriset muodonmuutoskomponentit

#### 3.10.1 Suhteellinen tilavuudenmuutos



Kuva 3.7: Suhteellisen tilavuudenmuutoksen määrittäminen

Deformoituvan kappaleen **suhteellinen tilavuudenmuutos** eli **dilataatio**  $\varepsilon_v$  pisteessä P määritellään kyseiseen pisteeseen liittyvän differentiaalisen tilavuusalkion  $dV$  suhteellisenä tilavuudenmuutoksena alkutilavuuden suhteen, eli

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \frac{dV' - dV}{dV}, \quad (3.64)$$

missä  $dV'$  tilavuusalkion tilavuus lopputilassa. Tarkastellaan kuvan 3.7 differentiaalista suorakulmaista särmiötä, jonka sivut PQ, PR ja PS yhtyvät alkutilassa koordinaattiakselien suuntiin ja niiden pituudet ovat  $dx$ ,  $dy$  ja  $dz$ . Tilavuusalkion alkutilavuus on siten

$$dV = dxdydz.$$

Särmiön sivujen suuntaisille vektoreille lopputilassa saadaan (vrt. kaava (3.20))

$$\overline{P'Q'} = \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)dx, \quad \overline{P'R'} = \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)dy, \quad \overline{P'S'} = \left(\mathbf{k} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right)dz.$$

Särmiön tilavuudelle lopputilassa saadaan nyt

$$dV' = \overline{P'Q'} \cdot \overline{P'R'} \times \overline{P'S'} = \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right) \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right) \times \left(\mathbf{k} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right) dxdydz$$

Suhteelliselle tilavuudenmuutokselle saadaan nyt

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{\left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right) \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right) \times \left(\mathbf{k} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right) dxdydz - dxdydz}{dxdydz} \\ &= \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right) \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right) \times \left(\mathbf{k} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right) - 1 \\ &= \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{k}\right] \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{i} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{k}\right] \times \left[\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{j} + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathbf{k}\right] - 1 \end{aligned}$$

Käyttäen skalaarikolmitulon determinanttiesitystä, saadaan suhteellisen tilavuudenmuutoksen lausekkeeksi

$$\varepsilon_v = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} - 1. \quad (3.65)$$

Infinitesimaalisten muodonmuutosten tapauksessa suhteelliselle tilavuudenmuutokselle saadaan yksinkertainen riippuvuus venymistä. Johdetaan se seuraavassa: Kehittämällä determinanttia ensimmäisen vaakarivin mukaan, saadaan

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} - \frac{\partial v}{\partial x} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} + \frac{\partial w}{\partial x} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} - 1 \\ &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - 1 \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Infinitesimaalisten muodonmuutosten tapauksessa siirtymien derivaatat otaksutaan niin pieniksi, että toisen ja kolmannen asteen termit niistä voidaan jättää pois, joten suhteelliselle tilavuudenmuutokselle saadaan

$$\varepsilon_v \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.66)$$

Se on siten **venymien summa**.

### 3.10.2 Keskimääräinen venymä

Ns. **keskimääräinen venymä**  $\varepsilon_m$  määritellään nimensä mukaisesti venymien keskiarvona eli

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (3.67)$$

Suhteellisen tilavuudenmuutoksen  $\varepsilon_V$  (infinitesimaaliset venymät) ja ensimmäisen venymäinvariantin  $J_1$  ja avulla lausuttuna se on

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_V}{3} = \frac{J_1}{3}. \quad (3.68)$$

Ns. **deviatoriset muodonmuutokset** määritellään seuraavasti. Deviatoriset venymät ovat

$$e_x = \varepsilon_x - \varepsilon_m, \quad e_y = \varepsilon_y - \varepsilon_m, \quad e_z = \varepsilon_z - \varepsilon_m \quad (3.69)$$

ja deviatoriset liukumukset ovat

$$e_{xy} = \gamma_{xy}, \quad e_{yz} = \gamma_{yz}, \quad e_{zx} = \gamma_{zx}. \quad (3.70)$$

Deviatoriselle muodonmuutosmatriisille

$$[e] = \begin{bmatrix} e_x & \frac{e_{xy}}{2} & \frac{e_{zx}}{2} \\ \frac{e_{xy}}{2} & e_y & \frac{e_{yz}}{2} \\ \frac{e_{zx}}{2} & \frac{e_{yz}}{2} & e_z \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

saadaan siten

$$[e] = [\varepsilon] - \varepsilon_m [I]. \quad (3.72)$$

Muodonmuutosmatriisiin voidaan jakaa kaavan

$$[\varepsilon] = [e] + \varepsilon_m [I] \quad (3.73)$$

mukaisesti **deviaatio-osaan**  $[e]$  ja **tilavuudenmuutososaan**  $\varepsilon_m [I]$ .

### 3.11 Tasotapauksen (tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilan) muodonmuutoksista

Sekä tasojännitys- että tasomuodonmuutostilassa  $z$ -suuntaan liittyvät liukumukset häviävät eli  $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ . Lisäksi tasomuodonmuutostilassa siirtyminen  $z$ -akselin suunnassa on estetty, eli  $w = 0$ . Tällöin myös  $\varepsilon_z \equiv \partial w / \partial z = 0$ .

Tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilassa muodonmuutostila voidaan hallita tarkastelemalla muodonmuutoksia  $x, y$ -tasossa. Jos otetaan käyttöön  $2 \times 2$  muodonmuutosmatriisi

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

voidaan edellä kolmidimensioiselle muodonmuutostilalle johdettuja matriisikaavoja soveltaa myös tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilassa.

Esimerkiksi venymälle  $\tau_n$  suuntaan, joka muodostaa kulman  $\theta$   $x$ -akselin suhteen, saadaan

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \{n\}^T [\varepsilon] \{n\} = [\cos \theta, \sin \theta] \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \\ &= \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Sitä vastaava liukuma  $\tau_{nt}$  saadaan (vrt. kaavojen (2.65) johto) samaan tapaan. Näin saadaan **venymälle** suuntaan, joka muodostaa kulman  $\theta$   $x$ -akselin suhteen sekä sitä **vastaavalle liukumalle** käyttökelpoiset kaavat

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta, \quad \gamma_{nt} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta. \quad (3.75)$$

**Muodonmuutoskomponenttien käyttäytymiselle koordinaatiston kierrossa** saadaan edelleen (vrt. kaavojen (2.66) johto) käyttökelpoiset kaavat

$$\begin{cases} \varepsilon'_x = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta, \\ \varepsilon'_y = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta, \\ \gamma'_{xy} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta. \end{cases} \quad (3.76)$$

Koska tasotapauksessa  $\gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0$ , venymä  $\varepsilon_z$  on yksi päävenymä  $\varepsilon_3 = \varepsilon_z$ . Näin tasotapauksen **päävenymille** saadaan (pääjännitysten kaavaa (2.67)) vastaten kaava

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z \quad (3.77)$$

ja päävenymien  $\varepsilon_1$  ja  $\varepsilon_2$  suunnille  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  (kaavaa (2.68) vastaten) kaava

$$\theta_i = \arctan \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}/2}, \quad (i = 1, 2). \quad (3.78)$$

Päävenymä  $\varepsilon_3$  on  $z$ -akselin suuntainen.

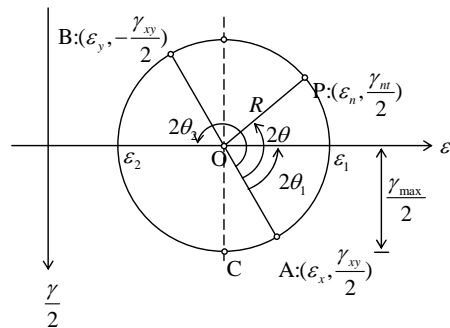
Suurin liukuma tarkasteltavassa pisteessä on

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_I - \varepsilon_{III}. \quad (3.79)$$

Erityisesti, jos  $\varepsilon_I = \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_{II} = \varepsilon_3$  ja  $\varepsilon_{III} = \varepsilon_2$ , suurimmalle liukumalle saadaan kaava

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (x, y - \text{tasossa}). \quad (3.80)$$

Mohrin jännitysypyrää vastaten tasotapaukselle voidaan myös konstruoida Mohrin **muodonmuutosympyrä**. Sillä on vastaavat ominaisuudet kuin Mohrin jännitysypyrällä ja tärkeimmät niistä käyvät ilmi kuvasta 3.8. Huomionarvoista on, että jännitysypyrän  $\tau$ -akselia vastaa muodonmuutosympyrän  $\gamma/2$ -akseli.



**Kuva 3.8:** Mohrin muodonmuutosympyrä

### 3.12 Muodonmuutokomponenttien kompatibiliteettiyhtälöt

#### 3.12.1 Kolmidimensioisen kappaleen kompatibiliteettiyhtälöt

Koska yhtälöt, joita ryhdyimme seuraavassa johtamaan, tulevat kysymykseen yksinkertaisten analyyttisten ratkaisujen määrittämisen yhteydessä, rajoitutaan tässä hyvällä syyllä **infinitesimaalisiin** muodonmuutoksiin.

Muodonmuutosten ja siirtymien yhteydet

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Jos siirtymäkomponentit  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  ja  $w(x, y, z)$  ajatellaan tunnetuiksi, näistä lausekkeista voidaan suoraan määrittää vastaavat muodonmuutokomponentit  $\varepsilon_x(x, y, z)$ , jne.,  $\gamma_{xy}(x, y, z)$ , jne.. Jos sen sijaan muodonmuutokomponentit  $\varepsilon_x(x, y, z)$ , jne.,  $\gamma_{xy}(x, y, z)$ , jne. ajatellaan tunnetuiksi, yhtälöt (3.81) muodostavat kuusi ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöä kolmen siirtymän  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  ja  $w(x, y, z)$  määrittämiseksi. Yhtälöryhmässä on siis kolme yhtälöä enemmän kuin tuntemattomia. Tämän vuoksi on ilmeistä, että osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmällä (3.81) ei ole yksikäsitteistä ratkaisua  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  ja  $w(x, y, z)$ , jos funktiot  $\varepsilon_x(x, y, z)$ , jne.  $\gamma_{xy}(x, y, z)$ , jne. on valittu mielivaltaisesti. **Yhteensopivuus-** eli **kompatibiliteettiyhtälöt** ovat ne ehdot, jotka muodonmuutosten  $\varepsilon_x(x, y, z)$ , jne.  $\gamma_{xy}(x, y, z)$ , jne. tulee toteuttaa, jotta niiden avulla voitaisiin saada yksikäsitteinen ratkaisu siirtymille  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  ja  $w(x, y, z)$ .

Derivoimalla yhtälöitä (3.81) puolittain seuraavasti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned}$$

ja laskemalla kaksi ensimmäistä yhtälöä puolittain yhteen ja vähentämällä siitä puolittain kolmas yhtälö, saadaan

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Vastaavasti voidaan muodostaa kaksi muuta yhtälöä, jotka saadaan myös yllä olevasta yhtälöstä käyttäen kiertovaihtelua.

Derivoimalla yhtälöitä (3.81) puolittain seuraavasti:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z}$$

ja laskemalla kaksi viimeistä yhtälöä puolittain yhteen ja vähentämällä siitä puolittain ensimmäinen yhtälö, saadaan

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}.$$

Vastaavasti voidaan muodostaa kaksi muuta yhtälöä, jotka saadaan myös yllä olevasta yhtälöstä käyttäen kiertovaihtelua. Näin olemme saaneet kuusi yhteensopivuus- eli kompatibiliteetti yhtälöä, jotka muodonmuutoskomponenttien tulee toteuttaa

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \text{ jne.}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \text{ jne.} \quad (3.82)$$

Jos kappaleen muodonmuutostila  $\varepsilon_x(x, y, z)$ , jne.,  $\gamma_{xy}(x, y, z)$ , jne. toteuttaa nämä kuusi yhtälöä, se on niin sanotusti yhteensopiva ja yhtälöiden (3.81) avulla voidaan määrittää yksikäsitteisesti siirtymät  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  ja  $w(x, y, z)$ . Yhtälöt (3.82) eivät kuitenkaan ole riippumattomia<sup>1</sup>.

### 3.12.2 Tasotapauksen (tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilan) kompatibiliteetti yhtälö

Tasotapauksessa muodonmuutosten ja siirtymien yhteydet ovat

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.83)$$

Nämä yhtälöt muodostavat kolme ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaali-yhtälöä kahden siirtymän  $u(x, y)$  ja  $v(x, y)$  ratkaisemiseksi. Tässä tapauksessa ehdoksi yhtälöiden ratkaistavuudelle saadaan yksi kompatibiliteetti yhtälö

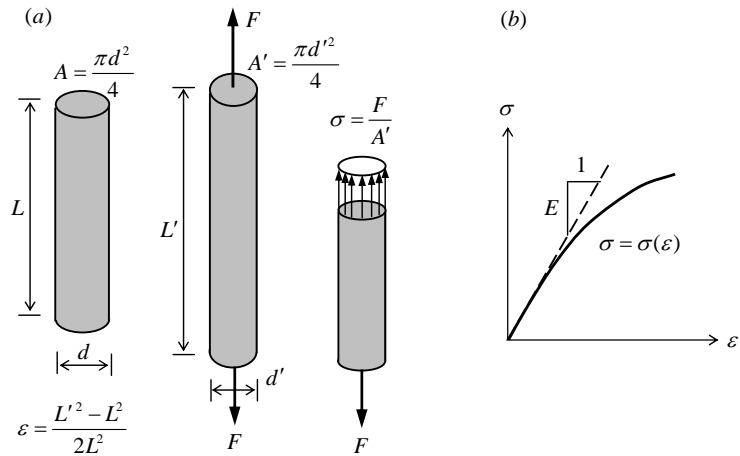
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (3.84)$$

jonka johto tapahtuu samalla tavalla kuin yhtälöiden (3.82) ensimmäisen yhtälön edellä.

<sup>1</sup> L.E. Malvern, Introduction to the Mechanics of Continuous Medium, Prentice-Hall, 1969, s. 187.

## 4 Konstitutiiviset yhtälöt

### 4.1 Jännitysten ja muodonmuutosten välisestä riippuvuudesta

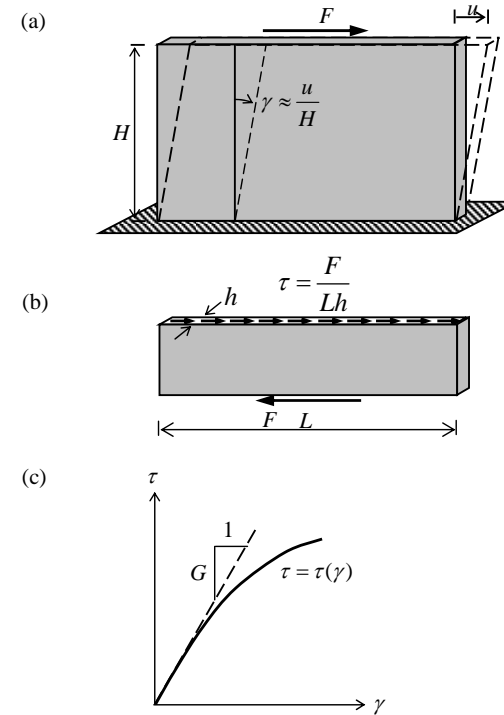


Kuva 4.1: (a) vetokoe ja (b) normaalijännitys-venymäkuvio

Kuva 4.1a esittää vetokoea, jossa homogeenista ympyräsilinterin muotoista sauvaa vedetään siten, että sen pituus  $L$  kasvaa uuteen arvoon  $L'$ . Sauvan (Lagrangen) venymä  $\varepsilon$  voidaan nyt laskea näiden avulla kuvan mukaisesti. Sauvan keskiosassa, etäällä sen kiinnityskohdista, vallitsee tasan jakautunut normaalijännitys  $\sigma$ . Se voidaan myös helposti laskea, kun kuormitetun sauvan halkaisija  $d'$  ja voima  $F$  on mitattu. Jos vetokoe suoritetaan siten, että sauvan pituutta lisätään askelittain ja lasketaan vastaavat venymät ja normaalijännitykset, voidaan konstruoida kuvan 4.1b mukainen **normaalijännitys-venymäkuvio**. Se antaa materiaalille kokeellisen normaalijännitys-venymäriippuvuuden  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , joka on **epälineaarinen** (käyräviivainen). Tyypillisesti normaalijännitys-venymäkäyrä lähtee origosta ja on sen läheisyydessä likimain suora. Kun venymät ovat pieniä, kuten kantavissa rakenteissa voidaan usein otaksua, jännitys-venymäkäyrää voidaan approksimoida suoralla, jonka yhtälö on

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (4.1)$$

Yhtälöä (4.1) kutsutaan **Hooken laiksi** ja suoran kulmakerrointa  $E$  **kimmoduuliksi**. Hooken lakia noudattavan materiaalin jännitys-muodonmuutosriippuvuus on siten **lineaarinen** (suoraviivainen).

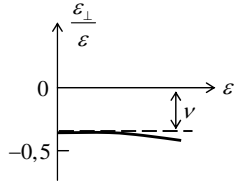


Kuva 4.2: (a) idealisoitu leikkauskoe (b) levyn alaosan vapaakappalekuvio (c) leikkausjännitys-liukumakuvio

Kuva 4.2a esittää idealisoitua leikkauskoea, jossa homogeeninen levy on kiinnitetty kiinteään alustaan ja sen yläreunalle aiheutetaan (kaikissa reunan pisteissä sama) siirtymä  $u$ . Jos rajoitetaan pieniin kulmiin ( $\gamma \approx \chi$ ), levyn liukuma  $\gamma$  voidaan laskea kuvan mukaisesti. Levyn vaakasuoralla leikkaustasolla (kuva 4.2b) vallitsee tasan jakautunut leikkausjännitys  $\tau$ , joka voidaan myös helposti laskea, kun siirtymän aiheuttava voima  $F$  on mitattu. Jos leikkauskoe suoritetaan siten, että siirtymää lisätään askelittain ja lasketaan vastaavat liukumien ja leikkausjännitykset, voidaan konstruoida kuvan 4.1c mukainen **leikkausjännitys-liukumakuvio**. Se antaa materiaalille kokeellisen leikkausjännitys-liukumariippuvuuden  $\tau = \tau(\gamma)$ . Myös leikkausjännitys-liukumakäyrä on tyypillisesti pienten liukumien alueella likimain suora. Tällöin leikkausjännitys-liukumakäyrää voidaan kantavissa rakenteissa usein approksimoida suoralla, jonka yhtälö on

$$\tau = G\gamma. \quad (4.2)$$

Yhtälöä (4.2) kutsutaan **leikkauksen Hooken laiksi** ja suoran kulmakerrointa  $G$  **liikumoduuliksi** eli **leikkausmoduuliksi**.



**Kuva 4.3:** Poikittaisen ja pitkittäisen venymän suhteen riippuvuus pitkittäisestä venymästä vetokokeessa

Vetokokeessa (kuva 4.1a) voidaan myös mitata koekappaleen halkaisijan  $d'$  muuttumista kokeen edistytessä. Tällöin jokaista mitattua pitkittäisen venymän  $\varepsilon$  arvoa vastaava sauvan poikittainen venymä  $\varepsilon_{\perp} = (d'^2 - d^2)/(2d^2)$  voidaan laskea ja haluttaessa piirtää käyrä (kuva 4.3), joka kuvaa kuinka poikittaisen venymän  $\varepsilon_{\perp}$  ja pitkittäisen venymän  $\varepsilon$  suhde muuttuu pitkittäiseen venymän kasvaessa. Osoittautuu, että tämä suhde pysyy pienillä venymän arvoilla vakiona. Tämän vakion vastalukua kutsutaan **Poissonin vakioksi** ja sitä merkitään symbolilla  $\nu$ . Se on siis kimmoisen aineen materiaalivakio, jonka avulla vedetyn kimmoisen aineen poikittainen venymä saadaan pitkittäisen venymän avulla lausekkeesta

$$\varepsilon_{\perp} = -\nu\varepsilon. \quad (4.3)$$

## 4.2 Jännitys- ja muodonmuutoskomponenttien pystyvektoriesitys

Tärkeimmät kiinteän aineen mekaniikan konstitutiiviset yhteydet, käsittävät jännitys- ja muodonmuutoskomponenttien välisen riippuvuuden. Koska molempia komponentteja on vain 6 (riippumatonta) kappaletta, edellä käytetty esitystapa, jossa ne esitetään  $3 \times 3 = 9$  alkioita sisältävinä jännitys- ja muodonmuutosmatriiseina, ei ole kovin havainnollinen. Toinen mahdollisuus on esittää jännitys- ja muodonmuutoskomponentit  $6 \times 1$  sarakematriiseina

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (4.4)$$

## 4.3 Linearisesti kimmoinen (Hooken) aine

### 4.31 Jännitysten ja muodonmuutosten yhteydet

Linearisesti kimmoinen aine on kiinteä aine, joka noudattaa ns. **yleistettyä Hooken lakia**. Sen mukaan jännityskomponentit riippuvat **linearisesti** muodonmuutoskomponenteista, eli

$$\begin{cases} \sigma_x = E_{11}\varepsilon_x + E_{12}\varepsilon_y + E_{13}\varepsilon_z + E_{14}\gamma_{xy} + E_{15}\gamma_{yz} + E_{16}\gamma_{zx}, \\ \sigma_y = E_{21}\varepsilon_x + E_{22}\varepsilon_y + E_{23}\varepsilon_z + E_{24}\gamma_{xy} + E_{25}\gamma_{yz} + E_{26}\gamma_{zx}, \\ \sigma_z = E_{31}\varepsilon_x + E_{32}\varepsilon_y + E_{33}\varepsilon_z + E_{34}\gamma_{xy} + E_{35}\gamma_{yz} + E_{36}\gamma_{zx}, \\ \tau_{xy} = E_{41}\varepsilon_x + E_{42}\varepsilon_y + E_{43}\varepsilon_z + E_{44}\gamma_{xy} + E_{45}\gamma_{yz} + E_{46}\gamma_{zx}, \\ \tau_{yz} = E_{51}\varepsilon_x + E_{52}\varepsilon_y + E_{53}\varepsilon_z + E_{54}\gamma_{xy} + E_{55}\gamma_{yz} + E_{56}\gamma_{zx}, \\ \tau_{zx} = E_{61}\varepsilon_x + E_{62}\varepsilon_y + E_{63}\varepsilon_z + E_{64}\gamma_{xy} + E_{65}\gamma_{yz} + E_{66}\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (4.5)$$

missä kertoimet  $E_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) ovat **vakioita**, jotka ovat riippumattomia jännityksistä ja venymistä. Jännitys- ja muodonmuutoskomponenttien lineaarinen riippuvuus (4.5) on matriisimuodossa

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}, \quad (4.6)$$

missä

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

on **jännitys-muodonmuutosmatriisi** eli **kimmomatriisi**. Kimmomatriisin alkioiden lukumäärä on  $6 \times 6 = 36$ , mutta ne kaikki eivät ole riippumattomia. Energiatarkastelulla<sup>1</sup> voidaan osoittaa, että  $E_{ij} = E_{ji}$ , eli kimmomatriisi on symmetrinen. Tämän vuoksi suurin mahdollinen riippumattomien **kimmovakioiden** määrä kimmoisessa aineessa on 21. Useimmiten riippumattomien kimmovakioiden määrä on paljon pienempi. Tämä lukumäärän lasku aiheutuu materiaallisen symmetrian olemassaolosta. Jännitys-muodonmuutosriippuvuutta (4.6) vastaavasti voidaan lineaarisesti kimmoisen aineen muodonmuutos-jännitysriippuvuus esittää muodossa

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}, \quad (4.8)$$

<sup>1</sup> Tässä kurssissa ei käsitellä energiaperiaatteita, joten todistusta ei suoriteta.

missä  $[C]$  on **muodonmuutos-jännitysmatriisi**, jolle on voimassa

$$[C] = [E]^{-1}. \quad (4.9)$$

Koska sekä jännitys- että muodonmuutoskomponentit riippuvat koordinaatistosta, on ilmeistä, että myös jännitys-muodonmuutosmatriisiin  $[E]$  tai muodonmuutos-jännitysmatriisiin  $[C]$  alkioit riippuvat yleisessä tapauksessa koordinaatistosta. Materiaaleja, joiden jännitysmuodonmuutosyhteys riippuu koordinaatistosta, kutsutaan **anisotrooppisiksi** materiaaleiksi. Monet materiaalit ovat kuitenkin sellaisia, että niiden jännitys-muodonmuutosyhteys ei riipu koordinaatistosta. Tällaisia materiaaleja kutsutaan **isotrooppisiksi** materiaaleiksi.

#### 4.32 Isotrooppisen aineen kimmovakiot

Seuraavassa esitellään vielä lyhyesti tyypilliset isotrooppisen lineaarisesti kimmoisen aineen kimmovakiot ja niiden fysikaalinen merkitys. **Kimmomoduuli** on puhtaan vedon- tai puristuksen alaisen koekappaleen jännityksen ja venymän suhde eli

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (4.10)$$

**Poissonin vakio** on puhtaan vedon- tai puristuksen alaisen koekappaleen poikittaisen  $\varepsilon_{\perp}$  ja pitkittäisen venymän  $\varepsilon$  suhteen vastaluku

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}. \quad (4.11)$$

**Liukumoduuli** eli **leikkausmoduuli** on puhtaan leikkauksen alaisen koekappaleen leikkausjännityksen ja liukuman suhde

$$G = \frac{\tau}{\gamma}. \quad (4.12)$$

**Puristusmoduuli** on keskimääräisen normaalijännityksen ja suhteellisen tilavuudenmuutoksen suhde

$$K = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_v} = \frac{\sigma_m}{3\varepsilon_m}. \quad (4.13)$$

#### 4.33 Isotrooppisen aineen jännitysten ja muodonmuutosten välisistä yhteyksistä

**Isotrooppisen** lineaarisesti kimmoisen aineen materiaaliominaisuudet eivät riipu koordinaatistosta. Sen kimmomatriisi on siten sama riippumatta koordinaatiston asennosta. Tähän perustuen voidaan osoittaa<sup>2</sup>, että isotrooppisella aineella on vain **kaksi** riippumatonta kimmovakiota.

<sup>2</sup> Todistus on työläs ja sivuutetaan tässä.

Fysikaalisesti perusteltu ja havainnollinen menettely kirjoittaa isotrooppisen, lineaarisesti kimmoisen aineen muodonmuutos-jännitysyhteydet kimmomoduulin, liukumoduulin ja Poisson'in vakion avulla esitetään seuraavassa: Ajatellaan, että kappaleen tarkasteltavan pisteen P kohdalta on irroitettu differentiaalinen suorakulmainen särmiö, jota kuormitetaan siten, että siihen vaikuttaa vuorotellen jännityskomponentit  $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$  yksi kerrallaan ja merkitään vastaavia kuormitustapauksia vastaavasti (a), ..., (f). Kuormitustapauksessa (a), jossa ainoa nollasta eroava jännityskomponentti on  $\sigma_x$ , saadaan Hooken lain mukaan venymille

$$\varepsilon_x^{(a)} = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y^{(a)} = \varepsilon_z^{(a)} = -\nu \varepsilon_x^{(a)} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (4.14)$$

liukumien ollessa nollia. Kuormitustapaukset (b) ja (c), joissa edellisessä  $\sigma_y$  ja jälkimmäisessä  $\sigma_z$  on ainoa nollasta eroava jännityskomponentti, voidaan käsitellä vastaavaan tapaan. Kuormitustapauksessa (d), jossa ainoa nollasta eroava jännityskomponentti on  $\tau_{xy}$ , saadaan leikkauksen Hooken lain perusteella

$$\gamma_{xy}^{(d)} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (4.15)$$

Kuormitustapaukset (e) ja (f), joissa edellisessä  $\tau_{yz}$  ja jälkimmäisessä  $\tau_{zx}$  on ainoa nollasta eroava jännityskomponentti, voidaan käsitellä vastaavaan tapaan. Kaikkien kuormitustapausten tulokset yhdistettyinä ovat

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(a)} &= \frac{1}{E} \sigma_x, & \varepsilon_y^{(a)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_x, & \varepsilon_z^{(a)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_x, \\ \varepsilon_x^{(b)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_y, & \varepsilon_y^{(b)} &= \frac{1}{E} \sigma_y, & \varepsilon_z^{(b)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_y, \\ \varepsilon_x^{(c)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_z, & \varepsilon_y^{(c)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_z, & \varepsilon_z^{(c)} &= \frac{1}{E} \sigma_z, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\gamma_{xy}^{(d)} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$

$$\gamma_{yz}^{(e)} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

$$\gamma_{zx}^{(f)} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Koska tavoittelemamme materiaalilaki on lineaarinen, voimme soveltaa yhteenlaskuperiaatetta ja laskea tarkastelemiemme kuormitustapausten vaikutukset yhteen. Näin saamme



$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(a)} + \varepsilon_x^{(b)} + \varepsilon_x^{(c)} = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z,$$

jne.

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(d)} = \frac{1}{G}\tau_{xy},$$

jne.

Näin saadaan isotrooppisen lineaarisesti kimmoisen aineen muodonmuutosten ja jännitysten yhteyksiksi lausekkeet

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z), & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y), & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Näissä lausekkeissa esiintyy kolme kimmovakiota  $E$ ,  $G$  ja  $\nu$ . Niiden välillä on kuitenkin yhteys

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (4.19)$$

joka osoitetaan hetken päästä. Näin yhteyksiä (4.18) varten tarvitsee määrittää kokeellisesti kaksi kimmovakiota, esimerkiksi kimmomoduuli  $E$  ja Poissonin vakio  $\nu$ , jonka jälkeen liukumoduuli  $G$  voidaan laskea kaavasta (4.19). Esitys (4.18) on isotrooppisen, lineaarisesti kimmoisen aineen muodonmuutosten ja jännitysten välisten yhteyksien yleisin esitysmuoto, ja se on melko helppo muistaa.

Jos yhteydet (4.18) esitetään matriisimuodossa (4.8), muodonmuutosjännitysmatriisille saadaan

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

joka on nyt ilmaistu kimmomoduulin ja Poissonin vakion avulla.

Varsin yleisesti käytetty esitysmuoto isotrooppisen lineaarisesti kimmoisen aineen jännitysten ja muodonmuutosten yhteydelle on

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2G + \lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_x + (2G + \lambda)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (2G + \lambda)\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

missä  $\lambda$  on vielä yksi käytössä oleva kimmovakio, ns. **Lame'n parametri**, jolla ei ole yhtä selkeätä fysikaalista merkitystä kuin edellä esitetyillä. Nämä yhteydet on taas melko helppo muistaa. Jos yhteydet (4.21) esitetään matriisimuodossa (4.6), jännitysmuodonmuutosmatriisi on tällöin

$$[E] = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Kolmas jossain mielessä havainnollinen esitysmuoto isotrooppisen, lineaarisesti kimmoisen aineen jännitysten ja muodonmuutosten välisille yhteyksille on esittää ne keskimääräisen normaalijännityksen ja suhteellisen tilavuudenmuutoksen yhteytenä sekä deviatoristen jännitysten ja muodonmuutosten yhteyksinä. Keskimääräisen normaalijännityksen ja suhteellisen tilavuudenmuutoksen yhteys on

$$\sigma_m = K\varepsilon_v \quad (4.23)$$

sekä deviatoristen jännitysten ja muodonmuutosten yhteydet ovat

$$\begin{aligned} s_x &= 2Ge_x, & s_{xy} &= Ge_{xy}, \\ s_y &= 2Ge_y, & s_{yz} &= Ge_{yz}, \\ s_z &= 2Ge_z, & s_{zx} &= Ge_{zx}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

#### 4.34 Kimmovakioiden välisiä yhteyksiä

Edellä esillä on ollut 5 kimmovakiota  $E$ ,  $\nu$ ,  $G$ ,  $K$  ja  $\lambda$ . Nämä ovat toisistaan riippuvia siten, että jos kaksi niistä tunnetaan, muut voidaan laskea. Seuraavassa johdetaan tarvittavia kimmovakioiden välisiä yhteyksiä.

Käyttäen hyväksi lausekkeitä (4.21) keskimääräiselle normaalijännitykselle saadaan

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(2G + 3\lambda)(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}(2G + 3\lambda)\varepsilon_v. \quad (4.25)$$

Puristuskertoimen määritelmästä (4.13) seuraa toisaalta

$$\sigma_m = K\varepsilon_v. \quad (4.26)$$

Merkitsemällä yhtälöiden (4.25) ja (4.26) oikeat puolet yhtä suuriksi, saadaan puristusmoduulin, Lamé'n parametrin ja liukumoduulin välille yhteys

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G. \quad (4.27)$$

Keskimääräiselle venymälle saadaan

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1 - 2\nu) = \frac{(1 - 2\nu)}{E}\sigma_m, \quad (4.28)$$

Puristuskertoimen määritelmästä (4.13) seuraa toisaalta

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3K}\sigma_m. \quad (4.29)$$

Merkitsemällä yhtälöiden (4.28) ja (4.29) oikeat puolet yhtä suuriksi saadaan puristusmoduulin, kimmomoduulin ja Poissonin vakion välille yhteys

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (4.30)$$

Deviatoriselle venymälle  $e_x$  saadaan käyttäen hyväksi lausekkeita (4.18) ja (4.29)

$$\begin{aligned} e_x &= \varepsilon_x - \varepsilon_m = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) - \frac{\sigma_m}{3K} \\ &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) - (1 - 2\nu)\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3E} \\ &= \frac{1 + \nu}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}\right) = \frac{1 + \nu}{E}(\sigma_x - \sigma_m) = \frac{1 + \nu}{E}s_x \end{aligned} \quad (4.31)$$

Toisaalta sille saadaan lausekkeista (4.24)

$$e_x = \frac{s_x}{2G}. \quad (4.32)$$

Merkitsemällä yhtälöiden (4.31) ja (4.32) oikeat puolet yhtä suuriksi saadaan liukumoduulin, kimmomoduulin ja Poissonin vakion välille yhteys

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.33)$$

Kun kaksi kimmovakiota tunnetaan, saadaan tarvittavat muut kimmovakiot määrittää käyttäen hyväksi yhteyksiä (4.27), (4.30) ja (4.33). Oheiseen kaavaryhmään on koottu valmiita kaavoja joiden avulla tällainen laskelma sujuu mukavasti.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} = \frac{G(E - 2G)}{3G - E} = K - \frac{2}{3}G = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ &= \frac{3K\nu}{1 + \nu} = \frac{3K(3K - E)}{9K - E}, \\ G &= \frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu} = \frac{3}{2}(K - \lambda) = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)} = \frac{3KE}{9K - E}, \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} = \frac{\lambda}{3K - \lambda} = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} = \frac{3K - E}{6K}, \\ E &= \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} = \frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu} = \frac{9K(K - \lambda)}{3K - \lambda} \\ &= 2G(1 + \nu) = \frac{9KG}{3K + G} = 3K(1 - 2\nu), \\ K &= \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{\lambda(1 + \nu)}{3\nu} = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} = \frac{GE}{3(3G - E)} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \\ \frac{G}{\lambda + G} &= 1 - 2\nu, \quad \frac{\lambda}{\lambda + 2G} = \frac{\nu}{1 - \nu}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Tarkastellaan lopuksi, joitain Poissonin vakion ominaisuuksia. Yleensä vedetty kimmoinen koekappale venyy pituussuunnassa ja puristuu poikkisuunnassa sekä vastaavasti puristettu kappale puristuu pituussuunnassa ja venyy poikkisuunnassa, jolloin  $\nu > 0$ . Joissain tapauksissa poikittaista muodonmuutosta ei tapahdu, jolloin  $\nu = 0$ . Aine on **kokoonturistumatonta**, jos dilataatio  $\varepsilon_v$  häviää. Infinitesimaalisten muodonmuutosten tapauksessa dilataatiolla ja keskimääräisellä normaalijännityksellä on yhteys

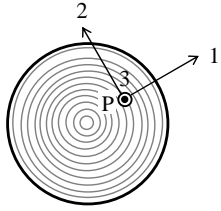
$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_m}{K} = \frac{3(1 - 2\nu)}{E}\sigma_m.$$

Ehdosta  $\varepsilon_v = 0$  seuraa Poissonin vakiolle näin arvo  $\nu = 1/2$ . Yhteenvetona voidaan näin todeta, että Poissonin vakio vaihtelee tavanomaisilla materiaaleilla välillä  $0 \leq \nu < 1/2$ . Esimerkkinä materiaalista, jonka  $\nu = 0$ , on **korkki** ja materiaalista, jonka  $\nu \approx 0,5$ , on **kumi**. Täysin kokoonpuristumatonta ainetta ei kuitenkaan ole olemassa.

#### 4.35 Ortotrooppinen aine

Tyypillinen rakennustekniikassa esiintyvä anisotrooppinen materiaalmalli on **ortotrooppinen** aine. Esimerkiksi puun, maan ja kallion mekaanista käyttäytymistä voidaan usein kuvata käyttäen ortotrooppista materiaalmallia.

Ortotrooppisessa aineessa on kolme toisiaan vastaan kohtisuoraa suuntaa, joita kutsutaan ortotrooppisuuden **pääsuunniksi**. Nämä pääsuunnat voidaan yleensä ulkoisesti havaita. Esimerkiksi pyöreän puun tarkasteltavassa pisteessä P ortotrooppisuuden pääsuunnat ovat säteen suunta, tangentin suunta ja pitkittäissuunta ohaisen kuvan 4.4 mukaisesti.



**Kuva 4.4:** Puun ortotrooppisuuden pääsuunnat 1, 2 ja 3 sen poikkileikkauksen pisteessä P. Suunta 3 kohdistuu katsojaan.

Ortotrooppisen aineen materiaaliparametrit on tarkoituksen mukaista määrittää tarkastelemalla sitä koordinaatistossa  $x, y, z$  jonka akselit yhtyvät ortotrooppisuuden pääsuuntiin 1, 2 ja 3. Tällöin nämä parametrit voidaan määrittää käyttäen koekappaleita, jotka on leikattu ja joita kuormitetaan pääsuuntien suuntaisesti. Seuraava tarkastelu tapahtuu siis  $x, y, z$  koordinaatistossa, jonka akselit yhtyvät ortotrooppisuuden pääsuuntiin 1, 2 ja 3.

Ajatellaan, että tarkasteltavan pisteen P kohdalta kappaleesta on irroitettu differentiaalinen suorakulmainen särmiö, jota kuormitetaan siten, että siihen vaikuttaa vuorotellen jännityskomponentit  $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$  yksi kerrallaan ja merkitään vastaavia kuormitustapauksia vastaavasti (a), ..., (f). Kuormitustapauksessa (a), jossa ainoa nollasta eroava jännityskomponentti on  $\sigma_x$ , alkio saa  $x$ -akselin suuntaisen venymän  $\varepsilon_x^{(a)}$ , ja poikkisuunnissa  $y$  ja  $z$  erisuuruiset vastakkaismerkkiset venymät  $\varepsilon_y^{(a)}$  ja  $\varepsilon_z^{(a)}$ , liukumien ollessa nollia. Ottamalla käyttöön suunnan 1 kimmomoduuli  $E_1$ , sekä Possonin luvut  $\nu_{12}$  ja  $\nu_{13}$ , jotka määrittävät poikkitaisten venymien (suuntiin 2 ja 3) ja pitkittäisen venymän (suuntaan 1) suhteiden vastalukuina, voidaan kuormitustapauksen venymille kirjoittaa

$$\varepsilon_x^{(a)} = \frac{\sigma_x}{E_1}, \quad \varepsilon_y^{(a)} = -\nu_{21}\varepsilon_x^{(a)} = -\nu_{21}\frac{\sigma_x}{E_1}, \quad \varepsilon_z^{(a)} = -\nu_{31}\varepsilon_x^{(a)} = -\nu_{31}\frac{\sigma_x}{E_1}, \quad (4.35)$$

Kuormitustapaukset (b) ja (c), joissa edellisessä  $\sigma_y$  ja jälkimmäisessä  $\sigma_z$  on ainoa nollasta eroava jännityskomponentti, voidaan käsitellä vastaavaan tapaan. Kuormitustapauksessa (d), jossa ainoa nollasta eroava jännityskomponentti on  $\tau_{xy}$ , saadaan ottamalla käyttöön suuntiin 1 ja 2 liittyvä liukumoduuli  $G_{12}$

$$\gamma_{xy}^{(d)} = \frac{\tau_{xy}}{G_{12}}. \quad (4.36)$$

Kuormitustapaukset (e) ja (f), joissa edellisessä  $\tau_{yz}$  ja jälkimmäisessä  $\tau_{zx}$  on ainoa nollasta eroava jännityskomponentti, voidaan käsitellä vastaavaan tapaan. Kaikkien kuormitustapausten tulokset yhdistettyinä ovat

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(a)} &= \frac{1}{E_1}\sigma_x, & \varepsilon_y^{(a)} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_x, & \varepsilon_z^{(a)} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_x, \\ \varepsilon_x^{(b)} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_y, & \varepsilon_y^{(b)} &= \frac{1}{E_2}\sigma_y, & \varepsilon_z^{(b)} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_y, \\ \varepsilon_x^{(c)} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_z, & \varepsilon_y^{(c)} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_z, & \varepsilon_z^{(c)} &= \frac{1}{E_3}\sigma_z, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\gamma_{xy}^{(d)} = \frac{\tau_{xy}}{G_{12}},$$

$$\gamma_{yz}^{(e)} = \frac{\tau_{yz}}{G_{23}},$$

$$\gamma_{zx}^{(f)} = \frac{\tau_{zx}}{G_{31}}.$$

Soveltamalla yhteenlaskuperiaatetta saamme

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(a)} + \varepsilon_x^{(b)} + \varepsilon_x^{(c)} = \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_z, \quad (4.38)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(d)} = \frac{1}{G_{12}}\tau_{xy},$$

jne.

Näin olemme saaneet ortotrooppisen, lineaarisesti kimmoisen aineen muodonmuutosten ja jännitysten yhteydet

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_z, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_x + \frac{1}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{23}}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_y + \frac{1}{E_3}\sigma_z, & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G_{31}}\tau_{zx}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Jos yhteydet (4.39) esitetään matriisimuodossa (4.8), muodonmuutos-jännitysmatriisi on

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

Muodonmuutos-jännitysmatriisissa (4.40) esiintyy 12 kimmovakiota: kimmomoduulit  $E_1$ ,  $E_2$  ja  $E_3$ , Poissonin luvut  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $\nu_{32}$ ,  $\nu_{31}$  ja  $\nu_{13}$  sekä liukumoduulit  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  ja  $G_{31}$ . Jännitys- muodonmuutosmatriisin symmetriasta johtuen niiden välillä on kuitenkin seuraavat kolme yhteyttä

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}. \quad (4.41)$$

Näin ortotroopisen aineen muodonmuutos-jännitys riippuvuuden määrittämistä varten joudutaan kokeellisesti määrittämään yhteensä  $12 - 3 = 9$  kimmovakiota.

#### 4.36 Alkujännitykset ja alkumuodonmuutokset

Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa kappaleeseen syntyy jännityksiä myös muusta syystä kuin sen deformatiivisesta kuormitusten alaisena. Tällaisia jännityksiä kutsutaan **alkujännityksiksi** ja niiden muodostama sarakematriisi on

$$\{\sigma_0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \sigma_{z0} \\ \tau_{xy0} \\ \tau_{yz0} \\ \tau_{zx0} \end{Bmatrix}. \quad (4.42)$$

Kappaleen tarkasteltavan pisteen kokonaisjännitykset saadaan nyt muodonmuutoksista aiheutuvien jännitysten

$$\{\sigma_\varepsilon\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (4.43)$$

ja alkujännitysten summana

$$\{\sigma\} = \{\sigma_\varepsilon\} + \{\sigma_0\}, \quad (4.44)$$

joten jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhteydet saavat tässä tapauksessa muodon

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (4.45)$$

eli

$$\sigma_x = (2G + \lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z + \sigma_{x0}, \text{ jne.}, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} + \tau_{xy0}, \text{ jne.} \quad (4.46)$$

Tyypillinen esimerkki alkujännityksestä on maan alla syvyydellä  $h$  sen omasta painosta syntynyt jännitystilä. Kun maata tarkastellaan kappaleena, johon kohdistuu ulkoisia kuormia, voidaan tämä jännitystilä ymmärtää alkujännitystiläksi, jonka jännityskomponentit ovat

$$\sigma_{z0} = -\rho gh, \quad \sigma_{x0} = \sigma_{y0} = -K_0 \rho gh, \quad \tau_{xy0} = \tau_{yz0} = \tau_{zx0} = 0, \quad (4.47)$$

missä  $K_0$  on niin sanottu lepopaine kerroin. Kaavassa (4.47) on oletettu, että koordinaatiston  $z$ - akseli suuntautuu ylöspäin. Myös kallioperässä esiintyy vuosituhansien aikana tapahtuneiden geologisten prosessien tuloksena syntyneitä huomattavan suuria alkujännityksiä. Metallien valmistus- ja muokausprosessit aiheuttavat myös metallisiin rakenteisiin alkujännityksiä.

Tarkastellaan toiseksi tilannetta, jossa kappaleeseen syntyy muodonmuutoksia myös muusta syystä kuin ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvista jännityksistä. Tällaisia muodonmuutoksia kutsutaan **alkumuodonmuutoksiksi** ja niiden muodostama sarakematriisi on

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \varepsilon_{z0} \\ \gamma_{xy0} \\ \gamma_{yz0} \\ \gamma_{zx0} \end{Bmatrix}. \quad (4.48)$$

Kappaleen tarkasteltavan pisteen kokonaismuodonmuutokset saadaan nyt jännityksistä aiheutuvien muodonmuutosten

$$\{\varepsilon_\sigma\} = [C]\{\sigma\} \quad (4.49)$$

ja alkumuodonmuutosten summana

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_\sigma\} + \{\varepsilon_0\}, \quad (4.50)$$

joten muodonmuutosten ja jännitysten väliset yhteydet saavat tässä tapauksessa muodon

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} + \{\varepsilon_0\}. \quad (4.51)$$

Vastaavat jännitysten ja muodonmuutosten yhteydet saadaan kääntäen ja ovat

$$\{\sigma\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (4.52)$$

eli

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2G + \lambda)(\varepsilon_x - \varepsilon_{x0}) + \lambda(\varepsilon_y - \varepsilon_{y0}) + \lambda(\varepsilon_z - \varepsilon_{z0}), \text{ jne.}, \\ \tau_{xy} &= G(\gamma_{xy} - \gamma_{xy0}), \text{ jne.} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Rakennustekniikassa alkumuodonmuutoksia aiheuttaa lämpötilan ja kosteuden muutosten vaikutuksesta. Lämpötilan muutoksesta aiheutuvat alkumuodonmuutokset isotrooppisessa materiaalissa ovat

$$\varepsilon_{x0} = \varepsilon_{y0} = \varepsilon_{z0} = \alpha_T \Delta T, \quad \gamma_{xy0} = \gamma_{yz0} = \gamma_{zx0} = 0, \quad (4.54)$$

missä  $\alpha_T$  pituuden lämpötilakerroin ja  $\Delta T$  on lämpötilan muutos.

#### 4.37 Erikoisjännitystilat

Tarkastellaan lopuksi millaisiksi jännitysten ja muodonmuutosten väliset yhteydet muotoutuvat, kun kysymyksessä on tasotapaus.

##### Tasojännitystila:

Tasojännitystilassa on voimassa  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ , joten muodonmuutosten ja jännitysten yhteydet (4.18) muokkautuvat seuraavasti

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\overset{0}{\sigma_z}) = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\overset{0}{\sigma_z} - \nu\sigma_x) = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\overset{0}{\tau_{yz}}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\overset{0}{\sigma_z} - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\overset{0}{\tau_{zx}}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Näin tasojännitystilän muodonmuutos-jännitysysteys käsittää kolme yhtälöä

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad (4.56)$$

jonka kytkevät toisiinsa muodonmuutokset  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  ja jännitykset  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  sekä lausekkeen

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.57)$$

poikittaiselle venymälle. Tasojännitystilän muodonmuutos-jännitysysteys (4.56) voidaan näin esittää matriisimuodossa

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}, \quad (4.58)$$

missä

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

ja

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

on tasojännitystilän muodonmuutos-jännitysmatriisi. Kääntämällä yhteydet (4.56) saadaan

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \equiv \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \quad (4.61)$$

Näin tasojännitystilän jännitys-muodonmuutosyhteydelle saadaan

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}, \quad (4.62)$$

missä

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

on tasojännitystilän jännitys-muodonmuutosmatriisi. Käyttäen yhteyksiä (4.61) tasojännitystilän poikittaiselle venymälle (4.57) saadaan tulos

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (4.64)$$

On tärkeätä havaita, että **tasojännitystilän muodonmuutos-jännitysmatriisi** (4.60) on muodoltaan **samanlainen** kuin kolmidimensioiden jännitystilän muodonmuutos-jännitysmatriisi (4.20), sillä se saadaan jälkimmäisestä pudottamalla rivit ja sarakkeet 3, 5 ja 6 pois. **Tasojännitystilän jännitys-muodonmuutosmatriisi** (4.63) on sen sijaan muodoltaan tässä mielessä **erilainen**.

#### Tasomuodonmuutostila:

Tasomuodonmuutostilassa on voimassa  $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ , joten jännitysten ja muodonmuutosten yhteydet (4.21) muokkautuvat seuraavasti

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2G + \lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\underbrace{\varepsilon_z}_0 = (2G + \lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= (2G + \lambda)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_x + \lambda\underbrace{\varepsilon_z}_0 = \lambda\varepsilon_x + (2G + \lambda)\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G\underbrace{\gamma_{yz}}_0 = 0, \\ \sigma_z &= (2G + \lambda)\underbrace{\varepsilon_z}_0 + \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y), & \tau_{zx} &= G\underbrace{\gamma_{zx}}_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Näin tasomuodonmuutostilan jännitys-muodonmuutosyhteys käsittää kolme yhtälöä

$$\sigma_x = (2G + \lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y, \quad \sigma_y = \lambda\varepsilon_x + (2G + \lambda)\varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (4.66)$$

jotka kytkevät toisiinsa jännitykset  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  ja muodonmuutokset  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  sekä lausekkeen

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4.67)$$

poikittaiselle normaalijännitykselle. Tasojännitystilän jännitys-muodonmuutosyhteys (4.67) voidaan näin esittää matriisimuodossa

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}, \quad (4.68)$$

missä

$$[E] = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

on tasomuodonmuutostilan muodonmuutos-jännitysmatriisi. Ratkaisemalla lausekkeiden (4.66) kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä venymät  $\varepsilon_x$  ja  $\varepsilon_y$  sijoittamalla ne lausekkeeseen (4.67) saadaan tasomuodonmuutostilan poikittaiselle normaalijännitykselle tulos

$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2(G + \lambda)}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.70)$$

On tärkeätä havaita, että **tasomuodonmuutostila jännitys-muodonmuutosmatriisi** (4.69) on muodoltaan **samanlainen** kuin kolmidimensioiden jännitystilän jännitys-muodonmuutosmatriisi (4.22), sillä se saadaan jälkimmäisestä pudottamalla rivit ja sarakkeet 3, 5 ja 6 pois. **Tasomuodonmuutostilan muodonmuutos-jännitysmatriisi**, jota tässä yhteydessä ei ole esitetty, on sen sijaan muodoltaan tässä mielessä **erilainen**.

#### 4.38 Materiaalit, joiden mekaaninen käyttäytyminen on monimutkaisempaa

Kuten on käynyt ilmi, lineaarisesti kimmoinen Hooken aine on abstraktio. Minkään todellisen materiaalin ei tiedetä täsmällisesti noudattavan Hooken lakia. Kuitenkin rajoitetuilla lämpötila-, jännitys- ja venymä-alueilla se on käyttökelpoinen. Todelliset materiaalit käyttäytyvät monimutkaisemmin. Niiden jännitys-muodonmuutosriippuvuus on epälineaarinen ja ilmaistavissa muodollisesti jännitysten ja muodonmuutosten epälinearisena yhteytenä

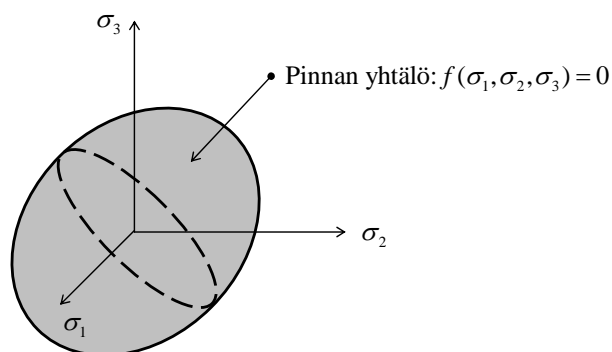
$$\{\sigma\} = \{\sigma(\{\varepsilon\})\}. \quad (4.71)$$

Koska rakennemateriaalit ovat usein, käytännössä esiintyvillä jännitys- ja muodonmuutosalueilla, lineaarisesti kimmoisia, on esitetyllä yleistetyllä Hooken lailla suuri merkitys lujuusopissa, rakenteiden mekaniikassa ja sitä kautta rakenteiden suunnittelussa. Tiettyjen rajojen ulkopuolelle Hooken laki ei enää ole voimassa. Esimerkiksi riittävän suurten jännitysten tai venymien alaisena käytännöllisesti katsoen jokainen kiinteä aine rikkoutuu (murtuu) tavalla tai toisella ja murtuminen ei noudata Hooken lakia.

## 5. Vaurioitumiskriteerit

### 5.1 Johdanto

Kappaleen kestävyden arvostelu suoraan 1-akselisen jännitys-venymäkäyrän perusteella ei yleensä ole mahdollista kappaleen useampiakselisen jännitys- ja muodonmuutostilan takia. Aineen mikrorakenteeseen perustuvat teorit ovat taas liian monimutkaisia käytännössä sovellettaviksi. Tämän vuoksi on esitetty joukko **vaurioitumiskriteerejä**, jotka perustuvat sekä kokeissa mitattuihin aineen lujuusarvoihin että teoreettisissa murtumistarkasteluissa saatuihin tuloksiin. Vaurioitumiskriteerejä käyttöä tukevat lisäksi vaurioitumistapauksien yhteydessä tehdyt havainnot sekä kriteerejä sovellettaessa saatu kokemus suunniteltujen rakenteiden kestävydestä.



**Kuva 5.1:** Periaatteellinen vaurioitumisrajapinta.

Vaurioitumiskriteerien matemaattinen esitys voidaan perustaa ns. **vaurioitumisrajapinnan** käsitteeseen. Tämä ilmaistaa yleensä jännitystilaa kuvaavien invarianttien, kuten esimerkiksi pääjännitysten avulla muodossa (kuva 5.1)

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (5.1)$$

Jos jännitysyhdistelmä  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  toteuttaa yhtälön (5.1), se aiheuttaa kappaleen murtumisen tarkasteltavassa pisteessä. Tällöin jännitysvaruuden piste  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  on vaurioitumisrajapinnalla. Jos  $f < 0$ , jolloin piste  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  on vaurioitumisrajapinnan sisäpuolella, jännitysyhdistelmä ei aiheuta

vaurioitumista. Tilannetta, jossa  $f > 0$ , ei voi esiintyä, koska vaurioituminen tarkasteltavassa pisteessä on jo aiemmin tapahtunut.

Vaurioitumistarkastelun suorittamiseksi voidaan usein käyttää hyväksi ns. **vertailujännitystä**  $\sigma_{\text{vert}}$ , joka ilmaistaa pääjännitysten tai suorakulmaisen  $x, y, z$ -koordinaatiston jännityskomponenttien avulla. Ehdon aineen vaurioitumiselle ilmaiseen yhtälö

$$\sigma_{\text{vert}} = \sigma_{\text{kr}}, \quad (5.2)$$

missä  $\sigma_{\text{kr}}$  on kriittinen jännitys. **Sitkeiden aineiden** yhteydessä vaurioitumisen otaksutaan tapahtuvan myötämällä ja kriittisenä jännityksenä käytetään aineen **myötörajaa**. **Hauraiden aineiden** yhteydessä vaurioitumisen otaksutaan tapahtuvan murtumalla ja kriittisenä jännityksenä käytetään aineen **veto- tai puristusmurtolujuutta**.

### 5.2 Vaurioitumiskriteerejä

Sitkeiden aineiden vaurioituminen kytetään siis materiaalin myötämiseen. Niiden yhteydessä vaurioitumisrajapintaa kutsutaan **myötöpinnaksi**. Vaurioitumiskriteeri on tarkasteltavan pisteen jännitystilaa avulla ilmaistu materiaalin **myötöehto**, jonka toteutuessa materiaali tarkasteltavassa pisteessä **myötää**. Hauraiden aineiden vaurioituminen kytetään materiaalin murtumiseen. Niiden yhteydessä vaurioitumisrajapintaa voidaan kutsua **murtorajapinnaksi**. Vaurioitumiskriteeri on tarkasteltavan pisteen jännitystilaa avulla ilmaistu materiaalin **murtoehto**, jonka toteutuessa materiaali tarkasteltavassa pisteessä **murtuu**.

Myötöehtoon tai murtoehtoon liittyvät materiaaliparametrit, saadaan vaatimalla ehdon olevan voimassa sopivissa koeolosuhteissa, joissa vallitsee yksinkertainen jännitystila. Tässä esityksessä tämä yksinkertainen jännitystila saadaan aikaan yksiakselisessa vetokokeessa, jolloin **myötörajaa** tai **murtolujuutta** merkitään symbolilla<sup>1</sup>  $\sigma_m$ , tai yksiakselisessa veto- ja puristuskokeessa, joita vastaavia myötörajoja tai murtolujuuksia merkitään  $\sigma_m^+$  ja  $\sigma_m^-$ .

<sup>1</sup> Tätä merkintää ei saa sekoittaa keskimääräiseen normaalijännitykseen  $\sigma_m$ , jota on käytetty edellä.

### 5.21 Maksimi pääjännityskriteeri (MPJ) eli Rankinen kriteeri

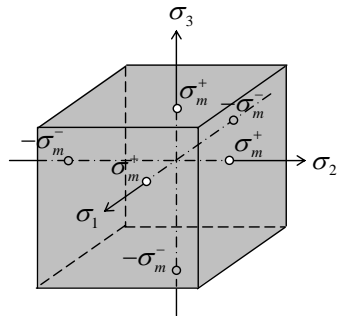
Tämän kriteerin mukaan aine murtuu suurimman positiivisen pääjännityksen  $\sigma_1$  saavuttaessa aineen vetomurtolujuuden  $\sigma_m^+$  tai pienimmän negatiivisen pääjännityksen  $\sigma_{III}$  saavuttaessa aineen puristusmurtolujuuden (vastaluvun)  $-\sigma_m^-$ , eli

$$\sigma_I = \sigma_m^+, \quad \sigma_{III} = -\sigma_m^- \quad (5.3)$$

On voitu sekä teoreettisesti että kokeellisesti havaita, että haurasmurtuma tapahtuu yleensä suurinta vetojännitystä vastaan kohtisuorassa suunnassa. Niinpä MPJ sopiikin parhaiten hauraasta aineesta tehdyn kappaleen murtumisen tarkasteluun.

#### (a) Maksimi pääjännityskriteeri kolmidimensioisessa jännitystilassa

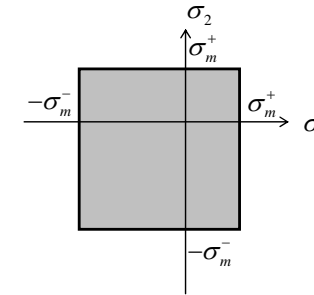
Maksimi pääjännityskriteerin murtorajapinta  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -koordinaatistossa on esitetty graafisesti kuvassa 5.1. Se on kuutio, joka leikkaa positiiviset koordinaattiakselit kohdassa  $\sigma_m^+$  ja negatiiviset koordinaattiakselit kohdassa  $-\sigma_m^-$ .



**Kuva 5.1:** Maksimi pääjännityskriteerin (Rankinen) murtorajapinta.

#### (b) Maksimi pääjännityskriteeri tasojännitystilassa

Maksimi pääjännityskriteerin murtorajapinta tasojännitystilassa on kuvan 5.2 mukainen neliö.



**Kuva 5.2:** Maksimi pääjännityskriteerin (Rankinen) murtorajapinta tasojännitystilassa.

### 5.22 Maksimi leikkausjännityskriteeri (MLJ) ja Trescan myötöehto

**Maksimi leikkausjännityskriteerin eli ns. Trescan myötöehdon** mukaan myötääminen kappaleen tarkasteltavassa pisteessä tapahtuu, kun suurin leikkausjännitys  $\tau_{\max}$  saavuttaa kriittisen arvon  $\tau_m$ , ns. **myötöleikkausjännityksen** eli

$$\tau_{\max} = \tau_m \quad (5.4)$$

Kappaleen tarkasteltavan pisteen suurin leikkausjännitys on

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad (5.5)$$

missä  $\sigma_I$  ja  $\sigma_{III}$  ovat suurin ja pienin pääjännitys.

Tarkastellaan kuvan 5.3 yksiakselisen vetokokeen jännitystilaa. Siinä  $\sigma_x = \sigma$  ja kaikki muut viisi jännityskomponenttia ovat nollia. Nyt  $\sigma_I = \sigma$  ja  $\sigma_{III} = 0$  ja kaava (5.5) antaa  $\tau_{\max} = \sigma/2$ . Materiaalin **myötäraja**  $\sigma_m$  määritetään yksiakselisessa vetokokeessa. Se on jännityksen  $\sigma$  arvo myötämishetkellä eli  $\sigma = \sigma_m$  (vrt. kuva 5.4). Myötöehdosta (5.4) seuraa nyt myötöleikkausjännitykselle tulos

$$\tau_m = \frac{\sigma_m}{2} \quad (5.6)$$



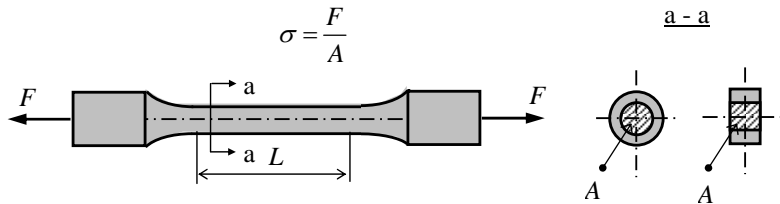
Maksimi leikkausjännityskriteeri voidaan nyt kaavojen (5.5) ja (5.6) perusteella esittää muodossa

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_m, \quad (5.7)$$

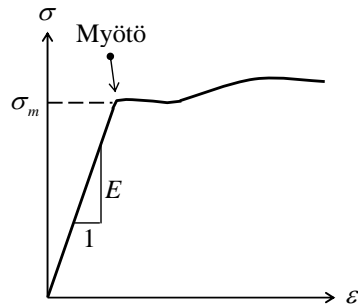
ja siihen liittyvä vertailujännitys on siten

$$\sigma_{\text{vert}} = \sigma_I - \sigma_{III}. \quad (5.8)$$

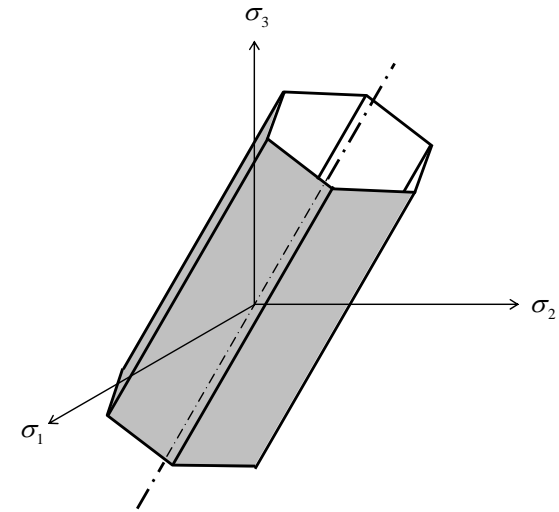
Käytännössä siis lasketaan vertailujännityksen  $\sigma_{\text{vert}}$  arvo kappaleen tarkasteltavassa pisteessä ja sitä verrataan materiaalin myötörajaan  $\sigma_m$ . Jos  $\sigma_{\text{vert}} < \sigma_m$ , materiaali ei myödy vaan toimii kimmoisena. Jos  $\sigma_{\text{vert}} = \sigma_m$ , materiaali myötää.



**Kuva 5.3:** Metallien vetokoe



**Kuva 5.4:** Sitkeän materiaalin vetokokeen  $\sigma - \epsilon$  -käyrä



**Kuva 5.5:** Maksimi leikkausjännityskriteerin mukainen (Trescan) myötöpinta.

(a) Maksimi leikkausjännityskriteeri kolmidimensioisessa jännitystilassa

Maksimi leikkausjännityskriteerin myötöpinta  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  -koordinaatistossa on kuvan 5.5 mukainen lieriö, jonka poikkileikkaus on säännöllinen kuusikulmio ja jonka akseli muodostaa yhtä suuret kulman kunkin koordinaattiakselin suhteen. Myötöpintoja ja niiden geometriaa tarkastellaan yksityiskohtaisemmin plastisuusteoriaa käsittelevässä kirjallisuudessa.

(b) Maksimi leikkausjännityskriteeri tasoijännitystilassa

Tasoijännitystilassa nolasta eroavat jännityskomponentit ovat  $\sigma_x, \sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$  sekä pääjännitykset ovat vastaavasti

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = 0 \quad (5.9)$$

Näiden keskinäinen suuruusjärjestys voi vaihdella. Tarkastellaan eri tapauksia.

Jos  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \equiv 0$ , niin myötöehto (5.7) on

$$\sigma_1 = \sigma_m. \quad (5.10a)$$

Koordinaatistossa, jonka akselit ovat  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , lauseke (5.10a) esittää  $\sigma_2$ -akselin suuntaista suoraa, joka leikkaa  $\sigma_1$ -akselin pisteessä  $+\sigma_m$  (vrt. kuva 5.6). Jos  $\sigma_1 \geq \sigma_3 \equiv 0 \geq \sigma_2$ , niin myötöehto on

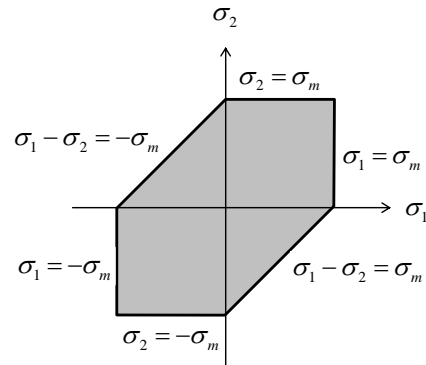
$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_m. \quad (5.10b)$$

Koordinaatistossa, jonka akselit ovat  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , lauseke (5.10b) esittää kaltevaa suoraa, joka leikkaa  $\sigma_1$ -akselin pisteessä  $+\sigma_m$  ja  $\sigma_2$ -akselin pisteessä  $-\sigma_m$  (vrt. kuva 5.6).

Jos  $\sigma_2 \leq \sigma_1 \leq \sigma_3 \equiv 0$ , niin myötöehto on

$$\sigma_2 = -\sigma_m. \quad (5.10c)$$

Koordinaatistossa, jonka akselit ovat  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , lauseke (5.10c) esittää  $\sigma_1$ -akselin suuntaista suoraa, joka leikkaa  $\sigma_2$ -akselin pisteessä  $-\sigma_m$  (vrt. kuva 5.6). Vastaavaan tapaan voidaan käsitellä kolme jäljellä olevaa tapausta  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \equiv 0$ ,  $\sigma_1 \leq \sigma_3 \equiv 0 \leq \sigma_2$  ja  $\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 \equiv 0$  ja konstruoida kuvan 5.6 kolme muuta suoraa.



**Kuva 5.6:** Maksimi leikkausjännityskriteerin mukainen (Trescan) myötöpinta tasojännitystilassa.

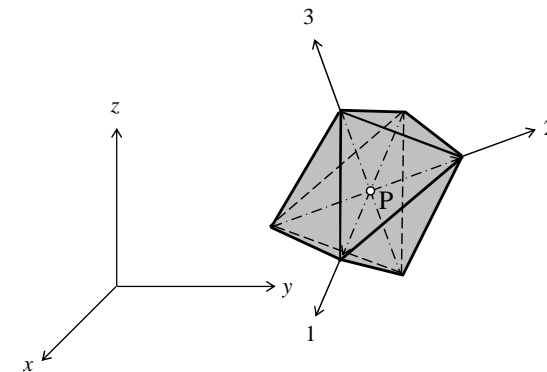
Kuva 5.6 esittää Trescan myötöehdon tasojännitystilassa. Myötöpinta on tässä tapauksessa suljettu kuusikulmion muotoinen murtoviiva. Se on kuvan 5.5 kolmidimensioisen myötöpinnan ja  $\sigma_1, \sigma_2$ -tason leikkauskäyrä.

### 5.23 Oktaedrileikkausjännityskriteeri ja Misesin myötöehto

Niin sanotulla **oktaedritasolla** ymmärretään kappaleen tarkasteltavassa pisteessä olevaa tasoa, joka normaali muodostaa yhtä suuret kulmat pisteessä vallitsevan jännitystilän pääsuuntien 1, 2 ja 3 kanssa. Pääkoordinaatistossa tällaisia tasoa on itse asiassa 8 kappaletta (kuva 5.7). **Oktaedrijännityksillä** ymmärretään oktaedritasolla vaikuttavia normaali- ja leikkausjännitystä. Liitteessä B on johdettu lausekkeet oktaedritason normaali- ja leikkausjännitykselle.

Oktaedrileikkausjännityskriteerin mukaan materiaali myötää, kun oktaedrileikkausjännitys  $\tau_{\text{oct}}$  saavuttaa kriittisen arvon  $\tau_m$ , **myötöleikkausjännityksen**. Näin Misesin myötöehto voidaan ilmaista kaavalla

$$\tau_{\text{oct}} = \tau_m. \quad (5.11)$$



**Kuva 5.7:** Oktaedritasot kappaleen pisteessä P

Yksiaksellisessa vetokokeessa myötäämishetkellä  $\sigma_x = \sigma = \sigma_m$  (vrt. kuva 5.3). Oktaedrileikkausjännitykselle saadaan kaavasta (B.8) siten

$$\tau_{\text{oct}} \equiv \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_m \quad (5.12)$$

ja myötöehdosta (5.11) seuraa myötöleikkausjännitykselle

$$\tau_m = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_m. \quad (5.13)$$

Kaavojen (B.4), (B.8), (B.9) ja (5.19) käyttäen oktaedrileikkausjännityskriteerin mukainen myötöehto (5.11) voidaan esittää deviaatiojännitysinvariantin  $J_2$  (vrt. liite C), pääjännitysten, ja  $x, y, z$ -koordinaatiston jännityskomponenttien avulla muodoissa

$$\sqrt{3J_2} = \sigma_m, \quad (5.14a)$$

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \sigma_m, \quad (5.14b)$$

ja

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_m. \quad (5.14c)$$

Oktaedrileikkausjännityskriteerin mukainen vertailujännitys on täten

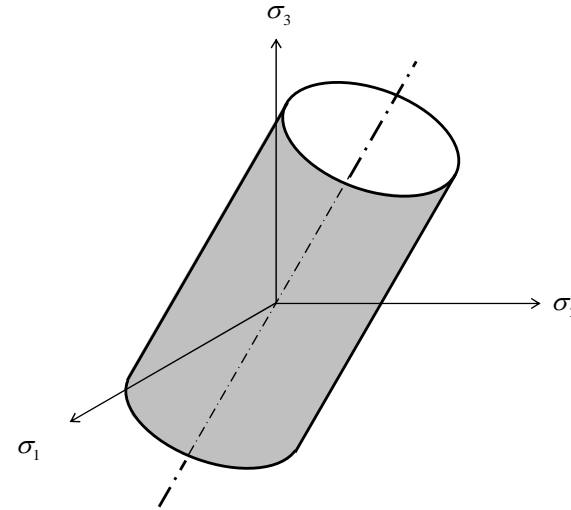
$$\begin{aligned} \sigma_{\text{vert}} &= \sqrt{3J_2} \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \\ &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

(a) Oktaedrileikkausjännityskriteeri kolmidimensioisessa jännitystilassa

Korottamalla myötöehto (5.14b) puolittain toiseen, saadaan

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_m^2 = 0. \quad (5.16)$$

Tämä yhtälö esittää  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -koordinaatistossa kuvan 5.8 ympyrälieriötä, jonka akseli muodostaa yhtä suuret kulmat kunkin koordinaattiakselin suhteen.



**Kuva 5.8:** Oktaedrileikkausjännityskriteerin mukainen (Misesin) myötöpinta.

(b) Oktaedrileikkausjännityskriteeri tasojännitystilassa:

Tasojännitystilassa  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , joten oktaedrileikkausjännityskriteerin mukainen myötöehto saa muodon

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \sigma_m, \quad (5.17a)$$

ja

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_m. \quad (5.17b)$$

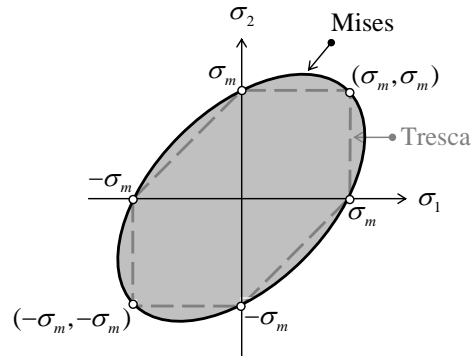
Vertailujännitys tasojännitystilassa on vastaavasti

$$\sigma_{\text{vert}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}. \quad (5.18)$$

Korottamalla yhtälö (5.17a) puolittain toiseen se saadaan muotoon

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_m^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_m^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_m^2} = 1. \quad (5.19)$$

Tämä on ellipsin yhtälö. Kun  $\sigma_2 = 0$  yhtälöstä (5.18) saadaan  $\sigma_1 = \pm \sigma_m$ , kun  $\sigma_1 = 0$  saadaan  $\sigma_2 = \pm \sigma_m$  ja kun  $\sigma_1 = \sigma_2$  saadaan  $\sigma_1 = \sigma_2 = \pm \sigma_m$ . Näin saadaan kuvan 5.9 mukainen Misesin myötöpinta. Kuvaan on vertailun vuoksi piirretty myös vastaava Trescan kuusikulmio.



**Kuva 5.9:** Misesin myötöehto tasojännitystilassa

### 5.23 Sisäisen kitkan kriteeri ja Mohr-Coulombin myötöehto

Mohr on esittänyt vaurioitumisteorian, jonka mukaan myötääminen tapahtuu pisteessä, jonka jännitystilalla on sellainen, että jollakin pisteen kautta kulkevalla tasolla leikkausjännitys  $\tau$  (suuruus  $\tau = |\tau|$ ) saavuttaa normaalijännityksestä  $\sigma$  riippuvan arvon

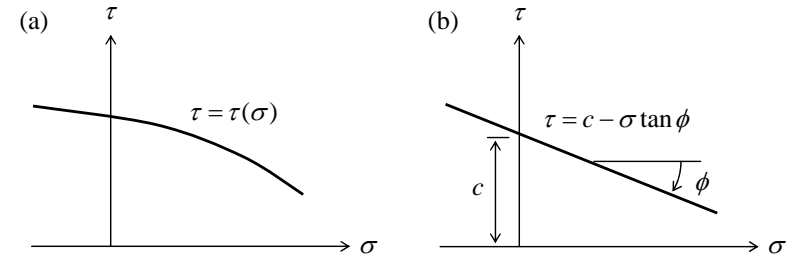
$$\tau = \tau(\sigma). \quad (5.20)$$

Kuva 5.10a esittää tämän myötöehdon graafisesti  $\sigma, \tau$ -tasossa.

**Sisäisen kitkan** eli **Mohr-Coulombin** teoriassa otaksutaan, että kriittinen leikkausjännitys riippuu sisäisestä kitkasta lausekkeen

$$\tau = c - \sigma \tan \phi, \quad (5.21)$$

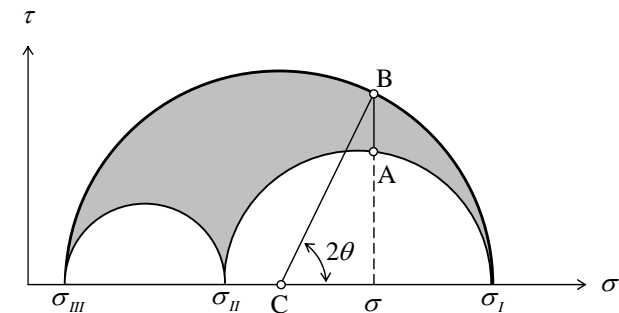
mukaisesti (vrt. kuva 5.10b). Tässä lausekkeessa vakiota  $c$  on kutsutaan



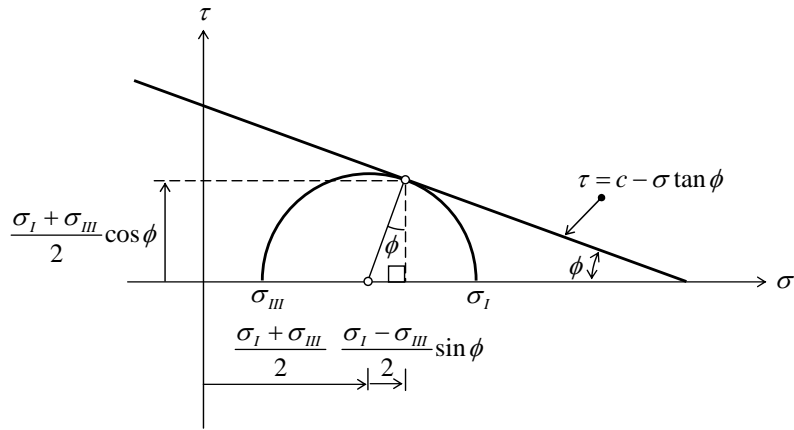
**Kuva 5.10:** (a) Mohrin ja (b) Mohr-Coulombin vaurioitumiskriteeri  $\sigma, \tau$ -tasossa.

**koheesioksi** ja kulmaa  $\phi$  **kitkakulmaksi**. Mohrin kriteerin funktioksi  $\tau(\sigma)$  on siis valittu lineaarinen lauseke.

Tarkastellaan jännitystilaa, jota vastaavat pääjännitykset suurusjärjestyksessä ovat  $\sigma_I, \sigma_{II}$  ja  $\sigma_{III}$ . Kuva 5.11 esittää jännitystilaa Mohrin ympyröitä. Koska jännitystilaa edustavan pisteen tulee sijaita ympyröiden välisellä harmaalla alueella, tiettyä normaalijännitystä  $\sigma$  vastaavan pisteen  $(\sigma, \tau)$  tulee sijaita janalla AB. Tämän perusteella normaalijännitystä  $\sigma$  vastaavaa suurinta leikkausjännitystä edustaa piste B. (Taso, jolla nämä jännitykset vaikuttavat muodostaa kulman  $\theta$  pääakselin  $I$  suhteen.) Päätelemme siis, että suurin Mohrin ympyrä esittää jännitystilaa suurimman mahdollisen leikkausjännityksen normaalijännityksen funktiona.



**Kuva 5.11:** Tarkasteltavassa pisteessä vaikuttavaa normaalijännitystä  $\sigma$  vastaava suurin leikkausjännitys  $\tau$ .



$$\sigma_m^- = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi}. \quad (5.24b)$$

Näitä käyttäen Mohr-Coulombin myötöehto (5.23) saa yksinkertaisen muodon

$$\frac{\sigma_I}{\sigma_m^+} - \frac{\sigma_{III}}{\sigma_m^-} = 1, \quad (5.25)$$

missä siis  $\sigma_m^+$  ja  $\sigma_m^-$  ovat yksiakselisen veto- ja puristuskokeen saadut veto- ja puristusmyötörajat.

(a) Sisäisen kitkan kriteeri kolmidimensioisessa jännitystilassa

Sisäisen kitkan kriteerin mukainen myötöpinta  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  -koordinaatistossa on kuvan 5.13 mukainen kartiopinta, jonka poikkileikkaus on kuusikulmio ja jonka akseli muodostaa yhtä suuret kulman kunkin koordinaattiakselin suhteen.

**Kuva 5.12:** Kriittisen jännitystilän Mohrin ympyrä.

Kuva 5.12 esittää Mohr-Coulombin kriteerin perusteella kriittisen jännitystilän Mohrin ympyrää, joka sivuaa suoraa  $\tau = c - \sigma \tan \phi$ . Kuvion perusteella kriittiselle normaalijännitykselle ja leikkausjännitykselle saadaan

$$\sigma = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \sin \phi, \quad \tau = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \cos \phi. \quad (5.22)$$

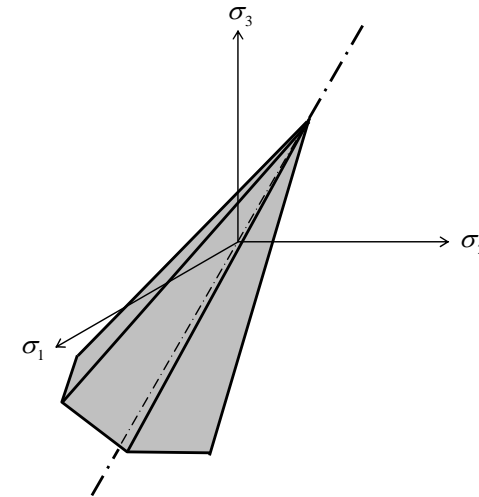
Sijoittamalla nämä myötöehtoon (5.21), se saadaan lausutuksi suurimman ja pienimmän pääjännityksen avulla seuraavasti

$$\sigma_I \frac{1 + \sin \phi}{2c \cos \phi} - \sigma_{III} \frac{1 - \sin \phi}{2c \cos \phi} = 1 \quad (5.23)$$

Yksiakselisen vetokokeen myötäessä  $\sigma_I = \sigma_m^+$  ja  $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$ , joten myötöehto (5.23) antaa

$$\sigma_m^+ = \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (5.24a)$$

Yksiakselisen puristuskokeen myötäessä  $\sigma_{III} = -\sigma_m^-$  ja  $\sigma_I = \sigma_{II} = 0$ , joten myötöehto (5.23) antaa



**Kuva 5.13:** Sisäisen kitkan kriteerin mukainen (Mohr-Coulombin) myötöpinta.

(b) Sisäisen kitkan kriteeri tasojännitystilassa

Jos  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \equiv 0$ , niin  $\sigma_I = \sigma_1$  ja  $\sigma_{III} = 0$ , ja myötöehto (5.25) on

$$\sigma_1 = \sigma_m^+ \quad (5.26a)$$

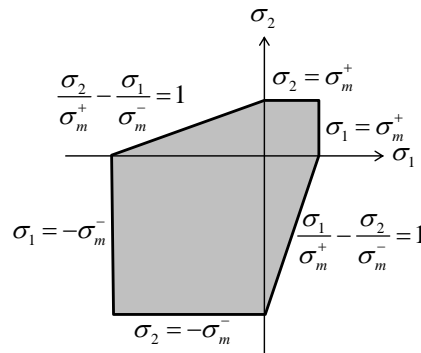
Koordinaatistossa, jonka akselit ovat  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , lauseke (5.26a) esittää  $\sigma_2$ -akselin suuntaista suoraa, joka leikkaa  $\sigma_1$ -akselin pisteessä  $+\sigma_m^+$  (vrt. kuva 5.14). Jos  $\sigma_1 \geq \sigma_3 \equiv 0 \geq \sigma_2$ , niin  $\sigma_I = \sigma_1$  ja  $\sigma_{III} = \sigma_2$ , ja myötöehto (5.25) on

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_m^+} - \frac{\sigma_2}{\sigma_m^-} = 1 \quad (5.26b)$$

Koordinaatistossa, jonka akselit ovat  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , lauseke (5.26b) esittää kaltevaa suoraa, joka leikkaa  $\sigma_1$ -akselin pisteessä  $+\sigma_m^+$  ja  $\sigma_2$ -akselin pisteessä  $-\sigma_m^-$  (vrt. kuva 5.14). Jos  $\sigma_2 \leq \sigma_1 \leq \sigma_3 \equiv 0$ , niin  $\sigma_I = 0$  ja  $\sigma_{III} = \sigma_2$ , ja myötöehto (5.25) on

$$\sigma_2 = -\sigma_m^- \quad (5.26c)$$

Koordinaatistossa, jonka akselit ovat  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , lauseke (5.26c) esittää  $\sigma_1$ -akselin suuntaista suoraa, joka leikkaa  $\sigma_2$ -akselin pisteessä  $-\sigma_m^-$  (vrt. kuva 5.14). Vastaavaan tapaan voidaan käsitellä kolme jäljellä olevaa tapausta  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \equiv 0$ ,  $\sigma_1 \leq \sigma_3 \equiv 0 \leq \sigma_2$  ja  $\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 \equiv 0$  ja konstruoida kuvan 5.18 kolme muuta suoraa. Kuva 5.14 esittää havainnollisesti Mohr-Coulombin myötöpinnan tasojännitystilassa.



**Kuva 5.14:** Mohr-Coulombin myötöehto tasojännitystilassa

## 5.14 Oktaedritason sisäisen kitkan kriteeri ja Drucker-Prager myötöehto

Seuraavassa esitellään ns. **Drucker-Prager myötöehto**. Tässä käytettävä nimitys **oktaedritason sisäisen kitkan kriteeri** on ehkä kuvaava, mutta ei ole muualla käytössä. Tässä kriteerissä otaksutaan myötöämisen tapahtuvan, kun oktaedritason leikkausjännitys  $\tau_{\text{oct}}$  saavuttaa arvon, joka riippuu tämän tason normaalijännityksestä  $\sigma_{\text{oct}}$  lausekkeen

$$\tau_{\text{oct}} = c - \sigma_{\text{oct}} \tan \phi \quad (5.27)$$

mukaisesti (vrt. kuva 5.10b).

Yksiakselisessa vetokokeen myötäessä  $\sigma_x = \sigma_m^+$  ja muut jännityskomponentit ovat nollia, joten kaavojen (B.6) ja (B.8) perusteella saadaan

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}\sigma_m^+, \quad \tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_m^+, \quad (5.28a)$$

ja myötöehto (5.27) antaa

$$\sigma_m^+ = \frac{3c}{\sqrt{2} + \tan \phi} \quad (5.29a)$$

Yksiakselisessa puristuskokeessa vastaavasti  $\sigma_x = -\sigma_m^-$  ja muut jännityskomponentit ovat nollia, joten saadaan

$$\sigma_{\text{oct}} = -\frac{1}{3}\sigma_m^-, \quad \tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_m^- \quad (5.28b)$$

ja myötöehto (5.27) antaa

$$\sigma_m^- = \frac{3c}{\sqrt{2} - \tan \phi} \quad (5.29b)$$

Ratkaisemalla yhtälöistä (5.29) koheesio ja kitkakulma, saadaan

$$c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\sigma_m^+ \sigma_m^-}{\sigma_m^+ + \sigma_m^-}, \quad \tan \phi = \sqrt{2} \frac{\sigma_m^- - \sigma_m^+}{\sigma_m^+ + \sigma_m^-} \quad (5.30)$$

Kaavojen (B.4), (B.8), (B.9) ja (5.19) käyttäen oktaedritason sisäisen kitkan kriteerin mukainen myötöehto (5.27) voidaan esittää jännitysinvanttien  $I_1$  ja  $J_2$ , pääjännitysten sekä  $x, y, z$ -koordinaatiston jännityskomponenttien avulla muodoissa

$$\alpha I_1 + \sqrt{3J_2} = \bar{\sigma}_m, \quad (5.31a)$$

$$\alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \bar{\sigma}_m \quad (5.31b)$$

ja

$$\alpha(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \bar{\sigma}_m \quad (5.31c)$$

missä

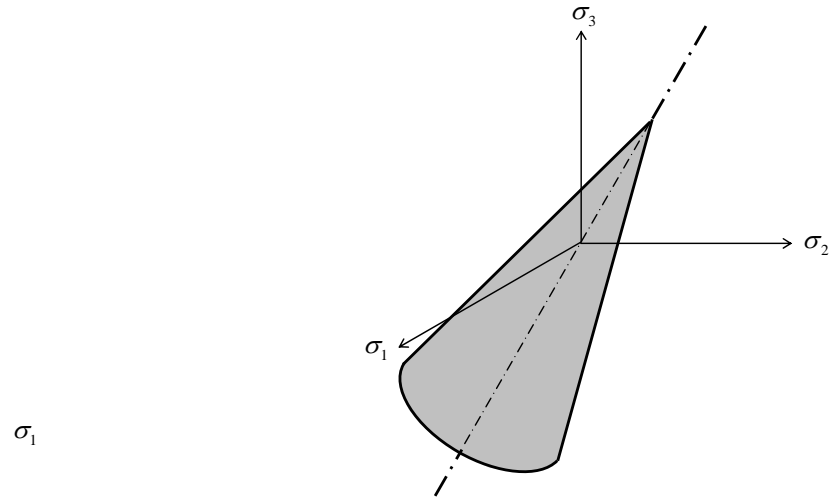
$$\alpha = \frac{\tan \phi}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_m^- - \sigma_m^+}{\sigma_m^+ + \sigma_m^-}, \quad \bar{\sigma}_m = \frac{3}{\sqrt{2}}c = \frac{2\sigma_m^+ \sigma_m^-}{\sigma_m^+ + \sigma_m^-}. \quad (5.32)$$

#### (a) Oktaedritason sisäisen kitkan kriteeri kolmidimensioisessa jännitystilassa

Korottamalla yhtälö (5.31b) puolittain toiseen saadaan se muotoon

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv (1 - \alpha^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (1 + 2\alpha^2)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + 2\alpha\bar{\sigma}_m(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \bar{\sigma}_m^2 = 0. \quad (5.33)$$

Tämä yhtälö esittää  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -koordinaatistossa kuvan 5.15 ympyräkartiota, jonka akseli muodostaa yhtä suuret kulmat kunkin koordinaattiakselin suhteen.



**Kuva 5.15:** Oktaedritason sisäisen kitkan kriteerin mukainen (Drucker-Prager) myötöpinta.

#### (b) Oktaedritason sisäisen kitkan kriteeri tasojännitystilassa

Tasojännitystilassa Drucker-Prager myötöehto (5.31) on

$$\alpha(\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \bar{\sigma}_m \quad (5.34a)$$

ja

$$\alpha(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \bar{\sigma}_m \quad (5.34b)$$

Korottamalla yhtälö (5.34a) puolittain toiseen saadaan

$$(1 - \alpha^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - (1 + 2\alpha^2)\sigma_1\sigma_2 + 2\bar{\sigma}_m\alpha(\sigma_1 + \sigma_2) = \bar{\sigma}_m^2 \quad (5.35)$$

Piirretään funktion kuvaaja laskemalla sen ja  $\sigma_1$ - ja  $\sigma_2$ -akselien leikkauspisteet sekä pisteet, joissa  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Käyrän ja  $\sigma_1$ -akselin leikkauspisteessä  $\sigma_2 = 0$ , jolloin yhtälöstä (5.34a) saadaan

$$\alpha\sigma_1 \pm \sigma_1 = \bar{\sigma}_m \Rightarrow \sigma_{1,1} = \frac{\bar{\sigma}_m}{1+\alpha} = \sigma_m^+, \quad \sigma_{1,2} = -\frac{\bar{\sigma}_m}{1-\alpha} = -\sigma_m^-$$

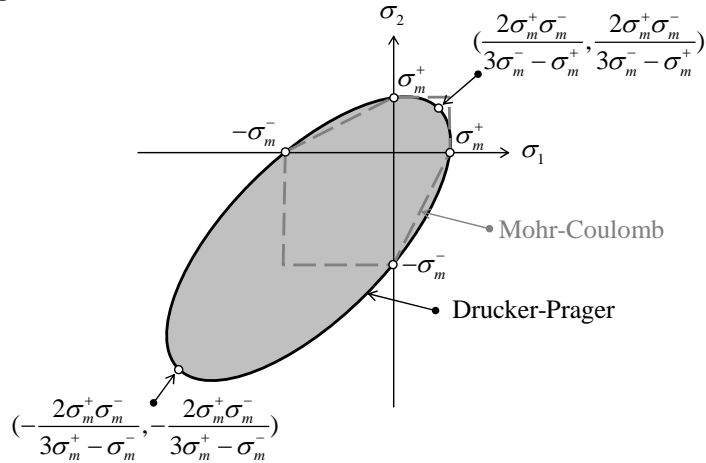
Käyrän ja  $\sigma_2$ -akselin leikkauspisteessä  $\sigma_1 = 0$ , jolloin yhtälöstä (5.34a) saadaan vastaavasti

$$\sigma_{2,1} = \frac{\bar{\sigma}_m}{1+\alpha} = \sigma_m^+, \quad \sigma_{2,2} = -\frac{\bar{\sigma}_m}{1-\alpha} = -\sigma_m^-$$

Kun  $\sigma_1 = \sigma_2$  yhtälöstä (5.34a) saadaan vastaavasti

$$2\alpha\sigma_1 \pm \sigma_1 = \bar{\sigma}_m \\ \Rightarrow \sigma_{1,1} = \sigma_{2,1} = \frac{\bar{\sigma}_m}{1+2\alpha} = \frac{2\sigma_m^+\sigma_m^-}{3\sigma_m^- - \sigma_m^+}, \quad \sigma_{1,2} = \sigma_{2,2} = -\frac{\bar{\sigma}_m}{1-2\alpha} = -\frac{2\sigma_m^+\sigma_m^-}{3\sigma_m^+ - \sigma_m^-}$$

Kuva 5.16 esittää Drucker-Prager myötöehdon tasojännitystilassa ( $\sigma_m^- = 2\sigma_m^+$ ). Jos  $\sigma_m^- < 3\sigma_m^+$  se on ellipsi, jos  $\sigma_m^- = 3\sigma_m^+$  se on paraabeli ja jos  $\sigma_m^- > 3\sigma_m^+$  se on hyperbeli.



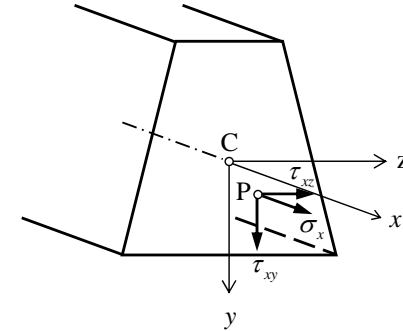
**Kuva 5.16:** Drucker-Prager myötöehto tasojännitystilassa ( $\sigma_m^- = 2\sigma_m^+$ ).

## 5.3 Vaurioitumiskriteerit sauvan jännitystilassa

### 5.3.1 Sauvan jännitystila

Tarkastellaan poikkileikkaukseltaan muuttumatonta, suoraa sauvaa, johon on liitetty karteellinen  $x, y, z$ -koordinaatisto siten, että  $x$ -akseli yhtyy sauvan akseliin (poikkileikkausten pintakeskiöiden ura). Jos sauvan poikkileikkauksen mitat ovat sauvan pituuteen nähden pienet, ja jos sauvan sivupinnoille ei kohdistu kuormitusta, voidaan jännityskomponenttien  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  ja  $\tau_{yz}$  otaksua häviävän. Tällaista jännitystilaa kutsutaan tässä **sauvan jännitystilaksi**. Kuvan 5.17 esittää sauvan poikkileikkausta.

Sauvan jännitystilassa vaurioitumiskriteerit yksinkertaistuvat huomattavasti ja niiden käyttö on varsin helppoa. Tämän kurssin loppuosassa käsitellään pääasiassa sauvarakenteita, joiden yhteydessä sauvan jännitystila on voimassa ja seuraavassa esitettävät yksinkertaiset kaavat siis voimassa.



**Kuva 5.17:** Sauvan poikkileikkaus.

Poikkileikkauksen yleisessä pisteessä P vallitseva jännitystila käsittää jännityskomponentit  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  muiden kolmen jännityskomponentin ollessa nollia. Suurimmalle ja pienimmälle pääjännitykselle sauvan jännitystilassa saadaan (liite A) kaavat

$$\sigma_I = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}), \quad \sigma_{III} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}), \quad (5.36)$$



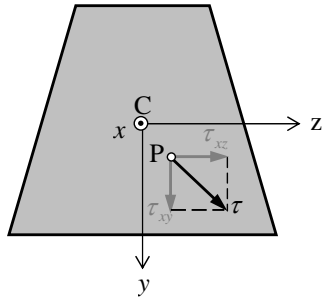
missä

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (5.37)$$

on poikkileikkauksessa vaikuttavan leikkausjännitysvektorin

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k} \quad (5.38)$$

itseisarvo eli lyhyemmin poikkileikkauksessa vaikuttavan leikkausjännityksen suuruus (vrt. kuva 5.18).



**Kuva 5.18:** Sauvan poikkileikkauksen pisteessä P vaikuttavan leikkausjännityksen suuruus.

### 5.32 Maksimi pääjännityskriteeri (MPJ) sauvan jännitystilassa

Maksimi pääjännityskriteerin mukainen (Rankinen) murtoehto sauvan jännitystilassa on

$$\sigma_{\text{vert},1} \equiv \sigma_I = \sigma_m^+, \quad \sigma_{\text{vert},2} \equiv \sigma_{III} = -\sigma_m^- \quad (5.39)$$

Lasketaan siis suurin ja pienin pääjännitys kaavoilla (5.36). Nämä ovat vertailujännitykset, joita verrataan veto- ja puristusmurtolujuuteen.

### 5.33 Maksimi leikkausjännityskriteeri (MLJ) sauvan jännitystilassa

Maksimi leikkausjännityskriteerin vertailujännitykselle (5.8) saadaan sauvan jännitystilassa

$$\sigma_{\text{vert}} = \sigma_I - \sigma_{III} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}) = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}.$$

Näin maksimi leikkausjännityskriteerin mukainen (Trescan) myötöehto sauvan jännitystilassa on

$$\sigma_{\text{vert}} \equiv \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} = \sigma_m. \quad (5.40)$$

### 5.34 Oktaedrileikkausjännityskriteeri (OLJ) sauvan jännitystilassa

Oktaedrileikkausjännityskriteerin mukaiselle vertailujännitykselle sauvan jännitystilassa ( $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ ) saadaan lähtien kaavasta (5.15)

$$\sigma_{\text{vert}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2}. \quad (5.41)$$

Näin oktaedrileikkausjännityskriteerin mukainen (Misesin) myötöehto sauvan jännitystilassa on

$$\sigma_{\text{vert}} \equiv \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} = \sigma_m. \quad (5.40)$$

### 5.35 Sisäisen kitkan kriteeri sauvan jännitystilassa

Sisäisen kitkan kriteerin mukainen (Mohr-Coulombin) murtoehto sauvan jännitystilassa on ehkä tarkoituksenmukaista esittää muodossa

$$\frac{\sigma_I}{\sigma_m^+} - \frac{\sigma_{III}}{\sigma_m^-} = 1, \quad (5.41)$$

jossa suurin ja pienin pääjännitys lasketaan kaavasta (5.36).

### 5.35 Oktaedritason sisäisen kitkan kriteeri sauvan jännitystilassa

Oktaedritason sisäisen kitkan kriteerin mukaiselle (Drucker-Prager) murtoehdolle sauvan jännitystilassa ( $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ ) saadaan lähtien kaavasta (5.31c)

$$\alpha \sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 3(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} = \bar{\sigma}_m \Rightarrow \alpha \sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} = \bar{\sigma}_m \quad (5.42)$$

Näin oktaedritason sisäisen kitkan kriteerin mukainen (Drucker-Prager) myötöehto sauvan jännitystilassa on

$$\alpha\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} = \bar{\sigma}_m, \quad (5.43)$$

missä parametrit  $\alpha$  ja  $\bar{\sigma}_m$  saadaan kaavoista (5.32).

**Liite A:** Pääjännitykset sauvan jännitystilassa.

Jännitysmatriisi sauvan jännitystilassa on

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (A.1)$$

Jännitysinvarianteille saadaan

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} \\ &= -(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2), \\ I_3 &= \det[\sigma] = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (A.2)$$

Yhtälö pääjännitysten määrittämiseksi on

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \quad (A.3)$$

Sen ratkaisu tapahtuu seuraavasti

$$\begin{aligned} \sigma^3 - \sigma_x\sigma^2 - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)\sigma &= 0 \Rightarrow (\sigma^2 - \sigma_x\sigma - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2)\sigma = 0 \\ \Rightarrow \sigma^2 - \sigma_x\sigma - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 &= 0 \text{ ja } \sigma = 0 \\ \Rightarrow \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}, \quad \sigma_3 = 0. \end{aligned} \quad (A.4)$$

Pääjännitykset sauvan jännitystilassa ovat siis:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}), \quad \sigma_3 = 0. \quad (A.5)$$

Koska edellisissä lausekkeissa neliöjuurilauseke on suurempi kuin  $\sigma_x$ , pääjännitykset suuruusjärjestyksessä ovat

$$\sigma_I = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}), \quad \sigma_{II} = 0, \quad \sigma_{III} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}). \quad (\text{A.6})$$

missä

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (\text{A.7})$$

**Liite B:** Oktaedritason leikkausjännitys ja normaalijännitys.

Ajatellaan pisteeseen P asetetuksi  $x, y, z$  –koordinaatisto, jonka akselit yhtyvät pääsuuntiin 1, 2 ja 3. Oktaedritason, jonka normaali suuntautuu ensimmäiseen neljännekseen, yksikkönormaalivektori on

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}). \quad (\text{B.1})$$

Traktiokomponentit tällä tasolla ovat

$$\{t\}^{(n)} = [\boldsymbol{\sigma}]\{n\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Oktaedritason normaalijännitykselle saadaan nyt

$$\sigma_{\text{oct}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^{(n)} = n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (\text{B.3})$$

ja oktaedritason leikkausjännityksen suuruudelle

$$\begin{aligned} \tau_{\text{oct}} &= \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - \sigma_{\text{oct}}^2} = \sqrt{t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 - \left[\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Oktaedrijännitykset voidaan myös esittää jännitysinvanttien  $I_1$  ja  $I_2$  sekä edelleen jännityskomponenttien  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}, \dots$  avulla. Oktaedritason normaalijännitykselle saadaan

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1 \quad (\text{B.5})$$

ja

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (\text{B.6})$$

Deviaatiojännitysinvartti  $J_2$  on pääjännityskoordinaatistossa liitteen C kaavan (C.4) perusteella

$$J_2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \quad (\text{B.7})$$

oktaedritason leikkausjännityksen kaava (B.4) saa näin muodon

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3J_2}. \quad (\text{B.8})$$

Ilmaisemalla invariantti  $J_2$  jälleen kaavaa (B.4) käyttäen  $x, y, z$ -koordinaatiston jännityskomponenttien avulla, saadaan

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (\text{B.9})$$

### Liite C: Deviaatiojännitysinvartit

Myötehtojen esittämiseen käyttäen tavanomaisten jännitysinvarttien lisäksi usein myös deviaatiojännitysinvartteja, joille käytetään usein merkintöjä  $J_1$ ,  $J_2$  ja  $J_3$ <sup>2</sup>. Ne määritellään deviaatiojännitysten avulla samaan tapaan kuin tavalliset jännitysinvartit. Erona on kuitenkin se, että toisen invariantin merkki valitaan toisin. Näin ne ovat

$$J_1 = s_x + s_y + s_z = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$J_2 = - \begin{vmatrix} s_x & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s_y & s_{yz} \\ s_{yz} & s_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s_z & s_{zx} \\ s_{zx} & s_x \end{vmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} s_x & s_{xy} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{yz} & s_z \end{vmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Koska ensimmäinen invariantti häviää, niitä on itse asiassa vain kaksi. Tässä monisteessa tarvitsemme vain toista deviaatiojännitysinvarttia, joten muokkaamme sitä sopivaan muotoon.

$$\begin{aligned} J_2 &= - \begin{vmatrix} s_x & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s_y & s_{yz} \\ s_{yz} & s_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s_z & s_{zx} \\ s_{zx} & s_x \end{vmatrix} = -s_x s_y - s_y s_z - s_z s_x + s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 \\ &= -(\sigma_x - \sigma_m)(\sigma_y - \sigma_m) - (\sigma_y - \sigma_m)(\sigma_z - \sigma_m) - (\sigma_z - \sigma_m)(\sigma_x - \sigma_m) \\ &\quad + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ &= 3\sigma_m^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ &= \frac{1}{3}[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3\sigma_x\sigma_y - 3\sigma_y\sigma_z - 3\sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \\ &= \frac{1}{3}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Tässä johdossa merkintä  $\sigma_m$  tarkoittaa keskimääräistä normaalijännitystä eikä myötörajaa.

<sup>2</sup> Merkinnät ovat samat kuin tässä monisteessa on käytetty muodonmuutosinvarianteille. Kysymys ei luonnollisesti ole samoista suureista.