

Jukka Aalto

Jännitetyt betonirakenteet

ALUSTAVA SISÄLTÖSUUNNITELMA:

1. Johdanto
2. Esi- ja jälkijännittämisen teknologia
3. Materiaaliominaisuudet
4. Aksiaalisesi kuormitettujen rakenteiden toiminta
5. Taivutuksen alaiden rakenteiden toiminta
6. Mitoitus taivutukselle
7. Mitoitus leikkaukselle
8. Mitoitus väännölle
9. Päätyalueiden mitoitus
10. Staattisesi määräämättömät rakenteet
- (11. Jälkijännitettyt laatat)

1. JOHDANTO

1.1 Jännitetty betoni

Jännitetty betoni on sellaista teräsbetonia, jossa teräkset (tai osa niistä) jännitetään betonia vasten. Tämä jännittäminen johtaa sellaiseen itsensä tasapainottavaan sisäiseen voimasysteemiin (vetojännitykset teräksissä ja puristusjännitykset betonissa), joka parantaa betonin toimintaa ulkoisten kuormien alaisena.

Betoni on muovautuva, kestävä, palonkestävä ja taloudellinen materiaali. Se on luja ja kokoonpuristuva puristuksen suhteen mutta heikko ja hauras vedon suhteen.

Jos pelkästä betonista, jonka lujuusluokka on K35, tehty sauva on aksiaalisen vedon alaisena, betoni murtuu kun keskimääräinen vetojännitys ylittää betonin ominaisvetolujuuden $f_{ctk} \approx 2 \text{MPa}$ ja jännitysvenymäkäyrä on luonteeltaan kuvan 1.1a mukainen. Sen lisäksi, että betonin vetolujuus on pieni, sitä vastaava venymä on erittäin pieni.

Jos betonisauvaan on valettu 1.5% betoniterästä A400H, jonka ominaislujuus on $f_{yk} = 400 \text{MPa}$, jännitysvenymäkäyrä on luonteeltaan kuvan 1.1b mukainen. Sen sijaan että sauva sortuisi, kun ensimmäinen halkeama syntyy, se kantaa kuormaa kunnes teräkset myötäävät. Koska sortumiseen vaaditaan nyt huomattavasti energiaa (tehty työ on käyrän alapuoleisen pinnan ala), sauva voidaan luokitella sitkeäksi ja venyväksi.

Jos betonisauvassa on 0.5% betoniterästä A400H ja 0.25% jänneterästä St 1600/1800, jonka ominaislujuus on $f_{puk} \approx 1600 \text{MPa}$, jännitysvenymäkäyrä on luonteeltaan kuvan 1.1c mukainen. Jännepunokset esipuristavat sauvan ennen kuormittamista, jonka seurauksena sauva on vahva, sitkeä ja jäykkä.

Jännitetyn betonin käyttöönottaja oli ranskalainen Eugene Freyssinet, joka alkoi 1928 käyttää korkealujuuksista teräslankaa betonin jännittämiseen. Jännitettyä betonia yritettiin kehittää aikaisemminkin käyttäen normaaliujuuksista terästä, mutta siinä ei onnistuttu.

Jännebetoni puristuu ajan mukana kokoon siihen kohdistuvan puristus-

nittämisprosessissa venyttää noin 7/1000. Vaikka häviö on 1/1000 jää esijännityksestä jäljelle 6/7.

Virumisesta ja kutistumisesta aiheutuvien häviöiden vähentämiseksi ja jotta voitaisiin saavuttaa korkeampi esipuristuksen taso, Freyssinetsuositukset ei ainoastaan korkealujuuksien teräksen vaan myös korkealujuuksien betonin käyttämisestä.

Betonin jännittämistä varten kehitettiin kaksi erilaista menetettyä: jälkijännittäminen ja esijännittäminen. Kuva 1.2 esittää jälkijännittämistä, jossa teräs jännitetään sen jälkeen, kun betoni on valettu. Tätä tapaa käytti Freyssinet. Kuva 1.3 esittää esijännittämistä, missä teräs jännitetään ennen betonin valaamista. Saksalainen E. Hoyer kehitti esijännittämisen käytännölliseksi menetellytavaksi vuonna 1938.

1.2 Jännittämisen peruskäsitteet

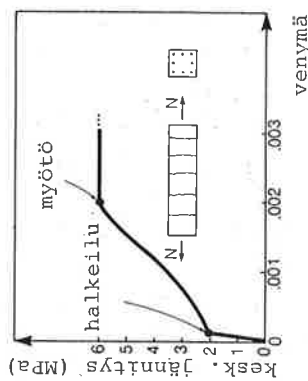
Betonin raudoittamisen lähtökohta, sekä jännitetyissä että jännittämättömissä rakenteissa, on asettaa raudoitus niihin osiin rakennetta joihin ulkoiset kuormat aiheuttavat vetojännityksiä. Jännitetyissä betonissa käytetään korkealujuuksista terästä ja tämä teräs jännitetään ennen kuin ulkoiset kuormat pääsevät vaikuttamaan. Terästen alkujännittäminen esipuristaa ympäröivän betonin ja antaa sille kyvyn kantaa suurempia kuormia halkilematta.

Kuva 1.4 vertailee kahta raudoitettua betonipalkkia, joista toinen on jännitetty. Jännittämättömässä palkissa venymä ja jännityksiä ei esiinny betonissa eikä teräksissä ennen palkin kuormittamista. Jo suhteellisen pieni kuormitus aiheuttaa betonin halkeamisen. Ennen halkeamista teräsjännitykset ovat hyvin pienet. Sortumishetkellä momenttia vastaavat terästen suuret vetojännitykset ja betonin suuret puristusjännitykset.

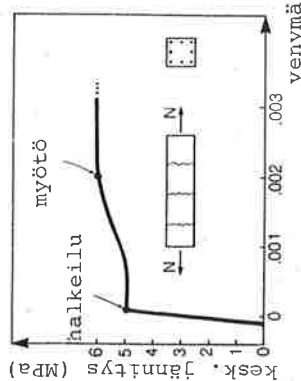
Kuvasta 1.4 ilmenee myös, että jännittäminen johtaa itsensä tasapainottavaan jännitystilaan. Nämä itsensä tasapainottavat jännitykset muodostuvat jänneterästen suurista vetojännityksistä, joiden resultantti on vetävä voima P ja tasapainottavista betonin puristusjännityksistä, joiden resultantti on puristava voima P. Koska nämä kaksi voimaresultanttia kumoavat toisensa, ei jännittämisestä aiheudu pal-



(a) betonisauva



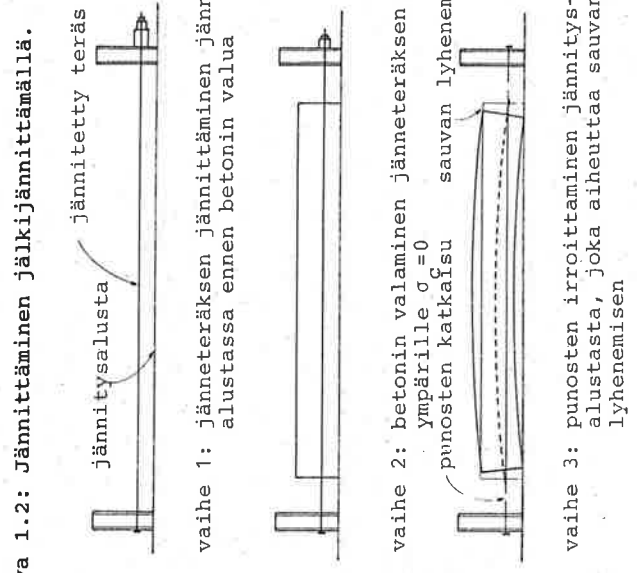
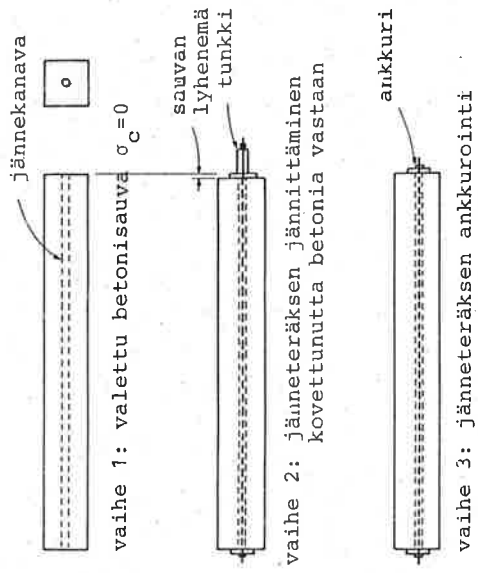
(b) teräsbetonisauva



(c) jännitetty sauva

Kuva 1.1: Pelkän betonin, teräsbetonin ja jännitetyn betonin vaste.

voiman vaikutuksesta. Ilmiötä kutsutaan virumiseksi. Myös kuivumisen vaikutuksesta betoni puristuu ajan mukana kokoon. Ilmiötä kutsutaan kutistumiseksi. Viruminen ja kutistuminen yhdessä saattavat aiheuttaa betoniin 1/1000 suhteellisen kokoonpuristuman. Jos jännittäminen käytettäisiin normaalujuuksisia betoniteräksiä, ne venyisivät likimain 1.5/1000. Täten suurin osa esijännityksestä menisi ajan mukana hukkaan. Korkealujuuksista teräslankaa, toisaalta, voidaan jän-



Kuva 1.3: Jännittäminen esijännittämällä.

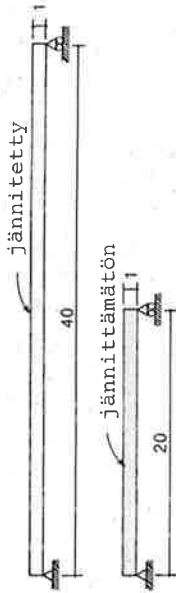
kin poikkileikkaukseen jännitysresultanteja: normaaliavoimaa ($N=0$) ja taivutusmomenttia ($M=0$). Vaikka normaaliavoimaa ja taivutusmomenttia ei ole, palkki kuitenkin lyhenee ja taipuu jännittämisen vaikutuksesta. Koska betonissa on korkeat puristusjännitykset ennen kuorittamista, palkki kestää runsaasti kuormaa ennenkuin palkin alareuna saavuttaa vetojännityksen, joka aiheuttaa halkeilun. Sortumishet-

TILANNE JÄNTEEN KESKELLÄ		
venymät	jännitykset	jänn. res.
		$M=0$
(a) ei ulkoisia kuormia		
(b) halkeilurajatila		
(c) murtorajatila		$M = w l^2 / 8$
	-0.003	
(a) ei ulkoisia kuormia		$N=0, M=0$
(b) halkeilurajatila		
(c) murtorajatila		$M = w l^2 / 8$
	-0.003	

Kuva 1.4: Jännittämättömän ja jännitetyn betonipalkin vertailua.

kellä momenttia vastaavat jänneterästen suuret vetojännitykset ja betonin suuret puristusjännitykset.

Koska jännittämistä voidaan käyttää minimoimaan tai eliminoimaan halkeilu käyttötilassa ja hillitsemään taipumia se johtaa hoikempiin rakenteisiin. Katso kuvaa 1.5.



Kuva 1.5: Tyypilliset jänne-korkeus suhteet jännitettyillä ja jännittämättömillä yksiaukkoisilla betonipalkkeilla.

1.3 Jännitettyjen betonirakenteiden suunnittelu

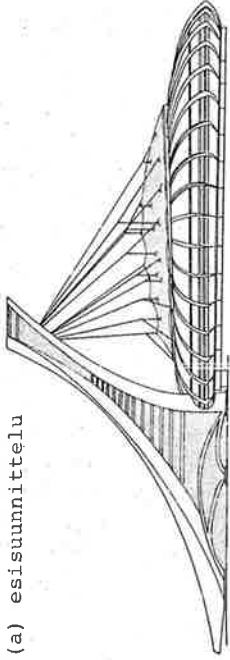
Jännitettyjen betonirakenteiden suunnittelijan tavoitteena on tuottaa turvallinen, käyttökelpoinen, kestävä, taloudellinen ja esteettisesti miellyttävä rakenne. Saavuttaakseen nämä tavoitteet, rakennusinsinööriin täytyy olla perehtynyt peruseriaateisiin, jotka hallitsevat jännitetyn betonin käyttäytymistä.

Suunnittelun voidaan ajatella käsittävän kolme melko erillistä, mutta toisiansa yhteydessä olevaa vaihetta: Esisuunnittelu; analysointi; sekä mitoitus ja detaljisuunnittelu. Katso kuvaa 1.6.

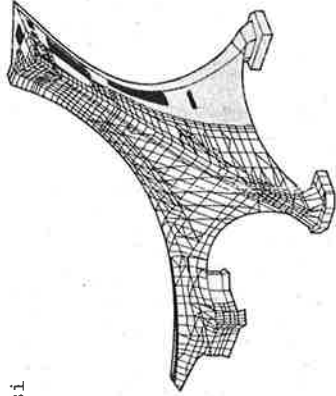
Esisuunnittelu on kriittisin ja luovin osa suunnitteluprosessia. Siinä valitaan rakenteen muoto, alustavat mitat ja jänteiden profiilit. Lisäksi valitaan suunnittelukuormat. Rakenteen käyttötarkoituksen pohjalta suunnittelu etenee käyttäen taitoa, kokemusta, rakennustekniikan tuntemista, intuitiota ja luovuutta. Useimmissa tapauksissa insinööri luottaa saavutettuun kokemukseen ohjeena siitä, mikä on taloudellisin ratkaisu tietyissä olosuhteissa.

Suunnittelun analysointivaiheessa todellinen rakenne idealisoidaan

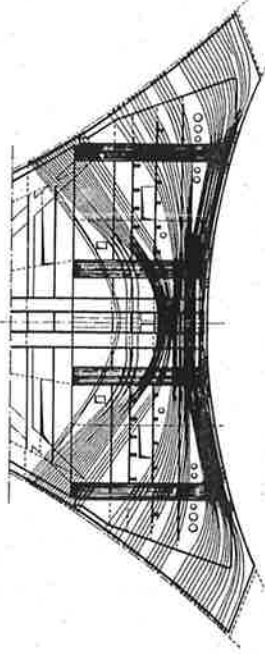
(a) esisuunnittelu



(b) analyysi



(c) mitoitus ja detaljisuunnittelu



Kuva 1.6: Montrealin olympiatornin suunnitteluvaiheet.

elementtiverkolla ja tapa, jolla kuormat jakautuvat elementtien kesken määritellään. Jännitysresultantit tai poikkeileikkaussuureet kaikkialla rakenteessa määritetään. Analysointivaiheessa otaksutaan tyypillisesti lineaarisesti kimmainen käyttäytyminen ja käytetään hienoja, tehokkaita modernin rakenteiden analyysin menetelmiä. Normaalitietokoneohjelmilla (tasokehä, avaruuskehä, elementtimenetelmä) on runsaasti käyttöä analysoinnin tässä vaiheessa.

Mitoitus- ja detaljisuunnitteluvaiheessa yksittäisten rakenneosien vaste niille lasketuille jännitysresultanteille tutkitaan, osien dimensiot tarkistetaan, vaadittavat määrät betoniteräksiä ja jänneteräksiä määritetään ja erityiset detaljit, kuinka terästys sijoitellaan, lyödään lukkoon. Tässä suunnittelun vaiheessa insinöörin täytyy ottaa huomioon monimutkainen, jännitetyn betonin todellinen käyttäytyminen. Menettelytavat, joita perinteisesti käytetään tässä suunnittelun vaiheessa, ovat sekoitus puolikokeellisia kaavoja (esim. halkeamaleveydet ja leikkauskestävyys), likimääräisiä malleja (esim. jännitysten laskeminen otaksumalla lineaarisesti kimmoisen, halkeilematon materiaali) ja järkeviä yksinkertaistavia otaksumia (esim. poikkileikkausten tasopintateoria taivutuksessa). Suuri osa näistä luennoista käsittelee mitoitus- ja detaljisuunnittelun menetelytapoja.

Rakenteiden mekaniikan peruseräiteiden lisäksi, jännitettyjen betonirakenteiden suunnittelija saa myös ohjausta suunnittelunormeista ja käsikirjoista. Nämä asiakirjat esittävät tiivistetysti suunnittelumenetelmiä, jotka ovat menneisyydessä tuottaneet tyydyttäviä rakenteita. Näissä luennoissa käytetään, sikäli kuin on tarkoituksen mukaista, kotimaisia Betoninormeja [6].

2. ESI- JA JÄLKIJÄNNITTÄMISEN TEKNOLOGIA

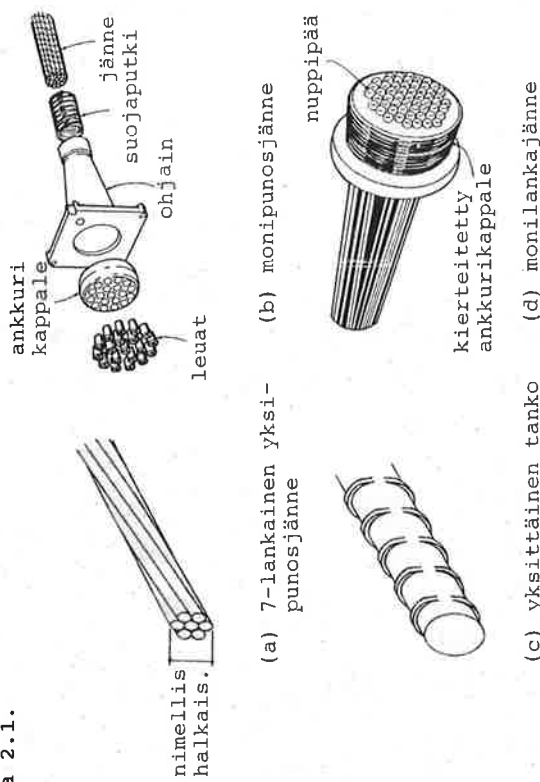
2.1 Johdanto

Jännitettyjen rakenteiden suunnittelijalla tulee olla tietoa jännittämiseen liittyvistä menetelmistä ja teknologiasta, ja hänen täytyy tuntea alan terminologiaa. Tämä kappale esittelee pääpiirtein jännittämistä, kuvailee yksityiskohtaisemmin joitakin laajemmassa käytössä olevia jännittämismenetelmiä ja sisältää jännittämisen terminologiaa.

Informaatio jännittämismenpiteistä jaetaan kahteen luokkaan: esijännittäminen ja jälkijännittäminen. Esijännittämisessä jänne jännitetään ennen betonin valua ja jälkijännittämisessä sen jälkeen.

2.2 Jänneet

Nimitystä "jänne" käytetään kuvaamaan joko yksittäistä lankaa, punosta tai tankoa, tai ryhmää lankoja, punoksia tai tankoja. Katso kuva 2.1.



Kuva 2.1: Tyypillisiä jänneitä.

Laajimmin käytössä oleva jännitetty rauditus on 7-lankainen punos. Koska 7-lankainen punos kehitettiin yhdysvalloissa, yleisimmät ni-

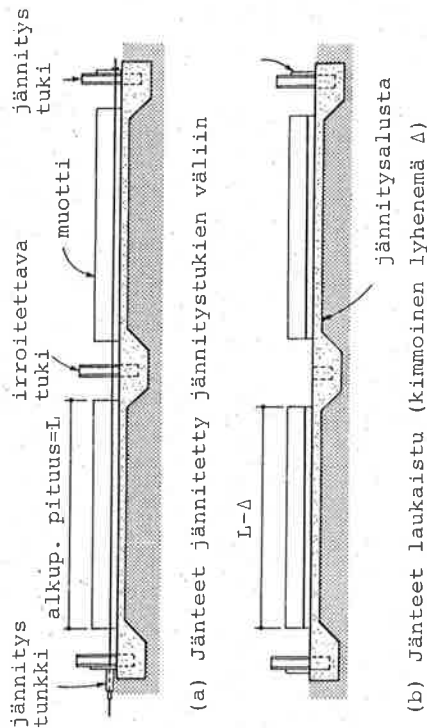
mellishalkaisijat, joita käytetään kautta maailman ovat 3/8in. (9,5mm), 1/2in. (12,5mm) ja 0,6in. (15,2mm). Suomessa yleisimmät näistä ovat jälkimmäiset kaksi ja niille käytetään merkintöjä $\phi 7$ 12,5 ja $\phi 7$ 15,2. Niiden nimellisipinta-alat ovat $A_p = 93\text{mm}^2$ ja $A_p = 139\text{mm}^2$. Jänneteräksiä valmistetaan lujuusluokissa St 1600/1800 ja St 1500/1700 edellisen luvun ilmaistessa ominaismuotolujuuden $f_{p0,2k}$ ja jälkimmäisen ominaismurtolujuuden f_{puk} . Näitä punoksia käytetään sekä esijännitetyissä, että jälkijännitetyissä rakenteissa.

Jännetangot ovat erityinen raudoitustapa, joka on käyttökelpoinen eräissä jälkijännitetyissä rakennetyypeissä. Niiden nimellishalkaisija vaihtelee välillä 16mm ja 36mm ja ominaismurtolujuus välillä 1470MPa ja 1030MPa. Tangot voivat olla sileitä, harjallisia, pinta-kuvioituja tai aallotettuja.

Yksittäisiä jännelankoja käytetään mm. ratapölkkyissä. Nimellishalkaisija vaihtelee välillä 2mm ja 12mm ja ominaismurtolujuus välillä 2060MPa ja 1620MPa.

2.3 Esijännittämisen toimenpiteet

Ensimmäinen vaihe esijännittämisessä on janteen jännittäminen jännitysalueen välillä (katso kuvaa 2.2a). Betoni valetaan sitten muottiin ja kun haluttu lujuus on saavutettu, janteet laukaistaan ja palkista tulee jännitetty (katso kuvaa 2.2b). Jännitys-



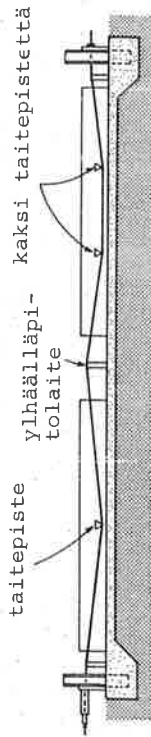
Kuva 2.2: Esijännittäminen jännitysalueesta.

alustat toimivat samalla valun ja jälkihoidon alustoina. Tyypillinen jännitysalue, jonka kummassakin päässä on jännitystuki, on esitetty kuvassa 2.2a. Hyvin pitkät jännitysalueet voidaan jakaa lyhyemmiksi alustoiksi irroitettavien jännitystukien avulla (Katso kuvaa 2.2a). Jännitys- ja valualustojen pituus vaihtelee välillä 25m ja 200m.

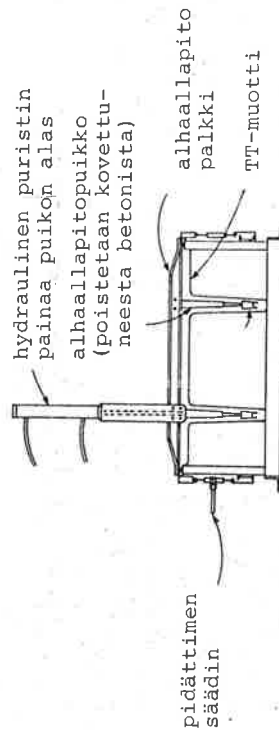
Yleisin esijännittämistapa on jännittäminen punos kerrallaan. Jännittämiseen käytetään erityisiä pitkäiskuisia tunkkeja, jotka tukevat jännitystukiin.

Punokset laukaistaan polttoleikkaamalla tai sahaamalla. Leikkausjärjestys valitaan siten, että jännitystila pysyy mahdollisimman symmetrisenä. Leikkaus tulisi tehdä asteittain ja niin läheltä palkkia kuin mahdollista, jotta palkin päätyalue ei vaurioitu laukaistessa.

Jotta saataisiin aikaan sopivampi jänneprofiili esijännitetyt janteet tehdään usein taitteiksi, kuten kuvassa 2.3. Matalissa rakenteissa, kuten TT-laatta, on tavallisesti yksi taitteipiste janteeseen



(a) Esijännittäminen taitetuin jantein

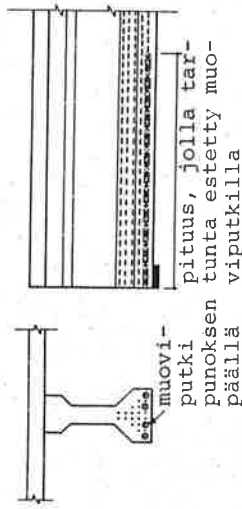


(b) TT-laatan janteen taittaminen

Kuva 2.3: Janteiden taittaminen.

keskellä, kun taas korkeissa rakenteissa, kuten siltojen kannattajat, on kaksi taitepistettä. Punokset joko jännitetään ensin suoriksi ja taitepisteitä siirretään sitten tunkkien avulla, tai ne jännitetään lopullisessa asemassaan. Jälkimmäisessä tapauksessa taitepiteen alhaalla pitävän laitteen täytyy sallia jänteen pitkittäinen liike jännittämisen aikana.

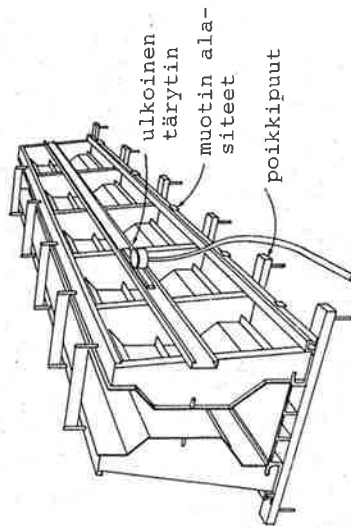
Jänteiden taittaminen vähentää niiden epäkeskisyyttä tuilla, minkä tavoitteena on estää halkeilu yläpinnalla. Toinen tapa päästä tähän tavoitteeseen on vähentää tehokasta jännevoimaa tukialueella estämällä joidenkin punosten tartunta päällystämällä ne muoviputkilla. Katso kuvaa 2.4.



Poikkileikkaus Sivukuva

Kuva 2.4: Punosten tartunnan estäminen tukialueella.

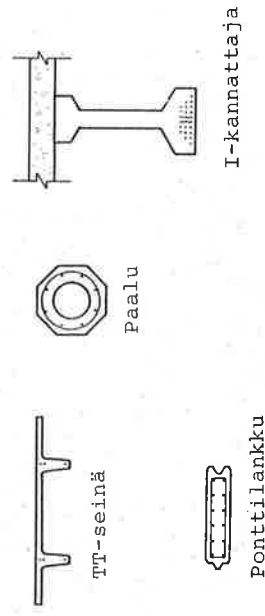
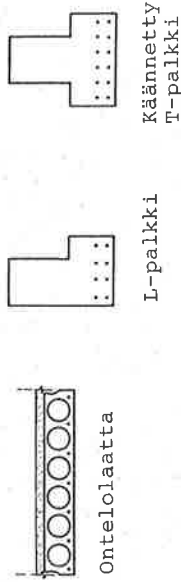
Standardi poikkileikkaumuodoille käytettävien teräsmuottien pituudet vaihtelevat välillä 6m ja 15m. Muotteja voidaan yhdistää pitkiä palkkeja varten. Kuva 2.5 esittää sillan kannattajan teräsmuottia, jossa on irroitettavat sivut ja ulkoinen tärytin.



Kuva 2.5: Sillan I-kannattajan teräsmuotti.

Ulkoisia ja sisäisiä täryttimiä käytetään tiivistämään betoni muoteissa. Tehonokistimia käytetään yleensä vesi-sementtisuhteeseen pienentämiseksi siten, että muokkautuvuus säilyy. Värähteleviä, betonipinnan tasaamiseen tarkoitettuja laitteita käytetään, kun tuotteen yläpinta on suuri. Haravaa voidaan käyttää aikaansaamaan karkeutta pinnalle, josta tulee jännitetyn rakenteen ja paikallavaletun betonin rajapinta.

Jotta saataisiin aikaan päivittäinen tuotantojakso, betonin täytyy saavuttaa jänteiden laukaisemiseen riittävä lujuus 16 tunnissa. Tämä saavutetaan joko lämmittämällä betonia, tai käyttämällä varhaislujaa betonia eristetyissä muoteissa. Lämpökäsittely tapahtuu joko sähkövastuslämmityksenä, höyrykarkaisuna (märkä systeemi) tai kiertämällä kuumaa nestettä (kuiva systeemi).



Ponttilankku

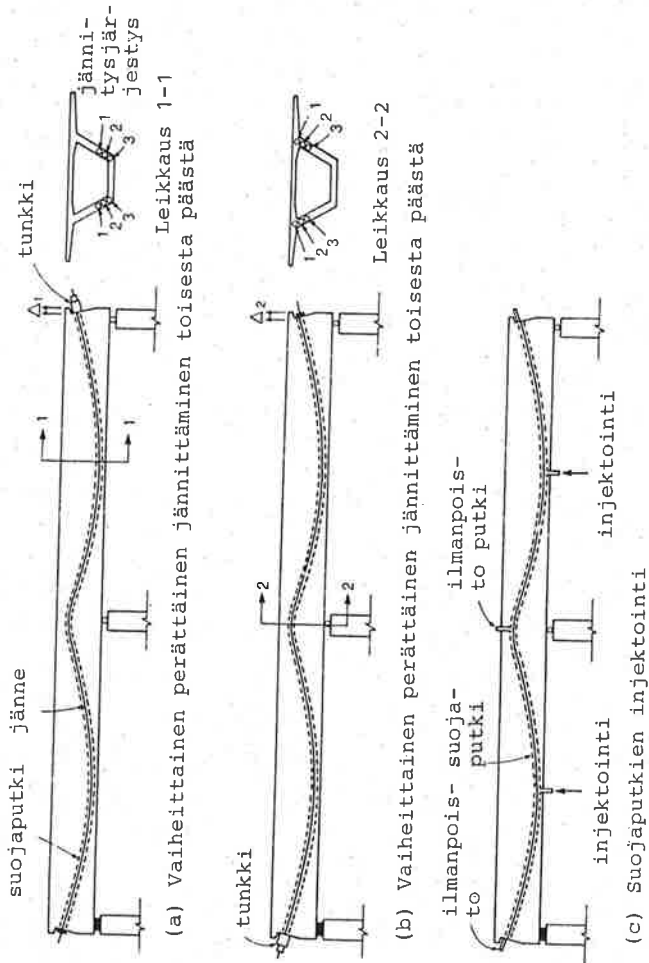
Kuva 2.6: Esijännitettyjen elementtien standardipoikkileikkauksia.

2.4 Esijännitetyt standardielementit

Jännityville betonielementeille suositellaan käytettäväksi standardipoiikkileikkauksia, joita käytetään Kanadassa. Suomessa käytössä olevat ovat hyvin samanlaisia. Standardipoiikkileikkausten lisäksi eri elementteilla on omat yksilölliset poiikkileikkausvalikoimansa. Insinöörin tulisiikin jo suunnittelun alkuvaiheessa tutustua erikoispoiikkileikkauksiin, joita paikallisista elementtitehtaista on saatavilla.

Standardityypit käsittävät: uumalla varustetut elementtillaatat (T- ja TT-laatat); litteät elementtillaatat (massiivilaatat ja ontelolaa-
tat); ei-kantavat elementtiseinät (massiiviseinät ja TT-seinät ja onteloseinät); elementtirungon osat (suorakaidepalkit, L-palkit, käännetty T-palkit ja vastaavat pilarit); perustuselementit (paalut ja ponttilankut) ja siltojen I-pääkannattajat.

Ontelolaataaelementit tuotetaan tavallisesti pursotustekniikalla pitkällä jännitysalustalla. Alhaisen notkeuden omaavaa betonimassaa



Kuva 2.7: Jälkijännittämisen toimenpiteet.

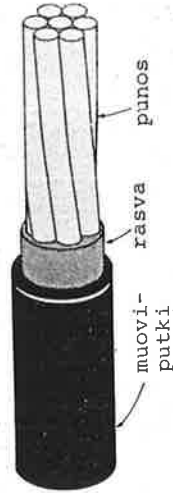
syötetään kiskoilla, pitkin jännitysalustaa kulkevan pursotuskoneen syöttösuppilon ja tämä pursottaa betonimassan esijännitettävien jän-
teiden ympärille. Kartionmuotoiset kairat tai tuurnat muotoilevat ontelot samalla kun pursotuskone etenee rataa pitkin. Sen jälkeen kuin betoni on jälkihöidetty, punokset vapautetaan tultaan ja onte-
lolaatta leikataan haluttuihin jännemittoihin.

2.5 Jälkijännittämisen toimenpiteet

Ensimmäinen vaihe jälkijännitetyn palkin valmistamisessa on panna häkkiraudiote ja jänteen suojaputki muottiin. Betonin valamisen ja kovettumisen jälkeen, jänteet jännitetään ja ankkuroidaan käyttäen erityisiä jälkijännitystunkkeja, jotka vaikuttavat palkkia vasten. Ellei käytetä tartunnattomia jänteitä, jännekanava injektoidaan lo-
puksi. Katso kuvaa 2.7.



(a) Injektoitu, poimullinen suojaputki, jonka sisällä monipunosjänne



(b) Muovinen rasvalla täytetty suojaputki, jonka sisällä yksipunosjänne

Kuva 2.8: Tartunnallinen ja tartunnaton jänne.

Kuva 2.8 esittää tyyppillisen tartunnallisen ja tartunnattoman jänneen rakenteen. Tartunnallisessa jänneessä injektointilaasti kiinnittää jänne ympäröivään betoniin ja estää korroosion. Tartunnattoman jänne kiinnittyy betoniin ainoastaan päätyankkuriensa kohdilla. Tartunnattoman jänneen korroosiosuoja pyritään aikaansaamaan rasvalla täytetyllä muoviputkella ja erityisillä ankkurointidetalojeilla.

Tyyppillinen sovellutus tartunnattomien jänneiden käytöstä on jälki-jännitetty kaksiaukkoinen laatta, jossa pieni suojaputken halkaisija, alhainen kitka punoksen ja rasvatun suojaputken välillä sekä injektointivaiheen poisjääminen yhdessä tuottavat huomattavan kustannusäästön. Tartunnattomien jänneiden yhteydessä tulee kiinnittää erityistä huomiota siihen, että punos on suojaassa korroosiolta sielillä, missä se liittyy päätyankkureihin. Halkeilun hallitsemiseksi saatetaan myös joutua lisäämään raudoitusta. Tartunnattomien jänneiden käyttöön kantavissa rakenteissa tulisi eräiden alan asiantuntijoiden (mm. prof. A. Mirza, Lakeheadin yliopistosta, Kanadasta, joka oli tämän kurssin vieraillevana luennoitsijana syksyllä 1993) mielestä välittää mm. niihin liittyvän korroosioriskin vuoksi. Näissä luennoissa käsitellään lähinnä tartunnallisia jänneitä.

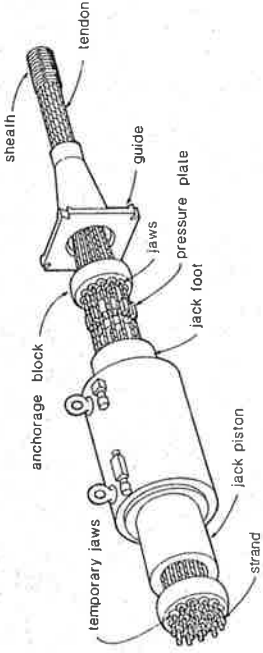
2.6 Jälkijännittämismenetelmät

Useita erityyppisiä jälkijännitysmenetelmiä on saatavilla. Ne poikkeavat toisistaan jännetyypin, jännitystavan ja ankkurointilaitteen suhteen.

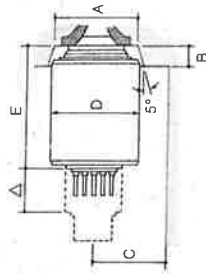
Neljä erilaista jännetyyppiä on käytössä: yksipunosjänne, yksitankojänne, monilankajänne ja monipunosjänne. Jännetyypin valintaan vaikuttavat jännevoiman lisäksi (1) yksipunosjänteen tunkki- ja ankkurointisysteemien kompaktius, (2) muttereilla varustettujen tankojen jatkamisen ja ankkuroinnin helppous, (3) sileiden nuppipaisten lankojen positiivinen ankkurointi ja alhainen kitka, ja (4) monipunosjänteiden monipuolisuus ja taloudellisuus.

Lyhyt yhteenvedo joidenkin yleisimmässä käytössä olevien jälkijännitysmenetelmien yksityiskohdista annetaan seuraavassa:

Freyssinet menetelmä kuvataan kuvassa 2.9. Tässä monipunosmenetelmässä kolmiosaisten kartiomaiset hampaat, jotka asettuvat ankkurikap-



(a) tunkki ja ankkurin osat



jack type	A (mm)	B (mm)	C (mm)	D (mm)	E (mm)
4/5	140	100	100	325	630
7/5	180	100	135	325	630
12/5	250	120	175	390	750
12/6	300	125	200	510	900
19/6	500	140	250	510	900

(b) ankkurin yksityiskohtia

unit	range in strands	sheath inside dia. (mm)	tendon force, (kN) 0,7 A _{ps} f _{pu}
1/5	1	25	129
7/5	2	54	257
	7		900
12/5	8	69	1028
	12		1543
19/5	13	84	1671
	19		2443
27/5	20	94	2572
	27		3472
37/5	28	113	3600
	37		4758
55/5	38	128	4696
	55		7072

(c) 1/2 in (13 mm) series

unit	range in no. of strands	sheath inside dia. (mm)	tendon force, (kN) 0,7 A _{ps} f _{pu}
1/6	1	35	182
4/6	2	55	365
	4		730
7/6	5	70	912
	7		1277
12/6	8	80	1469
	12		2189
19/6	13	100	2371
	19		3465
27/6	20	120	3648
	27		4924
37/6	28	130	5107
	37		6748

(d) 0.6 in (15 mm) series

Kuva 2.9: Freyssinet monipunos jännittämismenetelmä.

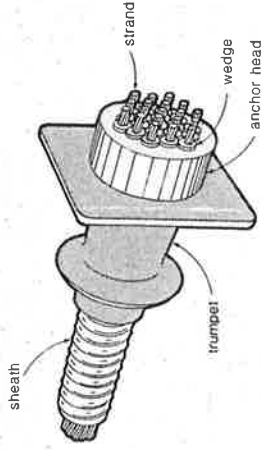
paleen kartionmuotoisiin reikiin, pitävät kutakin punosta lujassa otteessa. Jännittäminen tapahtuu keskireiällä varustetulla tunkilla, joka samanaikaisesti jännittää kaikki jänteen punokset. Tunkin päästön yhteydessä, punosten veto aktivoi kiillamaiset hampaat, jotka ankkuroidvat punokset. Jänteen pitenemisen häviö, joka liittyy tähän ankkuroiduun paikalleen asettamiseen (ankkuroidintihäviö), tulee ottaa huomioon suunnittelussa. Suunnittelua varten hyödyllisiä detaljeja, kuten jänneiden minimiväli, minimi vapaat reunaetäisyydet, ankkuroidintisyvyyksen minimimitat ja toleranssit, jotka vaaditaan eri tehoisille tunkeille, on esitetty kuvassa 2.9.

Kuva 2.10 esittää yhteenvetomaisesti hyödyllisiä yksityiskohtia VSL monipunosmenetelmästä. Tämän menetelmän jännitys- ja ankkuroidintilaitteet ovat saman tyyppiset kuin Freyssiin menetelmässä. Monipunosjänteitä voidaan jännittää molemmista päistä kitkahäviöiden pienentämiseksi tai yhdestä päästä, jolloin toisessa päässä on passiiviankkuri. Sekä Freyssiin että VSL menetelmät käyttävät 7-lankaista punosta, jonka nimellishalkaisija on 12.5mm tai 15.2mm.

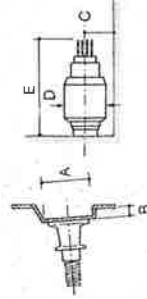
Dywidag jälkijännitysmenetelmä, jota esitellään kuvassa 2.11, käyttää korkealujuuksisia erikoisterästankoja, joissa on jatkuvat valssat kierteet. Näitä kierretankoja, joita on saatavilla aina 18m:n pituuteen saakka, voidaan mukavasti jatkaa missä kohdassa tahansa ja varustaa aktiiviankkureilla, joissa on kartiomainen mutteri, joka nojautuu levy- tai muhviiankkuriin. Tällä ankkuroidintisytemillä on tyyppillisesti häviävän pienet ankkuroidintihäviöt.

BBRV menetelmän, jota esitellään kuvassa 2.12, perusajatus on sileiden, korkealujuuksisten teräslankojen käyttö. Langat ankkuroidaan päästään niihin tyssäämällä aikaansaatavien "nuppipäiden" avulla. Langat ovat halkaisijaltaan 7mm ja niiden poikkipinta-ala on 38,5mm². Jänteen yhdensuuntaiset langat kulkevat kaikki yhteisen ankkuripään läpi. Ennen jänteen päästöä, ankkuripään ja ankkurilevyn väliin pannaan välilevyjä, jotka lukitsevat jänteen pitenemän paikalleen.

Yksipunosjänteet, jotka ovat tavallisesti tartunnattomia, katso kuvaa 2.13, tarjoavat taloudellisen ja monipuolisen keinon jälkijännittää ohuita laattoja ja ohuita sauoja. Yksipunosjänteet voidaan järjestää yhdeksi ainoaksi vaakasuoraksi kerrokseksi, joka yhdessä



(a) aktiiviankkuri



(b) ankkuroiduun yksityiskohtia

jack type	A (mm)	B (mm)	C (mm)	D (mm)	E (mm)
E5-3	356	127	178	330	1295
E5-7	406	127	229	406	1321
E5-12	457	127	254	457	1321
E5-19	559	178	254	457	1397
E5-31	686	178	279	508	1448
E5-55	914	254	457	762	1778

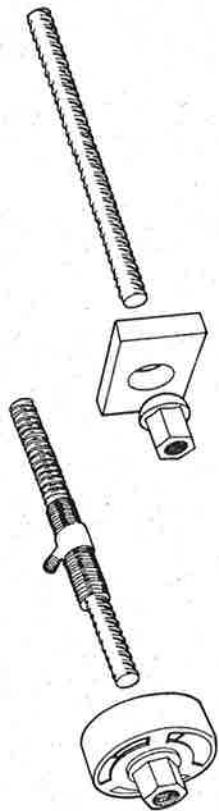
unit	range in no. of strands	sheath inside dia. (mm)	tendon force, 0.7 A _{ps} pu
E5-3	2	31	257
	3	36	386
E5-4	4	41	514
	5	44	643
E5-7	7	50	900
	8	50	1029
E5-12	12	63	1545
	13	66	1671
E5-19	19	78	2442
	20	81	2571
E5-22	22	85	2828
	23	88	2957
E5-31	31	100	3965
	55	138	7070

(c) VSL 1/2 in (13 mm) "E series"

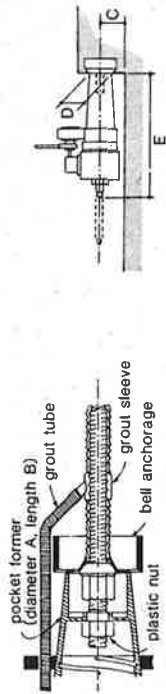
unit	range in no. of strands	sheath inside dia. (mm)	tendon force, (kN) 0.7 A _{ps} pu
E6-3	2	36	365
	3	36	547
E6-4	4	50	730
	5	57	912
E6-7	7	57	1277
	8	71	1459
E6-12	12	75	2189
	13	81	2371
E6-19	19	95	3465
	20	100	3648
E6-22	22	100	4012
	23	114	4195
E6-31	31	125	5654
	55	165	10031

(d) VSL 0.6 in (15 mm) "E series"

Kuva 2.10: VSL monipunos jännittämismenetelmä.



(a) muhvi- ja levyankkuri



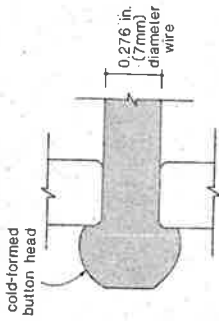
nominal bar dia. (mm)	bell anchor size (mm)	anchor plate size (mm)	A (mm)	B (mm)	C (mm)	D (mm)	E (mm)
15	83 φ x 38	76 x 76 x 19	79	121	83	52	610
26	140 φ x 67	127 x 140 x 32	130	178	102	106	660
32	171 φ x 67	152 x 178 x 38	165	203	102	106	660
36	197 φ x 79	178 x 191 x 44	165	219	152	120	762

(b) tunkki ja ankkuroinnin yksityiskotia

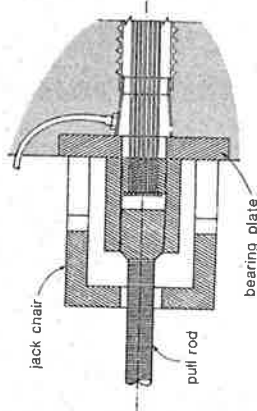
nominal bar dia. (mm)	area A_{ps} (mm ²)	sheath inside dia. (mm)	ultimate stress, f_{pu} (MPa)	bar force (kN) $0.7 A_{ps} f_{pu}$
15	177	19	1080	134
26	548	32	1030	398
32	806	38	1030	580
36	1018	44	1030	734

(c) tankojen koot ja ominaisuudet

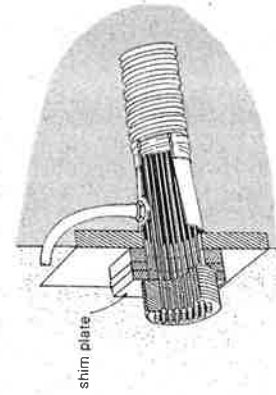
Kuva 2.11: Dywidag kierretanko jännittämismenetelmä.



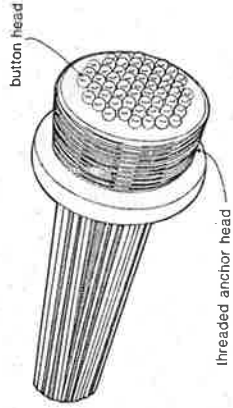
(a) nuppipää ankkuri



(c) vetotangolla jännitetty jänne

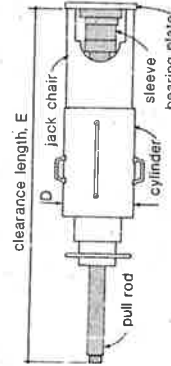


(d) ankkurilevyn asetus ohuiden täytelevyjen avulla



(b) monilanka-ankkuri

unit	range in size of wires	sheath outside dia. (mm)	$0.7 A_{ps} f_{pu}$ (kN)	jack dia D (mm)	jack length, E (mm)
7	7	41	47	203	1524
	12	60	379	203	1524
	19	60	589	305	2134
	30	64	926	381	2438
	37	73	1472	457	2438
	48	81	1804	457	2743
	55	89	2279	635	2743
	61	92	2525	635	2743
	73	99	2896	635	2743
	85	108	2944	635	2743
	85	108	3465	635	2743
	85	108	3513	635	2743
	121	special	4273	special	special
			5745		



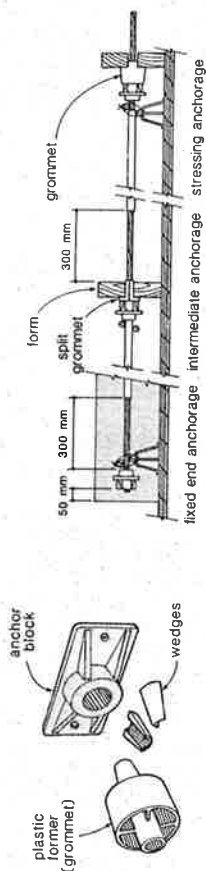
(e) tunnin yksityiskohtia

(f) BBRV jännekokoja ja tunkin mittoja

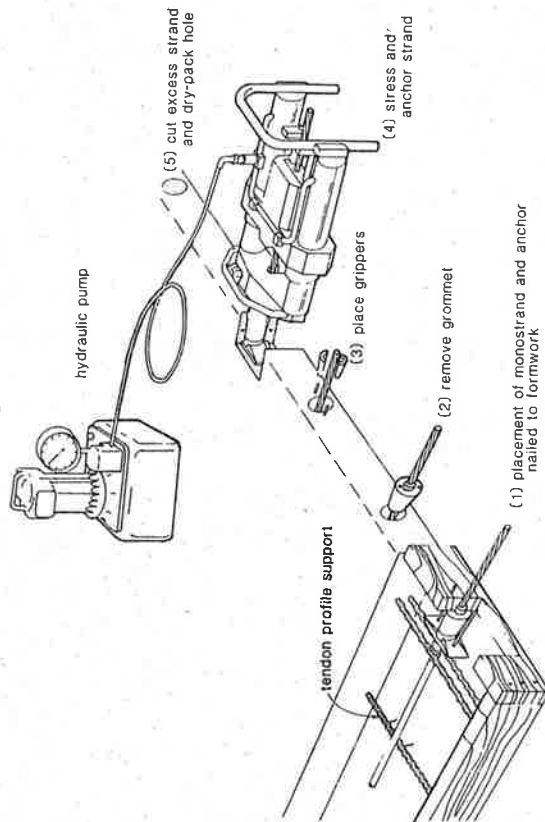
Kuva 2.12: BBRV monilanka jännittämismenetelmä.

ohuiden suojaputkien kanssa aikaansaa mahdollisimman suuren epäkeskisuuden. Yksipunosjännettä käyttävät jälkijännitysmenetelmät omaavat myös kompaktit ankkurit pienine, kevyine jännitystunkeineen ja muovisine muovaussydämineen. Ne mahdollistavat jännitysopeeraation suorittamisen yhden henkilön voimin.

Kuva 2.14 kuvaa eri jälkijännitysmenetelmien passiiviankkureita. Joskus on välttämätöntä liittää jäniteitä toisiinsa. Esimerkiksi lohkarakenteisia kotelopalkkisilloja rakennettaessa joudutaan liittämään jäniteet, jotka on jännitetty "vaiheessa 1" jänteisiin, jotka aiotaan jännittää "vaiheessa 2". Kuva 2.15 esittää tyyppillisiä liittokappaleita.

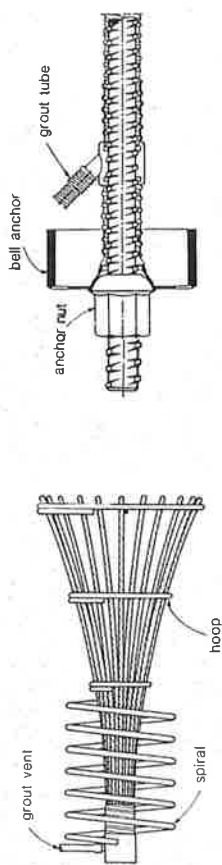


(a) ankkurin yksityiskohtia (b) yksipunosmenetelmä laatan jälkijännittämiseen

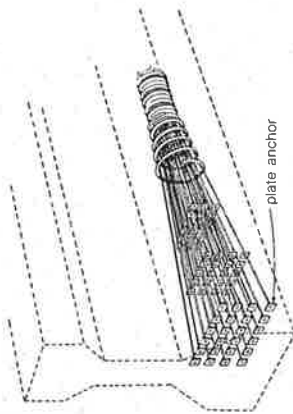


(c) jälkijännitetyn laatan valmistamisjärjestys

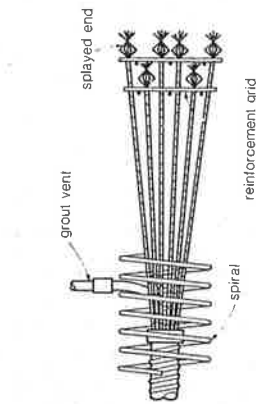
Kuva 2.13: Yksipunos jännittämismenetelmä.



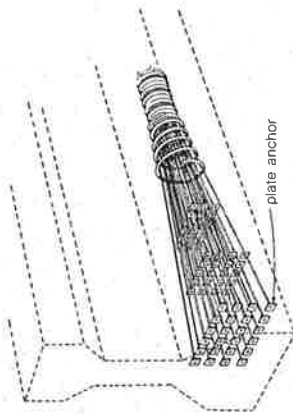
(a) Freyssinet avoinpäinen ankkuri



(b) Dywidag muhvi ankkuri

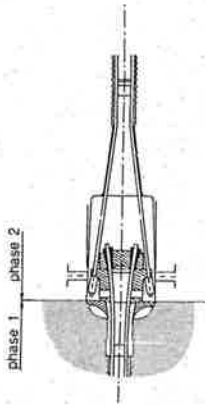


(c) BBRV lanka-ankkuri



(d) VSL viisteinen punosankkuri

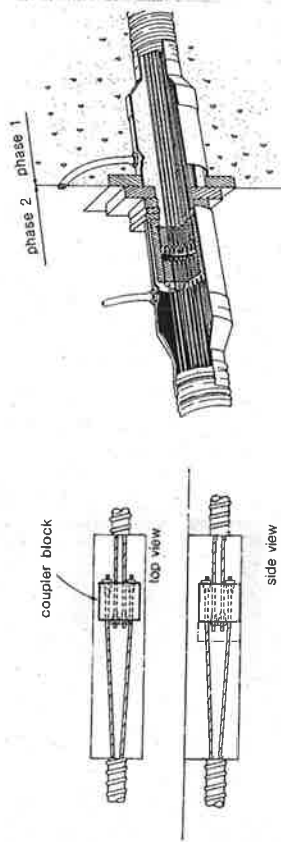
Kuva 2.14: Esimerkkejä passiiviankkureista.



(a) Freyssinet liitos



(b) Dyvidag liitos



(c) VSL liitos ja keskeltä-jännittämissankuri

Kuva 2.15: Esimerkkejä jänteiden liitoksista.

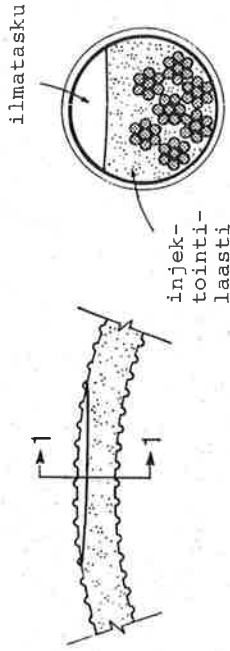
2.7 Suojaputkien injektointi

Tartunnallisten jälkijännitettyjen rakenteiden jännekanavat injektoidaan mahdollisimman pian jännittämisen jälkeen. Injektoinnin tavoitteena on täyttää jännekanava kokonaan materiaalilla, joka tarjoaa jänneteräkselle korroosiosuojaksi alkalisen ympäristön ja jolla on riittävä lujuus sitoa jänteet ympäröivään betoniin.

Injektointilaasti muodostuu tavallisesti sementin ja veden seoksesta (vesi/sementtisuhte noin 0,50) yhdessä vedentarvetta vähentävän lisäaineen ja paisuttavan lisäaineen kanssa. Suurenpiläpimittaisia jännekanavia varten tarkoitettu injektointilaasti saattaa sisältää myös täytemateriaalia kuten hiekkaa, lentotuhkaa tai pozzolaania.

Tyydyttävän injektointilaastin tulisi olla sopivan juoksevaa injektointioperaation ajan, siinä tulisi tapahtua mahdollisimman vähän veden erottumista ja lajittumista, se ei saisi kutistua, sillä tulisi olla riittävä lujuus, se ei saisi sisältää haitallisia määriä klorideja, nitraatteja, sulfideja tai muita yhdisteitä, jotka edistävät korroosiota.

Injektointi tapahtuu jänteen alimmista kohdista tai palkin päistä. Ilmanpoistoputket sijoitetaan jänteen ylimpiin kohtiin, kuten kuvassa 2.7c kävi ilmi. Jos jännekanavan ilmanpoistoa ei ole toteutettu asianmukaisesti, sen ylimpiin kohtiin saattaa jäädä ilmataskuja (katso kuvaa 2.16). Ilmataskuihin mahdollisesti kerääntyvä vesi saattaa johtaa jänteen korroosioon. Veden jäätyminen saattaa myös aiheuttaa rakenteen vakavan vaurioitumisen.



Jänneprofiili lähellä lakipistettä leikkaus 1-1

Kuva 2.16: Jännekanavan lakipisteeseen muodostunut ilmatasku.

Jännekanavia ei ole tavallisesti mahdollista injektoida onnistuneesti, jos ympäröivän betonin lämpötila alittaa noin 5°C. Täten saattaa olla välttämätöntä jättää jännekanavat injektioimatta talvikuukausuun ajaksi. Sellaisissa tapauksissa täytyy veden pääsy jännekanaviin huolellisesti estää ja varmistaa, että jännekanavien alimmat kohdat on varustettu asianmukaisin tyhjennysputkin.

Ennen injektointia, jännekanavat tulisi puhaltaa puhtaaksi käyttäen öljystä puhdasta paineilmaa. Joskus jännekanavat huuhdellaan puhtaaksi vedellä ennen injektointia. Jos jännekanavaan syntyy tukkeuma injektointiin aikana, kanava täytyy huuhdella puhtaaksi välittömästi syöttämällä vettä sisään lähimmästä ilmanpoistopukesta injektointiin suuntaa vastaan.

2.17a). Jatkuvan palkin jänneprofiilit voidaan kuvata perättäisillä paraabelin kaarilla, jotka ovat aukoissa koveria ja tuilla kuperia (katso kuvaa 2.17b).

Kuva 2.18a esittää paraabelin kaarta, jonka alin piste on origossa. Helposti nähdään, että paraabelin yhtälö on

$$y = e_0 \left(\frac{x}{\ell_0} \right)^2 \quad (2.1)$$

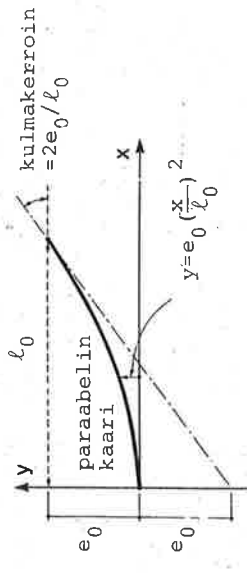
Sen kulmakertoimelle kaaren päässä $x = \ell_0$ saadaan

$$k = y'(\ell_0) = 2 \frac{e_0}{\ell_0} \quad (2.2)$$

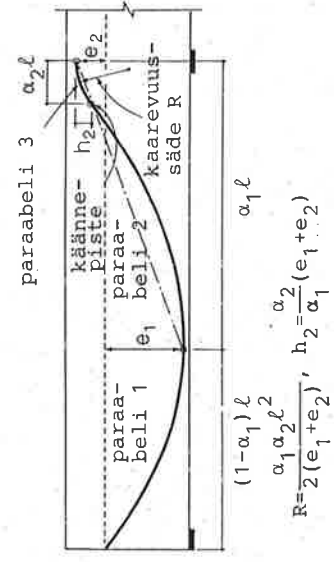
ja kaarevuusasteelle origossa

$$R = \frac{[1 + y'(0)^2]^{2/3}}{y''(0)} = \frac{\ell_0^2}{2e_0} \quad (2.3)$$

joka on kyseisen paraabelin kaarevuusasteen pienin arvo.



(a) paraabelinkaaren geometriaa



(b) paraabelinkaarista muodostuva jänne

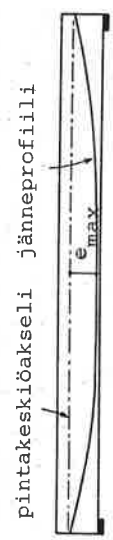
Kuva 2.18: Paraabelin muotoisten jänneiden geometriaa.

Injektointipaineista, injektointilaastin määrästä, lämpötiloista ja muista injektointiopeeraation yksityiskohdista täytyy pitää kirjaa. Korkeat injektointipaineet (esim. yli 1,5MPa) saattavat merkitä jänneganavan tukkeutumaa ja saattavat aiheuttaa injektointilaastin lajittumista tai jännekanavaa ympäröivän betonin halkeilua.

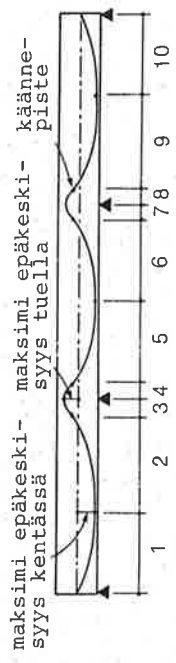
Tartunnallisen, jälkijännitetyn rakenteen pitkäaikainen kestävyys riippuu injektointiopeeraation onnistumisesta.

2.8 Jälkijännitetyjen jänneiden profiilit

Jälkijännitetyjen palkkien jänneprofiilit ovat tavallisesti paraabelin muotoisia tai niiden kulku voidaan esittää perättäisillä paraabelin kaarilla. Rakennusvaiheessa jänneet tulee tukea asian mukaisesti, jotta siirtymiseltä betonin valamisen yhteydessä välttäisiin.



(a) vapaastuetun yksiaukoisen palkin paraabelin muotoinen jänneprofiili



(b) kolmiaukoisen palkin jänneprofiilin esittämiseen käytetyt paraabelin kaaret 1-10

Kuva 2.17: Paraabelin muotoisia jänneprofiileja.

Vapaastuetun, yksiaukoisen palkin jänneprofiili muodostuu tavallisesti yhdestä paraabelista, jonka epäkeskisyyks tuilla on nolla ja epäkeskisyyden maksimi arvo (e_{max}) on jänneen keskellä (katso kuvaa

Kuva 2.18b esittää kuinka perättäset paraabelin kaaret liittyvät toisiinsa jälkijännitetyn palkin reunakentässä. Maksimi epäkeskisyyden (e_1) kohdalla on paraabelin 1 ja paraabelin 2 kulmakertoimilla molemmilla arvo nolli ja ne ovat täten yhteensopivia. Jotta paraabeli 2 ja paraabeli 3 olisivat yhteensopivia, niiden kulmakertoimien tulee olla käännepisteessä yhtä suuria, joten saadaan

$$\frac{2(e_1 + e_2 - h_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)\ell} = \frac{2h_2}{\alpha_2\ell}, \quad (2.4)$$

eli

$$\frac{e_1 + e_2}{\alpha_1\ell} = \frac{h_2}{\alpha_2\ell}. \quad (2.5)$$

Käännepisteen täytyy täten olla suoralla, joka yhdistää maksimi epäkeskisyysspiteet, kuten kuvasta 2.18b voidaan havaita. Huomattavaa on myös, että molempien paraabelien yhteinen kulmakerroin käännepisteessä on

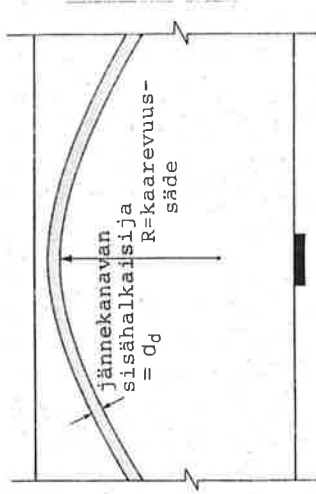
$$k = \frac{2(e_1 + e_2)}{\alpha_1\ell}. \quad (2.6)$$

Kupera jänteen osa tuen yläpuolella tarvitaan taitteen välttämiseksi. Kuperan jänteen osan pituus $\alpha_2\ell$ kuvassa 2.18b tulee valita siten, että jänteen kaarevuussäde

$$R = \frac{(\alpha_2\ell)^2}{2h_2} = \frac{\alpha_1\alpha_2\ell^2}{2(e_1 + e_2)} \quad (2.7)$$

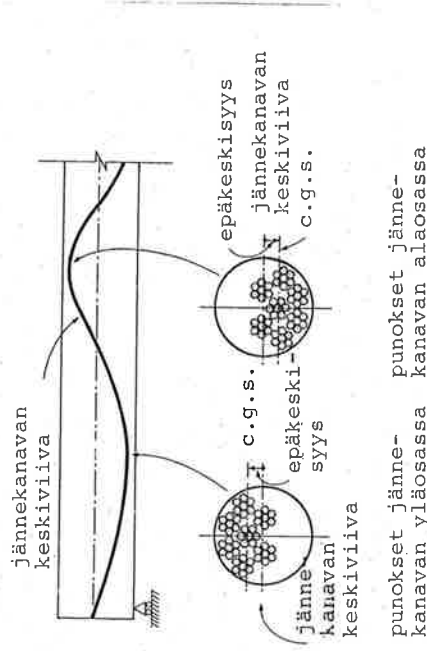
tuen yläpuolella ei alita jännetyypille suositeltavaa kaarevuussäteen minimiarvoa. Monipunosjänteille suositellaan, että kaarevuussäteen R tulisi olla suurempi kuin noin $75d_d$, jossa d_d on suojaputken sisäsäde. Hieman tarkempi erittely monipunosjänteille suositeltaville minimikaarevuussäteille on esitetty kuvassa 2.19. Yksipunosjänteille (sekä ϕ_7 12,5, että ϕ_7 15,2) suositellaan minimikaarevuussäteen arvoksi 2,50m.

Määritettäessä jännekanavan kulkua on tärkeää huomata, että jänteen keskiviiva, jota kutsutaan c.g.s.-viivaksi (centre of gravity of steel), ei aina yhdy jännekanavan keskiviivaan. Kun jännettä jännitetään, se tulee vedetyksi kohti jännekanavan kaarevien osien sisäreunaa (katso kuvaa 2.20). Syntyviä jänteen epäkeskisyyksiä jännekanavan sisällä erään monipunosyyppisen jännittämismenetelmän tapauk-



d_d (mm)	45-55	65-80	85-95	100-110
min R (m)	3.5	4.5	5.0	7.0

Kuva 2.19: Suositeltavia jänteen kaarevuussäteen minimiarvoja.



Kuva 2.20: Jänteen sijainti jännekanavassa jännittämisen jälkeen.

ssa on annettu taulukossa 2.1. Nähdään, että suurilla jännteillä nämä epäkeskisyydet ovat huomattavia.

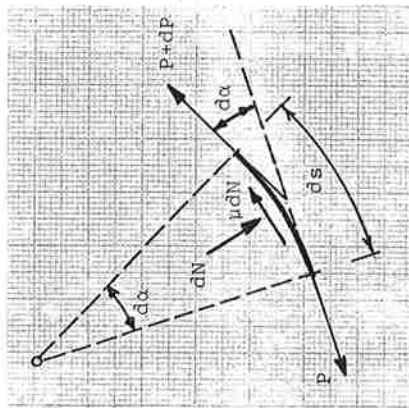
2.9 Jälkijännittämisen yhteydessä syntyvät häviöt

Jännettä tunkilla jännitettäessä syntyvä jännevoima ei ole vakio pitkin jänteen pituutta jänteen ja jännekanavan välisen kitkan johdosta. Syntyvää jännityshäviötä kutsutaan kitkahäviöksi.

Taulukko 2.1: Jänteiden epäkeskisyyksiä jännekanavassa.

Jänne	Suojaputken halkaisija (mm)	Epäkeskisyyys (mm)
3 φ ₇ 12,5	31	7
4 φ ₇ 12,5	41	7
7 φ ₇ 12,5	50	8
12 φ ₇ 12,5	63	11
19 φ ₇ 12,5	78	13
31 φ ₇ 12,5	100	14
55 φ ₇ 12,5	138	23
3 φ ₇ 15,2	38	5
4 φ ₇ 15,2	50	5
7 φ ₇ 15,2	57	10
12 φ ₇ 15,2	75	13
19 φ ₇ 15,2	95	18
31 φ ₇ 15,2	125	23
55 φ ₇ 15,2	165	30

Kirjoittamalla ds :n pituisen jänteen osan (kuva 2.22) säteen suuntainen tasapainoyhtälö, saadaan jänteeseen kohdistuvalle normaali-voimalle $dN = (2P + dp) \sin(\alpha/2) \approx Pd\alpha$. Kirjoittamalla vastaavasti tangentin suuntainen tasapainoyhtälö, saadaan $dP \cos(\alpha/2) = -\mu dN \Rightarrow dP \approx -\mu Pd\alpha$.



Kuva 2.22: Jänteen kitkahäviö.

missä μ on jänteen ja suojaputken välinen kitkakerroin. Yhdistämällä tulokset saadaan jännevoiman muutoselle (=kitkahäviö) lauseke

$$dP = -\mu P d\alpha \quad (2.8)$$

Kitkahäviö on siis suoraan verrannollinen jänneprofiilin kaltevuuskulman muutokseen $d\alpha$.

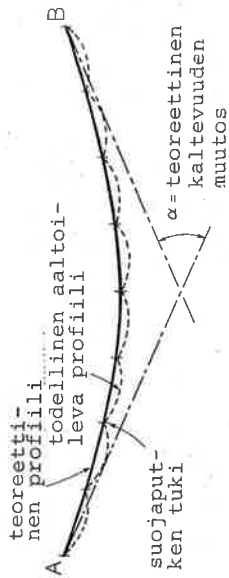
Jakamalla yhtälö (2.8) puolittain P :llä ja integroimalla pisteestä A pisteeseen B saadaan

$$\int_{P_A}^{P_B} \frac{dP}{P} = -\mu \int_0^\alpha d\alpha \Rightarrow \ln \frac{P_B}{P_A} = -\mu\alpha \quad (2.9)$$

Näin saadaan tulos

$$P_B = P_A e^{-\mu\alpha} \quad (2.10)$$

missä P_A on jännevoima pisteessä A, P_B on jännevoima pisteessä B, ja α jänteen kaltevuuksien kulmasumma välillä AB.



Kuva 2.22: Jänteen aaltoilu.

Jänne aaltoilee pitkin sen pituutta kuvan 2.22 mukaisesti. Jänteen aaltoilun voimakkuus riippuu suojaputken läpimitasta ja jäykkyydestä sekä suojaputken tukien keskinäisestä etäisyydestä ja jäykkyydestä. Jänteen aaltoiluusta aiheutuu, että todellinen kaltevuuksien kulmasumma onkin suurempi kuin sen teoreettinen arvo α . On luonnollista olettaa, että lisäys on suoraan verrannollinen jänteen pituuteen s tarkasteltavalla välillä AB, ts. se voidaan esittää muodossa βs , missä β on ns. aaltoisuusluku. Todellinen kaltevuuksien kulmasumma on siis $\alpha + \beta s$, ja lausekkeelle (2.10) saadaan parannettu muoto

$$P_B = P_A e^{-\mu(\alpha + \beta s)} \quad (2.11)$$

Jänteen pituus s (välillä AB) kaavassa (2.11) voidaan korvata vaakasuoralla etäisyydellä x , vrt. betoninormien kaava (2.1).

Käyttämällä kaavassa (2.11) vielä hyväksi likikaavaa

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots \approx 1 - x, \quad (2.12)$$

saadaan

$$\Delta P \approx -P_A \mu (\alpha + \beta s), \quad (2.13)$$

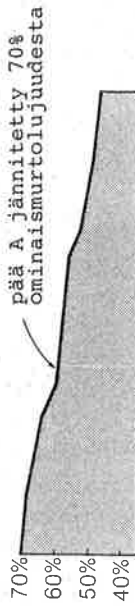
missä $\Delta P = P_B - P_A$. Likikaavaa (2.13) voidaan käyttää, kun $\mu(\alpha + \beta s) \leq 0,2$.

Yleensä kitkakertoimelle käytetään arvoja $\mu = 0,15 \dots 0,3$ ja aaltosuusluvulle arvoja $\beta = 0,01/m \dots 0,02/m$. Kuhunkin jännittämismenetelmään liittyvät kitkakertoimen ja aaltosuusluvun arvot annetaan menetelmän käyttöselosteessa.

Kuva 2.23 esittää kuinka kitkahäviö vaikuttaa jännevoiman suuruuteen pitkin palkin pituutta. Käytettävässä kaavassa (2.11) kitkahäviön mää-



(a) paraabelin kaarista koostuva jänneprofiili



(b) jännevoiman jakautuma, kun jänne on jännitetty vain päästä A

(1) päät A ja B jännitetty 80%



(2) päät A ja B jännitetty uudelleen 70%

(c) jännevoiman jakautuma, kun jänne on jännitetty vaihteittain molemmista päistä

Kuva 2.23: Kitkahäviöstä aiheutuva jännevoiman jakautuma.

rittämisessä, on riittävän tarkkaa laskea jännevoiman arvot osapa-raabelien päissä ja otaksua jakautuma päiden välillä lineaarisesti, kuten kuvassa 2.23b on menetelty.

Jos melko pitkää jännettä jännitetään ainoastaan yhdestä päästä, saattaa palkin pituudella tapahtua huomattava jännevoiman pieneneminen. Kitkahäviöiden osuus vähenee, jos palkki jännitetään molemmista päistä. Hetkellinen jänteen ylijännittäminen ja sitä seuraava jännevoiman päästö sekä uusi jännittäminen tasaa myöskin kitkasta aiheutuva jännevoiman vaihtelua (katso kuvaa 2.23c). Tämä ylijännittämistekniikka ei kuitenkaan sovellu kaikille jännittämismenetelmille. Jännittämisessä sallitaan betoninormien mukaan jänteen hetkellinen ylijännittäminen siten, että jänteen jännitys $\sigma_p = P/A_p$ saa nousta alempaan seuraavista arvoista

$$\sigma_{p0, \max} = \begin{cases} 0,80f_{puk} \\ 0,90f_{p0,2k} \end{cases} \quad (2.14)$$

missä f_{puk} on jänneräksen ominaismurtolujuus ja $f_{p0,2k}$ on sen 0,2-rajaa vastaava ominaismurtolujuus. Heti jännittämisen jälkeen jänteen jännitys saa olla enintään alempi seuraavista arvoista

$$\sigma_{p0} = \begin{cases} 0,75f_{puk} \\ 0,85f_{p0,2k} \end{cases} \quad (2.15)$$

(Kuvissa 2.23b ja c jännittäminen on suoritettu arvoon $0,7f_{puk}$; tämä on käytäntö Kanadassa).

Jännittämisen aikana sekä tunkin voima, että vastaava jänteen pituuden muutos merkitään pöytäkirjaan. Mitattuja pituuden muutoksen arvoja verrataan teoreettisesti laskettuihin. Tulosten yhtäpitävyyden tulee olla $\pm 5\%$ luokkaa. Odotettua pienempi pituuden muutos saattaa merkitä sitä, että jänne on juuttunut jännekanavaan ja ainoastaan osa siitä on jännitetty, tai se saattaa merkitä normaalia suurempaa kitkahäviötä. Jänteen pituuden muutokselle (välillä AB) saadaan

$$\Delta l = \int_A^B \epsilon ds = \int_A^B \frac{P}{E_p A_p} ds = \frac{1}{E_p A_p} \int_A^B P ds, \quad (2.16)$$

eli

$$\Delta l = \frac{P_{kesk} l}{E_p A_p}, \quad (2.17)$$

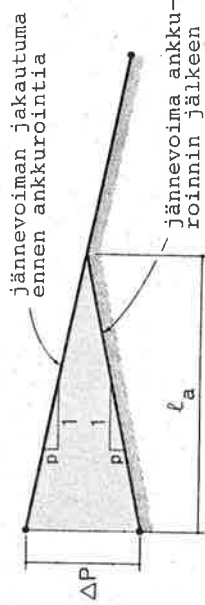
missä

$$P_{\text{kesk}} = \frac{1}{l} \int_A^B P ds$$

(2.18)

on jännevoiman keskimääräinen arvo jännteessä (välillä AB) määritettynä lasketun jännevoiman jakautuman perusteella, l on jänteen pituus ja E_p on jänteen kimmomoduuli.

Jänneiden jännittämisen jälkeen on välttämätöntä ankkuroida ne. Useimmassa jälkijännitysmenettelyssä ankkurointitoimenpide aiheuttaa jännevoiman lisäjäviön, joka aiheutuu joko kiilojen asettamisesta tai täytelevyjen muodonmuutoksista. Ankkurointi siirtymä Δ_a punosjän-teillä, jotka ankkuroidaan kiilaamalla on tavallisesti $\Delta_a = 6 \text{ mm}$.



Kuva 2.24: Ankkurointi siirtymän vaikutus jännevoiman jakautumaan.

Kuva 2.24 esittää ankkurointi siirtymän Δ_a vaikutusta jännevoiman jakautumaan jänteen pään läheisyydessä. Sen jänteen osan pituus l_a , jonka jännevoimaan ankkurointi siirtymällä on vaikutusta riippuu kitkahäviöistä. Jos kitka on alhainen, kuten tartunnattomissa jänteisissä, pituus l_a saattaa olla hyvin suuri. Ankkurointi siirtymä on yhtä suuri kuin jännevoiman muutoksesta ΔP aiheutuva jänteen lyhenemä. Tämä lyhenemä on suoraan verrannollinen kuvan 2.24 varjostettuun pinta-alaan (vrt. kaava (2.16)), joten ankkurointi siirtymälle saadaan

$$\Delta_a = \frac{0,5 \Delta P l_a}{E_p A_p} \quad (2.19)$$

Otaksumalla kitkahäviö ankkurin läheisyydessä ($s < l_a$) pituutta kohti vakioiksi p (vrt. kuva 2.24), saadaan

$$\Delta P = 2p l_a \quad (2.20)$$

Yhtälöistä (2.19) ja (2.20) seuraa nyt pituudelle l_a tulos

$$l_a = \sqrt{\frac{\Delta_a A_p E_p}{p}}$$

(2.21)

missä p on kitkahäviö ilmaistuna jännevoiman muutoksena jänteen pituusyksikköä kohti. Suure p voidaan määrittää jännevoiman jakautumakuviolla (vrt. kuva 2.24).

2.10 Esimerkki kitkahäviön laskemisesta

Kuvan 2.25 neliäukkoinen, jatkuva sillan kannatinpalkki jälkijännitetään käyttäen 20 kpl ϕ_7 15,2 punoksia. Symmetrisesti sijoitetut jänneet jännitetään samanaikaisesti molemmista päistään siten, että niiden jännitys saavuttaa arvon $\sigma_p = 0,75 f_{\text{puk}}$. Jänteen ominaisuudet ovat:

$$\begin{aligned} f_{\text{puk}} &= 1860 \text{ MPa}, \\ A_p &= 20 \cdot 139 \text{ mm}^2 \approx 2800 \text{ mm}^2, \\ E_p &= 195000 \text{ MPa}, \\ \mu &= 0,20, \\ \beta &= 0,01/\text{m}, \\ \Delta_a &= 6 \text{ mm}. \end{aligned}$$

(i) Laske jännittämistä aiheutuva jänteen pituuden muutos.

(ii) Laske jännevoiman jakautuma jännteessä ankkuroinnin jälkeen.

(a) Jännevoiman jakautuman määrittäminen.

Arvot $\mu(\alpha + \beta x)$ jokaiselle paraabelin kaarelle määritetään ensiksi. Koska jokaisen paraabelin kaaren yksi pää on vaakasuora (käyrän tangentti päässä on yhtä suuri kuin kaltevuuden muutos α kussakin paraabelin kaareissa on yhtä suuri kuin kaltevan pään kulmakerroin. Yhtälöitä (2.2) ja (2.6) voidaan siis soveltaa tässä yhteydessä. Jännittämisen aikana jännevoima pisteessä x jännteellä saadaan kaavasta

$$P_x = P_a e^{-\int \mu(\alpha + \beta x)}$$

Laskelma ja tuloksena saatu jännevoiman jakautuma jännittämisen alkuvaiheessa on esitetty kuvassa 2.25.

(b) Jänteen pituuden muutoksen laskeminen.

Jännevoimakuvion pinta-ala (likimain):

$$A_{la} = \frac{1}{2} (3906 + 3711) \times 14 + \frac{1}{2} (3711 + 3492) \times 14 + \frac{1}{2} (3492 + 3359) \times 3 + \frac{1}{2} (3359 + 3242) \times 4 + \frac{1}{2} (3242 + 3051) \times 16 + \frac{1}{2} (3051 + 2875) \times 16 + \frac{1}{2} (2875 + 2773) \times 4 = 236266,5 \text{ kNm}$$

Keskimääräinen jännevoima:

$$P_{\text{kesk}} = A_{la} / l = 236266,5 \text{ kNm} / 71 \text{ m} = 3328 \text{ kN}$$

Jänteen pituuden muutos:

$$\Delta l = \frac{P_{\text{kesk}} l}{E A_p} = \frac{3328 \times 1000 \times 71000}{195000 \times 2800} = 433 \text{ mm}$$

(c) Ankkurointihäviö.

Kitkahäviö pituutta kohti ensimmäisen 14 m:n matkalla:

$$p = \frac{3906 - 3711}{14} = 13,93 \text{ kN/m}$$

Ankkurointisiirtymän vaikutusalue:

$$l_a = \ell = \sqrt{\frac{\Delta A_p E}{A_p p}} = \sqrt{\frac{6 \times 2800 \times 195000}{13,93}} = 15,34 \text{ m}$$

(koska l_a ylittää 14 m, laskelma on hieman likimääräinen.)

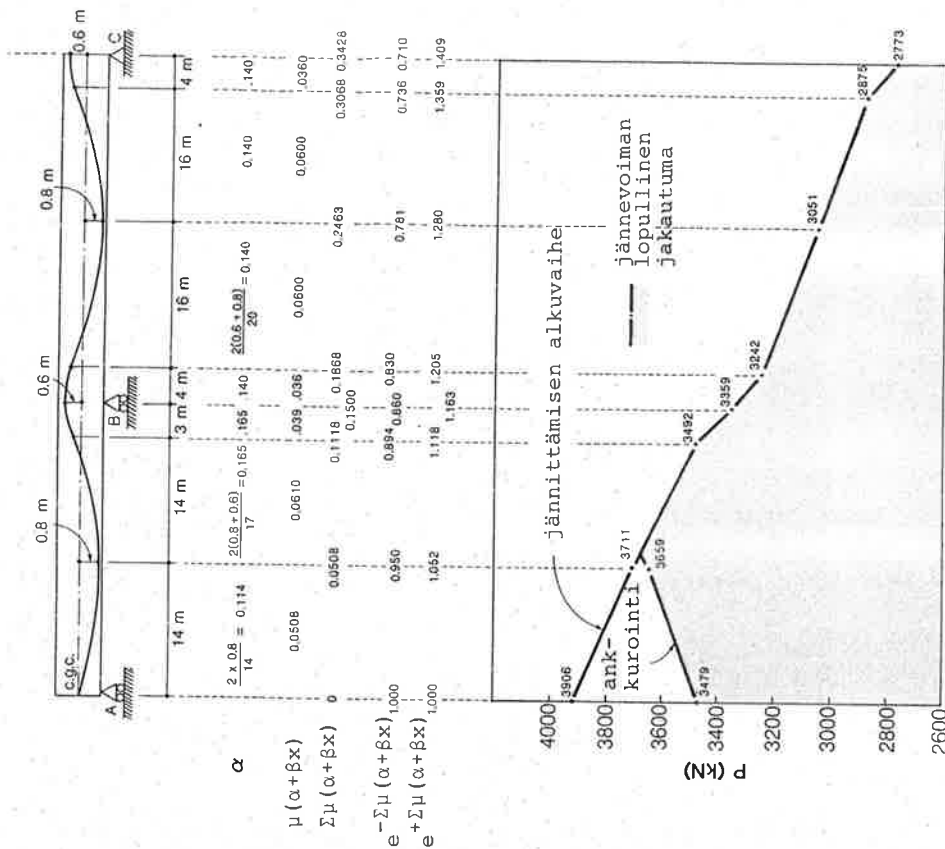
Ankkurointihäviö:

$$\Delta P = 2pl_a = 2 \times 13,93 \times 15,34 = 427 \text{ kN}$$

Voima jänteen päässä ankkuroinnin jälkeen:

$$3906 - 427 = 3479 \text{ kN}$$

Jännevoiman jakautuma ankkuroinnin jälkeen on esitetty kuvassa 2.25.



Kuva 2.25: Esimerkki kitkahäviön laskemisesta.

3. MATERIAALIOMINAISUUDET

Suunnittelijan tulee tuntee jännitetyissä betonirekenteissä käytettyjen materiaalien: betoniterästen ja jänneterästen ominaisuudet. Koska betonin ja betoniterästen ominaisuuksia on käsitelty talonrakennustekniikan kurseissa, niitä käsitellään tässä vain ker-
tauksen omaisesti jännebetonirakenteiden kannalta tärkeitä puolia korostaen. Suunnittelijan kannalta tärkeitä jänneterästen ominaisuuksia käsitellään lopuksi.

3.1 Betonin materiaaliominaisuudet

3.1.1 Lujuusluokitus

Suomessa betonin lujuusluokitus perustuu 150mm särmäisen koekuution puristuslujuuteen. Jännebetonirakenteissa tavallisesti käytettävän normaali-
lujuuksisen betonin lujuusluokat ovat K30-K60. Lujuusluokan merkinnässä oleva luku tarkoittaa puristuslujuusvaatimusta 28 vuoro-
kauden iässä. Puristusluus voidaan suunnitelmassa edellyttää arvos-
teltavaksi myös 7 tai 91 vuorokauden iässä. Tällöin laadunarvostelu-
ikä ilmaistaan merkinnän K alaindeksinä. Jännebetonirakenteissa voi-
daan myös käyttää korkealujuuksista betonia, jonka lujuusluokat ovat
K70-K100.

Betonin puristuslujuus määritetään monissa maissa koelieriön avulla, jonka halkaisija on 150mm ja pituus 300mm. Kuutiolujuusluokitusta vastaavat kuutio- ja lieriölujuudet on esitetty taulukossa 3.1.

Taulukko 3.1: Lujuusluokitusta vastaavat kuutio- ja lieriölujuudet [MPa].

Lujuus- luokka	K30	K35	K40	K45	K50	K55	K60	K70	K80	K90	K100
Kuutio särmä 150mm	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100
Lieriö Ø150mm x300mm	23	27,5	32	37	42	47	52	62	71	80	90

3.1.2 Betonin lujuus- ja muodonmuutosominaisuudet

Seuraavassa luetellaan aluksi normaalia runkoaineesta ($\rho_c = 2400 \text{ kg/m}^3$) valmistetun normaali-
lujuuksisen betonin lujuus- ja muodonmuutosominaisuuksia. Vastaavia tietoja korkealujuuksisista betoneista löytyy betoninormien liitteenä olevista korkealujuuksisten betonien lisäohjeista.

Rakenteena toimivan betonin puristuslujuuden ominaisarvo [MPa] lasketaan kaavasta

$$f_{ck} = 0,7K. \quad (3.1)$$

Betonin vetolujuuden ominaisarvo [MPa] lasketaan kaavasta

$$f_{ctk} = 0,2K^{2/3}. \quad (3.2)$$

Betonin kimmomoduulin arvo lasketaan kaavasta

$$E_c = 5000\sqrt{K}. \quad (3.3)$$

Betonin voidaan laskelmissa otaksua käyttäytyvän lineaarisesti kimmomaisesti, jos sen jännitys ei ylitä arvoa $0,6f_{ck}$.

Normaali-
lujuuksisen betonin myötöpuristumalle käytetään arvoa

$$\epsilon_{cy} = 2\text{‰}. \quad (3.4)$$

Normaali-
lujuuksisen betonin murtopuristumalle käytetään arvoa

$$\epsilon_{cu} = 3,5\text{‰}. \quad (3.5)$$

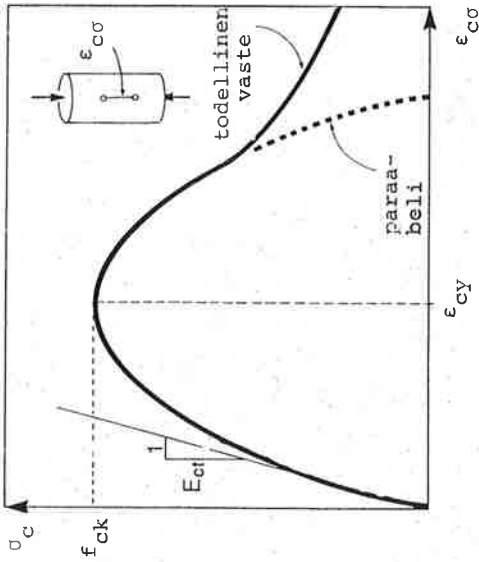
3.1.3 Betonin yksiakselinen jännitys-muodonmuutosriippuvuus

Lujuusluokkaa K40-K60 olevan betonin jännitysmuodonmuutosriippuvuutta, ts. riippuvuutta betonin puristusjännityksen σ_c ja siitä aiheutuneen puristuman $\epsilon_{c\sigma}$ välillä, voidaan jonkinlaisella tarkkuudella kuvata kuvan 3.1 esittämää yksinkertaista paraabelia käyttäen. Paraabelin yhtälö on

$$\sigma_c = f_{ck} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_{c\sigma}^2}{\epsilon_{cy}} \right) \right] \quad (3.6a)$$

tai hieman eri muodossa

$$\sigma_c = f_{ck} \left[2 \frac{\epsilon_{c\sigma}}{\epsilon_{cy}} - \left(\frac{\epsilon_{c\sigma}}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right]. \quad (3.6b)$$



Kuva 3.1: Puristetun betonin parabolinen jännitys-muodonmuutoskäyrä

Tässä yhteydessä sovelletaan selkeyden vuoksi merkissäntöä, jossa puristus on positiivista ja veto negatiivista. Toisaalla näissä luennoissa sovelletaan normaalia käytäntöä, jossa veto on positiivista ja puristus on negatiivista. Tämän luvun kaavat saadaan muunnettua jälkimmäistä käytäntöä vastaaviksi suorittamalla sijoitukset $\epsilon_c := -\epsilon_c$ ja $\sigma_c := -\sigma_c$, missä merkki := tarkoittaa, että sen vasemmanpuoleisen symbolin paikalle sijoitetaan sen oikean puoleinen lauseke.

Betonin puristumalle ϵ_c käytetään tässä lisälaindeksiä σ painotamaan sitä, että tarkastellaan sitä betonin kokonaispuristuman osaa, joka aiheutuu betonin jännityksestä σ_c . Yleisesti ottaen betonin kokonaisvenymä ϵ_c on betonin jännityksestä aiheutuvan venymän ϵ_{cy} ja jännityksestä riippumattoman venymän ϵ_{c0} summa. Jälkimmäinen voi aiheutua esimerkiksi betonin kutistumisvenymästä ϵ_{cs} ja lämpötilan muutoksesta aiheutuvasta venymästä ϵ_{cAt} .

Käyrän (3.6) alkutangenttimoduuli E_{ct} on

$$E_{ct} = \frac{d\sigma_c}{d\epsilon_{cy}}(0) = 2 \frac{f_{ck}}{\epsilon_{cy}} = 7000K. \quad (3.7)$$

Sen ja betoninormien mukaisen kimmomoduulin E_c (kaava 3.3) arvoja jännitetyille betonirakenteille tyypillisissä lujuusluokissa on esitetty taulukossa 3.2.

Taulukko 3.2: Alkutangenttimoduulin E_{ct} ja betonin kimmomoduulin E_c vertailu.

	K30	K40	K50	K60
E_{ct}	21000	28000	35000	42000
E_c	27400	31600	35400	38700

Nähdään, että ko. moduulit poikkeavat jonkin verran toisistaan, vaikka niiden olisi hyvä yhtyä (virt. betoninormien kuva 2.3). Näiden luentojen luvuissa 4 ja 5, joissa käsitellään aksiaalaisesti kuormitettujen ja taivutettujen jännitettujen betonirakenteiden toimintaa, käytetään betonin puristusalueella kaavan (3.6) mukaista jännitys-muodonmuutoslakia. Kaavan (3.6) paraabeli ei ole kuvan 3.1 mukaan käyttökelpoinen suurilla puristumilla ϵ_{cy} .

Vetoalueella betonin voidaan otaksua käyttäytyvän lineaarisesti kimmoisesti, siihen asti kun se murtuu. Rakenteiden toimintaa kuvaavissa laskelmissa kimmomoduulina voidaan käyttää alkutangenttimoduulia E_{ct} ja vetomurtolujuutena vedetyissä rakenteissa betonin ominaisvetolujuutta f_{ctk} ja taivutetuissa rakenteissa ominaisvetolujuutta $f_{ctk} = 1,7f_{ctk}$.

Betoninormien mukainen, suunnitteluun kuuluvissa rajatarkasteluissa käytettävä jännitys-muodonmuutoskäyrä normaallilujuuksiselle betonille on esitetty betoninormien kuvassa 2.3. Käyrän kaarevalle osalle ei anneta mitään analyttistä lauseketta, mutta käyrän on kuvan perusteella toteutettava seuraavat ehdot

$$\sigma_c(0) = 0, \quad \sigma'_c(0) = E_c, \quad \sigma_c(\epsilon_{cy}) = f_{cd}, \quad \sigma'_c(\epsilon_{cy}) = 0. \quad (3.8)$$

Yksinkertaisin polynomimuotoinen funktio, joka toteuttaa nämä ehdot on kuubinen polynomi. Se voidaan esittää muodossa

$$\sigma_c = f_{cd} \left\{ 3 \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^3 + \frac{E_c \epsilon_{cy}}{f_{cd}} \left[\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} - 2 \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^3 \right] \right\}. \quad (3.9)$$

Yksinkertaisempi lauseke käyrän kaarevalle osalle saadaan käyttämällä paraabelia, joka kulkee origon kautta ja jonka huippu on pisteessä

sä (ϵ_{cy}, f_{cd}). Lauseke on

$$\sigma_c = f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right] \quad (3.10)$$

Kaavan (3.10) paraabeli on saman tyyppinen kuin kaavan (3.6) paraabeli. Erona on vain se, että Suomessa rajatarkasteluissa käytetään puristuslujuuden laskenta-arvoa $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$ ominaispuristuslujuuden f_{ck} sijasta.

Betoninormien liitteenä olevan korkealujuuksisten betonien lisäohjeen mukaisesti, eri lujuusluokkia vastaavat (puristuspuolen) jännitys-muodonmuutuskäyrät korkealujuuksiselle betonille on esitetty ko. ohjeen kuvassa 3. Puristuslujuuden laskenta-arvon avulla määritetyn jännitys-muodonmuutuskäyrän kaarevan osan lauseke on

$$\sigma_c = f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^\alpha \right], \quad (3.11)$$

missä

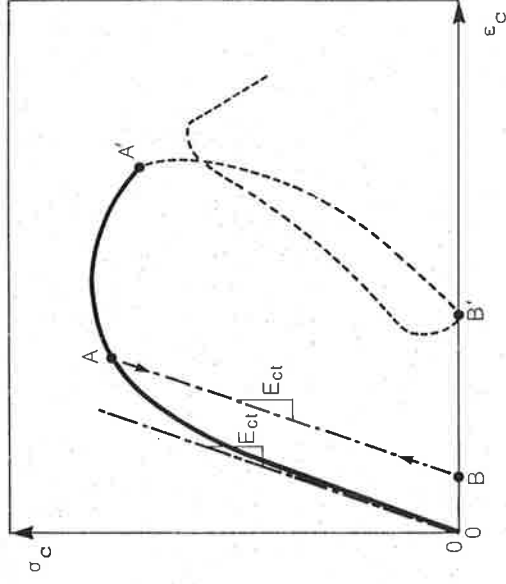
$$\alpha = 2 - \frac{K-60}{100} \quad (3.12)$$

Lujuusluokan K60 betonilla $\alpha=2$ ja käyrä (3.11) yhtyy kaavan (3.10) paraabeliin. Korkeammilla lujuusluokilla eksponentti α on pienempi kuin 2. Samoin kimmomoduulin E_c arvo sekä myötö- ja murtopuristumien ϵ_{cy} ja ϵ_{cu} arvot määräytyvät korkealujuuksisilla betoneilla eri tavalla kuin normaalilujuuksisilla betoneilla.

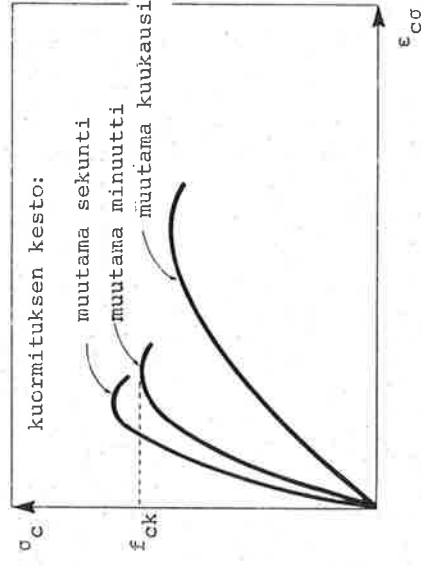
3.14 Betonin syklinen kuormitus

Jos betonin kuormittaminen lopetetaan ennen kuin jännityksen huippuarvo on saavutettu, palautumiskäyrä on likimain lineaarinen ja sen kaltevuus on likimain alkutangenttimoduulin E_{ct} :n suuruinen (jana AB kuvassa 3.2). Uudelleen kuormitettaessa jännitys-muodonmuutosvaste seuraa likimain palautumiskäyrää, kunnes yhtyy alkuperäiseen jännitys-muodonmuutuskäyrään pisteessä A.

Jos kuormittaminen lopetetaan huippujännityksen saavuttamisen jälkeen, palautumis- ja uudelleenkuormituskäyrät muodostavat selvemmän hystereesisilmukan. Syklisen kuormituksen vasteen verhoikäyrä on tyyppillisesti melkein identtinen yksittäisen jatkuvan vaikuttavan kuormituksen jännitys-muodonmuutuskäyrän kanssa.



Kuva 3.2: Betonin vaste sykliselle kuormitukselle.



Kuva 3.3: Kuormitusnopeuden vaikutus betonin lujuuteen.

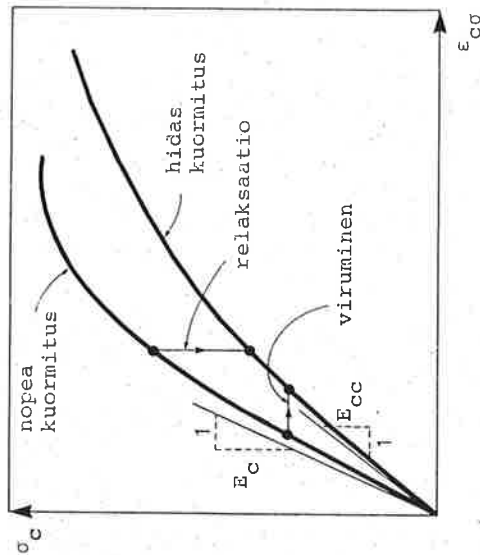
Betoni kykenee hyvin vastustamaan toistuvaa kuormitusta. Tämän johdosta jännitettyjen betonirakenteiden väsymiskestävyyttä säätelee tyyppillisesti mieluummin raudoituksen kuin betonin väsyminen.

3.15 Kuormittamisnopeuden vaikutus betonin lujuuteen

Jos kolmen koelieriön, jotka on tehty samasta erästä betonia, anne-

taan ensin kovettua noin vuoden päivät ja sitten niitä kuormitetaan kolmella hyvin erilaisella kuormitusnopeudella, jännitys-muodonmuutos käyrät voisivat näyttää kuvan 3.3 mukaisilta. Toisin sanoen, nopea kuormitus lisää lujuutta noin 20% ja hidas kuormitus vähentää sitä noin 20%.

Pitkäaikaisesta kuormituksesta aiheutuva lujuuuden pieneneminen jätetään suunnittelussa yleensä huomioimattamatta. Toisaalta jätetään myös huomioimattamatta se betonin lujuuuden kasvu, joka tapahtuu ajan mukana, ja suunnittelu perustetaan 28 vuorokauden ikäisen betonin lujuuteen. Kun betonin lujuus lisääntyy 20-40%:n hydrataation vaikutuksesta, joka tapahtuu 28 vuorokauden jälkeen, johtavat nämä kaksi yksinkertaistusta yhdessä varmallalla puolella olevaan lopputuloksen.



Kuva 3.4: Betonin viruminen.

3.16 Betonin viruminen

Betonin jännitys-muodonmuutos vaste riippuu kuormitusnopeudesta ja kuormituksen aikahistoriasta. Jos betonin jännitystä pidetään vakiona, sen venymä lisääntyy ajan mukana. Ilmiötä kutsutaan virumiseksi. Jos betonin venymää pidetään vakiona, sen jännitys pienenee ajan mukana. Ilmiötä kutsutaan relaksaatioksi. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 3.4.

Virumisen suuruutta, joka tietyssä betonikoekappaleessa tapahtuu, on

vaikea arvioida tarkasti, ellei suoriteta kokeita virumista kuvaavien suureiden määrittämiseksi. Ilman erityiskokeita ei voida odottaa tarkkuutta, joka olisi parempi kuin ±30%. Ottaen huomioon tämä hajonta on järkevää käyttää yksinkertaisia, likimääräisiä menetelmiä betonin virumismuutosten arvioinnissa.

Tyypillisessä virumiskokeessa betonin aiheutetaan muutaman vuorokauden päästä valamisen jälkeen (t_0 vuorokautta) jännitys σ_{c0} , joka pidetään tämän jälkeen vakiona. Venymää ϵ_{ce} , joka tapahtuu heti kuormitettaessa kutsutaan kimmoiseksi venymäksi ja lisävenymää $\epsilon_{cc}(t, t_0)$, joka kehittyy ajan mukana kutsutaan virumisvenymäksi. Virumisvenymän suhdetta kimmoiseen venymään t vuorokautta valamisen jälkeen kutsutaan virumaluvuksi.

Seuraavassa esitellään betonin virumista ja kutistumista kuvaava CEB 1978 malli siltä osin kun se käsittelee virumista. Mallia voidaan käyttää puristetulle betonille, jos betonin puristusjännitys ei ylitä arvoa $0,4f_{ck}$ ja sen annetaan kovettua vakio lämpötila- ja kosteusolosuhteissa. Mallin soveltuvuusalue ulottuu käsittämään myös vedetyn betonin. Mallin yhteydessä annettavat numeeriset arvot ovat keskimääräisiä arvoja. Niitä tulee käsitellä tyyppillisinä arvoina, jotka voivat vaihdella 20% jompaan kumpaan suuntaan.

Eri ajanhetkinä vaikutuksensa aloittaneista osakuormituksista aiheutuneet virumismuodonmuutokset voidaan mallilla laskea käyttäen yhteenlaskuperiaatetta (superpositioperiaate), mikäli jännitykset pysyvät suuruudeltaan käyttöttilaa vastaavalla alueella.

Tämä huomioimattaen, vakio jännityksestä σ_{c0} aiheutuva virumismuodonmuutos on suoraan verrannollinen jännitykseen. Ajanhetkeen t liittyvä virumaluku $\varphi(t, t_0)$ määritellään kaavalla

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\epsilon_{cc}(t, t_0)}{\epsilon_{ce28}}, \quad (3.13)$$

missä $\epsilon_{cc}(t, t_0)$ on betonin virumisvenymä vakiojännityksestä σ_{c0} , joka on alkanut vaikuttaa ajanhetkellä t_0 ja

$$\epsilon_{ce28} = \frac{\sigma_{c0}}{E_{c28}} \quad (3.14)$$

on betonin kimmoinen alkuvenymä jännityksestä σ_{c0} 28 vuorokauden iässä. (Betonin kimmomodulille 28 vuorokauden iässä käytetään tässä

merkintää E_{c28} , jotta se poikkeaisi kimmomoduulista E_c , joka on ajasta riippuva. Betoninormeissa ja muualla näissä luennoissa käytetään 28 vuorokauden kimmomoduulille merkintää E_c .) Betonin virumisvenymä on täten

$$\epsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_{c0}}{E_{c28}} \varphi(t, t_0) \quad (3.15)$$

Betonin kimmoisuus alkuvenymä kuormitushetkellä t_0 saadaan kaavasta

$$\epsilon_{ce}(t_0) = \frac{\sigma_{c0}}{E_c(t_0)} \quad (3.16)$$

missä $E_c(t_0)$ on betonin kimmomoduuli ajanhetkellä t_0 .

Betonin jännityksestä σ_{c0} aiheutuva kokonaisvenymä ajanhetkellä t on täten alkuvenymä ajanhetkellä t_0 plus virumisvenymä, ts. $\epsilon_{cc}(t, t_0) = \epsilon_{ce}(t_0) + \epsilon_{cc}(t, t_0)$. Sille saadaan täten

$$\epsilon_{cc}(t, t_0) = \sigma_{c0} \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] \quad (3.17)$$

Betonin kimmomoduuli $E_c(t_0)$ ajan hetkellä t_0 [vrk] voidaan määrittää kaavalla

$$E_c(t_0) = \frac{E_{c28}}{\beta_1(t_0)} \quad (3.18)$$

missä

$$\beta_1(t_0) = 0,875 \left(\frac{t_0^{+47}}{t_0} \right)^{\frac{1}{7,35}} \quad (3.19)$$

Virumaluku $\varphi(t, t_0)$ riippuu ajanhetkien t ja t_0 lisäksi erityisesti: (i) ympäristön kosteusoloista, (ii) rakenteen dimensioista, (iii) betonin koostumuksesta, (iv) ympäristön lämpötilasta ja (v) betonin kovettumisnopeudesta.

Virumaluku voidaan määrittää riittävällä tarkkuudella kaavasta

$$\varphi(t, t_0) = \beta_a(t_0) + \varphi_d \beta_d(t - t_0) + \varphi_f[\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] \quad (3.20)$$

missä

$$\beta_a(t_0) = 0,8 \left[1 - \left(\frac{t_0}{t_0^{+47}} \right)^{\frac{1}{2,45}} \right]$$

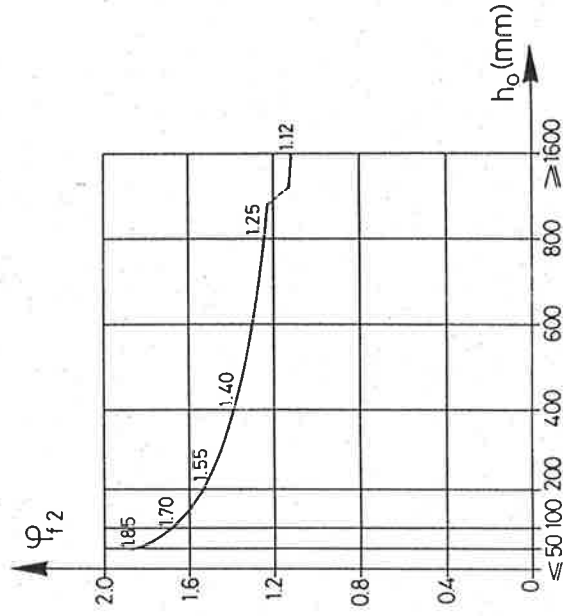
Taulukko 3.3:

Ympäristöolosuhteet	Suhteellinen kosteus R.H.	Kerroin		Kerroin λ
		Viruma φ_{f1}	Kutistuma ϵ_{s1}	
1	2	3	4	5
Vesi		0,8	+0,00010	30
Hyvin kosteat ilmasto-olot	90%	1,0	-0,00013	5
Ulkosalla yleensä	70%	2,0	-0,00032	1,5
Hyvin kuivat ilmasto-olot	40%	3,0	-0,00052	1

φ_d on kerroin, joka ottaa huomioon viivästyneen kimmoisuuden ja jolle käytetään arvoa 0,4, $\varphi_f = \varphi_{f1} \varphi_{f2}$ on virtauskerroin, jossa φ_{f1} riippuu ympäristöolosuhteista taulukon 3.3 mukaisesti ja sillä on myös

kaava

$$\varphi_{f1} = 4,45 - 0,035 \cdot R.H. \quad (3.21)$$



Kuva 3.5: Tehollisen paksuuden vaikutus virumaan.

missä R.H. on suhteellinen kosteus [%] ja φ_{f2} riippuu tehollisesta paksuudesta h_0 [cm] kuvan 3.5 mukaisesti ja sillä on kaava

$$\varphi_{f2} = \exp\left(4,4 \cdot 10^{-5} h_0 - \frac{0,357}{h_0} - \ln\left(\frac{0,1667}{2,6}\right)\right), \quad (3.22)$$

β_d on funktio, joka kuvaa viivästyneen kimmoisen venymän kehittymistä ajan mukana (kuva 3.6) ja sillä on lauseke

$$\beta_d(t-t_0) = \left(\frac{t-t_0}{t-t_0+328}\right)^{\frac{1}{4,2}}, \quad (3.23)$$

β_f on funktio, joka kuvaa virtauksen kehittymistä ajan mukana (kuva 3.7) ja sillä on lauseke

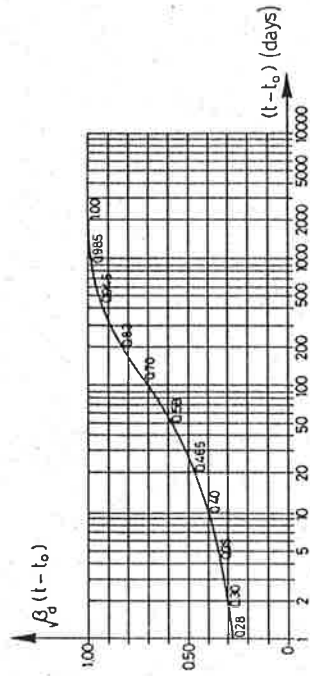
$$\beta_f(t) = \left[\frac{t}{t+K_1(h_0)}\right]^{K_2(h_0)}, \quad (3.24)$$

missä

$$K_1(h_0) = \exp\left[\frac{5,02}{h_0} + \ln(6,95h_0^{1,25})\right] \quad (3.25)$$

$$K_2(h_0) = \exp\left[0,00144h_0 - \frac{1,1}{h_0} - \ln(1,005h_0^{0,2954})\right], \quad (3.26)$$

t on betonin ikä [vrk], johon on suoritettu mahdollinen ympäristön lämpötilan ja sementin tyyppin huomioonotettava korjaus tarkasteltavana hetkenä, ja t_0 on betonin vastaava ikä kuormitushetkellä.



Kuva 3.6: Viivästyneen kimmoisen venymän kehittymisen ajan mukana.

Tehollinen paksuus määritellään kaavalla

$$h_0 = \lambda \frac{2A_C}{u}, \quad (3.27)$$

missä λ on kerroin, joka riippuu ympäristöolosuhteista taulukon 3.3 mukaisesti, A_C on betonipokkileikkauksen pinta-ala ja u on betoni-

poikkeileikkauksen ympäristöön kosketuksessa olevan ympärysviivan pinta-

Jotta voitaisiin ottaa huomioon ympäröivä lämpötila betonin kovettumisen aikana, jos se poikkeaa merkittävästi arvosta 20°C, ja sementtien tyyppi, betonin todellista ikää tulee korjata. Jokaista todellista aikaväliä Δt_i kohti, jonka aikana ympäröivä keskilämpötila on T_i , korjattu ikä saadaan kaavasta

$$t = \frac{\alpha}{30} \sum [(T_i + 10) \Delta t_i], \quad (3.28)$$

missä α on kerroin, jolla voi olla seuraavia arvoja: 1 normaalisti tai hitaasti kovettuville sementteille, 2 nopeasti kovettuville sementteille ja 3 nopeasti kovettuville korkealujuuksisille sementteille, T_i on betonin vuorokautinen keskilämpötila [°C] ja Δt_i on päivien lukumäärä, joina betonin vuorokautisella keskilämpötilalla on ollut arvo T_i

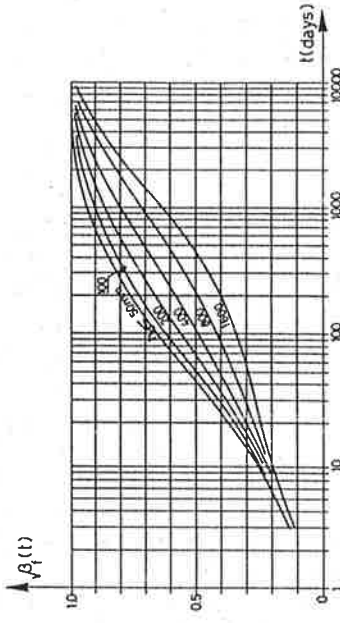
Betonin jännityksestä aiheutuvan kokonaisvenymän lauseke (3.17) voidaan myös esittää muodossa

$$\epsilon_{cs}(t, t_0) = \sigma_{c0} \Phi(t, t_0), \quad (3.29)$$

missä

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_C(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} = \frac{\beta_i(t_0) + \varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \quad (3.30)$$

on niinsanottu virumafunktio.



Kuva 3.7: Virtauksen kehittymisen ajan mukana.

Virumafunktio $\Phi(t, t_0)$ on viskoelastisuusteoriasta tuttu käsite, joka ilmaisee ajanhetkellä t_0 aktivoidun ykkösen suuruisen jännityksen aiheuttavan betonin kokonaisvenymän ajanhetkellä t .

Jos nyt jännitys σ_c ei olekaan vakio vaan vaihtelee ajan mukana, joudutaan sen aiheuttaman venymän $\epsilon_{c\sigma}$ määrittämiseksi soveltamaan yhteenlaskuperiaatetta.

Oletetaan, että aluksi betonin jännitys on nolla, ajanhetkenä t_0 se saa arvon σ_{c0} ja ajanhetkinä t_i , $i=1,2,\dots$ kunakin lisäykset $\Delta\sigma_{ci}$. Venymä $\epsilon_{c\sigma}$ ajanhetkenä $t > t_0$ saadaan yhteenlaskuperiaatteen perusteella laskemalla yhteen jännityksen σ_{c0} aiheuttama venymä

$$\epsilon_{c\sigma}^0(t) = \phi(t, t_0) \sigma_{c0}, \quad (3.31)$$

ja kaikkien niiden jännityslisäysten $\Delta\sigma_{ci}$, joiden alkamisajankohta t_i on ennen tarkasteiltavaa ajankohtaa t , aiheuttamat venymät

$$\Delta\epsilon_{c\sigma}^i(t) = \phi(t, t_i) \Delta\sigma_{ci}. \quad (3.32)$$

Näin saadaan

$$\epsilon_{c\sigma}(t) = \phi(t, t_0) \sigma_{c0} + \sum \phi(t, t_i) \Delta\sigma_{ci}, \quad (3.33)$$

missä siis summaus käy viimeiseen i :n arvoon asti, jolla $t_i \leq t$. Vaikka betonin jännitys ei todellisuudessa vaihtelee äkillisin hyppäyksin vaan jatkuvammin, on tehty olettamus käytännön laskeimissa usein hyvä approksimaatio.

Oletetaan nyt, että aluksi betonin jännitys on nolla, ajanhetkenä t_0 se saa arvon σ_{c0} ja vaihtelee tämän jälkeen jatkuvan funktion $\sigma_c(t)$ tavoin. Venymä $\epsilon_{c\sigma}$ ajanhetkenä $t > t_0$ saadaan yhteenlaskuperiaatteen perusteella nyt laskemalla yhteen jännityksen σ_{c0} aiheuttama venymä

$$\epsilon_{c\sigma}^0(t) = \phi(t, t_0) \sigma_{c0}, \quad (3.34)$$

ja kaikkien niiden differentiaalisten jännityslisäysten $d\sigma_c(\tau)$, joiden alkamisajankohta τ on ennen tarkasteiltavaa ajankohtaa t , aiheuttamat venymät

$$d\epsilon_{c\sigma}(\tau) = \phi(t, \tau) d\sigma_c(\tau). \quad (3.35)$$

Näin saadaan venymälle $\epsilon_{c\sigma}$ lauseke

$$\epsilon_{c\sigma}(t) = \phi(t, t_0) \sigma_{c0} + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) d\sigma_c(\tau). \quad (3.36)$$

Kaava (3.36) on yleinen lauseke betonin jännityksestä aiheutuvalle venymälle $\epsilon_{c\sigma}(t)$, kun jännitys $\sigma_c(t)$ on ajanhetkestä t_0 alkaen jatkuva ajan funktio.

Kaavojen (3.33) ja (3.36) pohjalta todetaan, että tarkasteiltavan pisteen venymä $\epsilon_{c\sigma}$ ajanhetkellä t ei riipu, kuten kimmoteoriassa, ainoastaan jännityksestä σ_c samana ajankohtana t , vaan koko kyseisen pisteen kokemasta jännityshistoriasta.

Jos jännityksen muuttuminen ajankohdan t_0 jälkeen on rajattua siten, että se ei ylitä 30% arvosta σ_{c0} , venymän $\epsilon_{c\sigma}(t)$ laskemiseksi voidaan kehittää likikaava seuraavasti. Otaksutaan, että jännitys heti ajanhetkellä t_0 saa arvon, jonka suuruus on $\sigma_c(t_0)$:n ja $\sigma_c(t)$:n keskiarvo, ja pysyy sitten vakiona. Vastaavalle venymälle saadaan kaavan (3.17) perusteella

$$\epsilon_{c\sigma 1}(t) = \frac{\sigma_c(t_0) + \sigma_c(t)}{2} \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{c28}} \right]. \quad (3.37)$$

Ajanhetkellä t jännitys sitten muuttuu arvoon $\sigma_c(t)$. Vastaava venymä on kimmainen ja muotoa

$$\epsilon_{c\sigma 2}(t) = \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)}{2} \frac{1}{E_c(t)}. \quad (3.38)$$

Yhteenlaskuperiaatteen perusteella saadaan nyt tulos

$$\epsilon_{c\sigma}(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\sigma_c(t) + \sigma_c(t_0)}{2E_{c28}} \phi(t, t_0) + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)}{2} \left[\frac{1}{E_c(t)} + \frac{1}{E_c(t_0)} \right]. \quad (3.39)$$

Kaavaan (3.39) perustuvaa menetettyä kutsutaan muuttuvan kimmomoduulin keski-jännitysmenetelmäksi (mean stress method with variable E_c).

Jos betonin kimmomoduulin muuttuminen ajan mukana voidaan jättää huomiotta ts. $E_c(t) = E_{c28}$, kaava (3.39) yksinkertaistuu muotoon

$$\epsilon_{c\sigma}(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_{c28}} + \frac{\sigma_c(t) + \sigma_c(t_0)}{2E_{c28}} \phi(t, t_0) \quad (3.40)$$

Kaavaan (3.40) perustuvaa menetettyä kutsutaan vakio kimmomoduulin keski-jännitysmenetelmäksi (mean stress method with constant E_c).

Jos jännitys ei vaihtelee tai se vaihtelee vain vähän (esimerkiksi laskettaessa jännityshäviöitä poikkeilukauksissa, joissa on alhainen jänneteräsprosentti), voidaan lopullisen jännityksen $\sigma_c(t)$ otaksua aloittavan vaikutuksensa heti ajanhetkellä t_0 ja pysyvän sitten

vakiona. Tällöin saadaan tulos

$$\epsilon_{c\sigma}(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_{cc}(t)}, \quad (3.41)$$

missä suuretta

$$E_{cc}(t) = \frac{E_{c28}}{1+\phi(t, t_0)} \quad (3.42)$$

kutsutaan betonin teholliseksi kimmomoduuliksi (effective modulus). Kaavoihin (3.41) ja (3.42) perustuvaa menetelyä kutsutaan tehollisen kimmomoduulin menetelmäksi tai kokonaismoduulimenetelmäksi (total deformation modulus method). Sitä käytetään laajalti jännitettyjen betonirakenteiden alustavan suunnittelun yhteydessä.

Betoninormeissa virumista käsitellään kohdassa 2.1.5.4. Tarkastelu perustuu tehollisen kimmomoduulin menettelyyn. Betonin virumisvenymälle lopputilassa ϵ_{cc} käytetään siellä kaavaa

$$\epsilon_{cc} = \phi \epsilon_c' \quad (3.43)$$

missä ϵ_c on pitkäaikaiskuormituksen aiheuttama betonin hetkellinen venymä, ts.

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (3.44)$$

missä E_c on betonin kimmomoduuli 28 vuorokauden iässä, ja ϕ on (lop-puviruman) virumaluku, jonka määrittäminen tapahtuu normien kaavan (2.14) ja taulukoiden 2.6 ja 2.7 avulla. Betonin jännityksestä aiheutuvalle kokonaisvenymälle saadaan näin

$$\epsilon_{c\sigma} = \epsilon_c + \epsilon_{cc} = (1+\phi) \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (3.45)$$

eli

$$\epsilon_{c\sigma} = \frac{\sigma_c}{E_{cc}} \quad (3.46)$$

joten teholliseksi kimmomoduuliksi tulee

$$E_{cc} = \frac{E_c}{1+\phi} \quad (3.47)$$

Betoninormeissa on myös esitetty yksinkertainen tapa laskea tietyllä aikavälillä tapahtuva virumisvenymä sekä tietyllä ajanhetkellä tapahtuvasta jännitysmuutoksesta aiheutuva virumisvenymän muutos.

Tehollisen kimmomoduulin ajattelu voidaan myös yleistää käsittämään betonin epälineaarinen jännitys-muodonmuutoslaki. Olkoon betonin lyhytaikainen jännitys-venymäriippuvuus kaavan (3.44) sijasta epälineaarinen ja muotoa

$$\epsilon_c = f(\sigma_c) \quad (3.48)$$

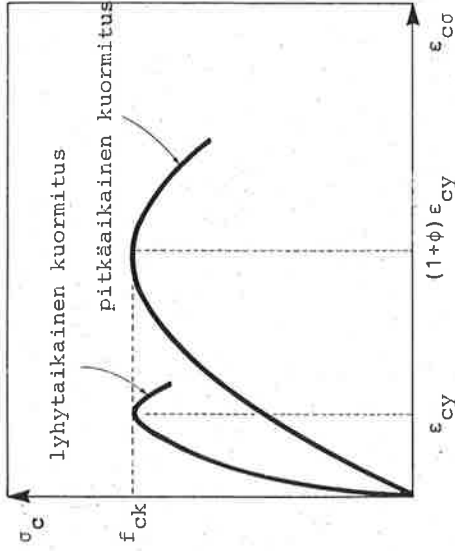
sijoittamalla tämä pitkäaikaisvenymän lausekkeeseen

$$\epsilon_{c\sigma} = \epsilon_c + \epsilon_{cc} = (1+\phi) \epsilon_c \quad (3.49)$$

saadaan

$$\epsilon_{c\sigma} = (1+\phi) f(\sigma_c) \quad (3.50)$$

Tulos (3.50) merkitsee sitä, että betonin pitkäaikainen jännitys-muodonmuutosriippuvuus saadaan vastaavasta lyhytaikaisesta riippuvuudesta skaalaamalla $\epsilon_{c\sigma}$ arvoja kertoimella $1+\phi$ (kuva 3.8).

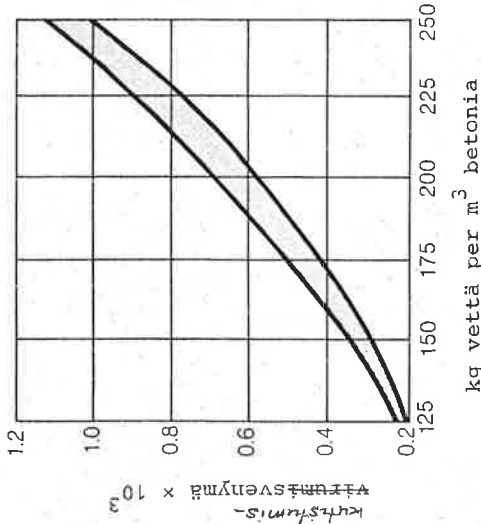


Kuva 3.8: Lyhytaikainen ja pitkäaikainen jännitysmuodonmuutoskäyrä.

3.17 Betonin kutistuminen

Ellei betonia pidetä vedessä tai 100% suhteellisessa kosteudessa, se menettää kosteuttaan ajan mukana ja sen tilavuus pienenee. Ilmiötä kutsutaan betonin kutistumiseksi.

Kutistumisen määrä riippuu voimakkaasti betonin koostumuksesta, jossa veden kokonaisuus on erityisen tärkeä, kuten voidaan nähdä kuvasta 3.9. Myöskin runkokoineen laatu on tärkeä si-



Kuva 3.9: Betoniseoksen veden määrän vaikutus kutistumaan.

ten, että kovat, tiiviit ja jäykät runkoaineet, joilla on alhainen absorptio (kuten kalkkikivi tai graniitti) aiheuttavat pienemmän kutistumisen.

Seuraavassa esitellään CEB 1978 mallin kutistumista käsittelevä osuus. Betonin kutistuma, joka kehittyy aikavälillä t_0 -t saadaan kaavalla

$$\epsilon_s(t, t_0) = \epsilon_{s0} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)], \quad (3.51)$$

missä $\epsilon_{s0} = \epsilon_{s1} f_{s2}$ on peruskutistumakerroin, ϵ_{s1} riippuu ympäristöolosuhteista taulukon 3.3 mukaisesti ja sillä on myös kaava

$$\epsilon_{s1} = (0,000775 \cdot R.H.^3 - 0,1565 \cdot R.H.^2 + 11,0325 \cdot R.H. - 303,25) \cdot 10^{-5}, \quad (3.52)$$

ϵ_{s2} riippuu tehollisesta paksuudesta h_0 kuvan 3.9 mukaisesti ja sillä on kaava

$$\epsilon_{s2} = \exp \left[0,00174 h_0 - \frac{0,32}{h_0} - \ln \left(\frac{h_0^{0,251}}{1,9} \right) \right], \quad (3.53)$$

β_s on funktio, joka kuvaa kutistumisen kehittymistä ajan funktiona kuvan 3.10 mukaisesti ja sillä on myös kaava

$$\beta_s(t) = \left[\frac{t}{t + K_3(h_0)} \right]^{K_4(h_0)}, \quad (3.55)$$

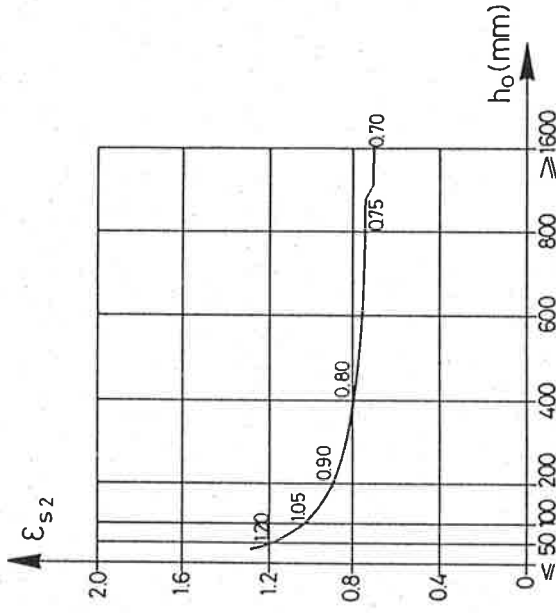
missä

$$K_3(h_0) = 11,8 h_0 + 16, \quad (3.56)$$

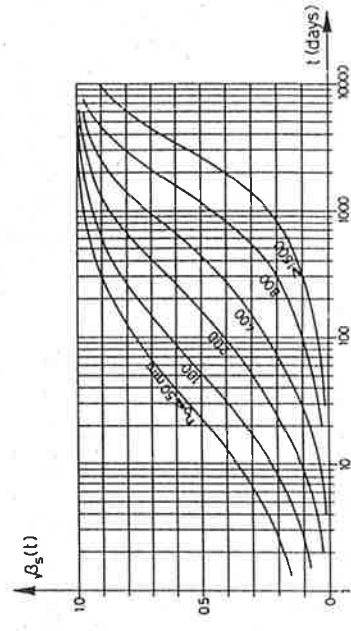
ja

$$K_4(h_0) = \exp \left[-0,00257 h_0 + \frac{0,32}{h_0} + \ln(0,22 h_0^{0,4}) \right], \quad (3.57)$$

t on betonin ikä [vrk] tarkasteltavana hetkenä, johon on suoritettu mahdollinen ympäristön lämpötilan ja sementin tyyppin huomioitava korjaus kaaavan (3.28) mukaisesti siten, että $\alpha=1$ kaikissa tapauksissa ja t_0 on betonin ikä josta lähtien kuristumista tarkastellaan, johon on suoritettu vastaava kaaavan (3.28) mukainen korjaus.



Kuva 3.9: Tehollisen paksuuden vaikutus kutistumaan.



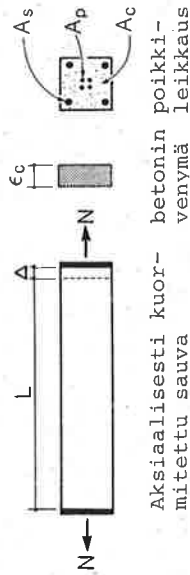
Kuva 3.10: Kutistumisen kehittyminen ajan mukana.

4. AKSIAALISESTI KUORMITETTUIJEN RAKENTEIDEN TOIMINTA

4.1 Johdanto

Vaikka aksiaalisesi kuormitetut, jännitetyt sauvat eivät ole kovin yleisiä käytännön rakenteissa, tarkastelemme tätä yksinkertaista rakennetyyppiä jonkin verran. Tämä auttaa meitä ymmärtämään jännitettyjen rakenteiden toiminnan peruseräaatteita.

Kuvassa 4.1 esittää tyypillisen aksiaalisesi kuormitettua sauvaa, jota tarkastellaan tässä kappaleessa. Sauvan poikkileikkaus (ala A) on symmetrinen ja siihen voi kuulua jänneteräksiä (ala A_p) ja betoniteräksiä (ala A_s). Otaksutaan, että betoni (ala A_c) venyy vain aksiaalisesi suunnassa ja että tämä betonin venymä ϵ_c on tasan jakautunut koko poikkipinnassa.



Aksiaalisesi kuormitettu sauvan poikkileikkaus venymä

Kuva 4.1: Aksiaalisesi kuorman kuormittama sauva.

4.2 Yhteensopivuusyhtälöt

Valetun kuormittamattoman betonin venymä otaksutaan nolllaksi. Täten juuri valetun sauvan pituus määritellään sauvan deformatiomattomaksi pituudeksi L. Sauvan aksiaalista pituuden muutosta merkitään symbolilla Δ . Betonin venymä, joka on tasan jakautunut myös palkin pituus suunnassa, on

$$\epsilon_c = \frac{\Delta}{L} \quad (4.1)$$

Otaksutaan, että valmiissa rakenteessa on sekä betonin ja betoniterästen, että betonin ja jänneterästen välillä täydellinen tartunta. Täten jokaista betonin pituuden muutosta täytyy vastata identtinen pituuden muutos raudoituksessa. Betoniteräksillä ja betonilla on valuhetkellä molemmilla venymän arvo nolll. Koska nämä molemmat materiaalit lisäksi kokevat samat pituuden muutokset, niiden venymien

täytyy olla aina yhtäsuuret. Täten

$$\epsilon_s = \epsilon_c \quad (4.2)$$

Koska jännittäminen käsittää janteen venyttämisen, janteen venymä alkuhetkellä ei ole sama kuin ympäröivän betonin. Edelleen janteella on hieman lyhyempi (suuruusluokkaa 1%) deformatiomaton pituus. Vaikka näiden kahden materiaalin alkuvenymät ovat erilaiset, niiden venymän muutokset ovat jatkossa identtiset. Täten erotusta janteen ja ympäröivän betonin venymien välillä voidaan pitää vakiona. Tämä venymäero, jolle käytämme merkintää $\Delta \epsilon_p$, on jännittämisoperaation perustavamerkki. Täten missä tahansa jännitetyn rakenteen elämän vaiheessa jänneteräksen venymä voidaan saada ympäröivän betonin venymän avulla kaavasta

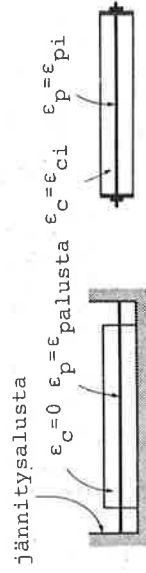
$$\epsilon_p = \epsilon_c + \Delta \epsilon_p \quad (4.3)$$

Venymäero $\Delta \epsilon_p$ voidaan määrittää jännittämisoperaation erityisyksityiskohtien pohjalta. Esijännitetyssä sauvassa (katso kuvaa 4.2) betonin venymä on nolll ja janteiden venymällä on suuri jännitysalueen aikaansaatu arvo $\epsilon_{p, palusta}$, kun nämä kaksi rakenteen osaa betonin kovetuttua liittyvät yhteen. Täten, esijännitetyissä rakenteissa venymäero on

$$\Delta \epsilon_p = \epsilon_{p, palusta} \quad (4.4)$$

Jälkijännitetyssä sauvassa betonissa on pieni puristuma ϵ_{ci} ja janteessa suuri venymä ϵ_{pi} (katso kuvaa 4.2) sillä hetkellä, kun nämä kaksi materiaalia liitetään injektioimalla toisiinsa. Tässä tapauksessa venymäero on

$$\Delta \epsilon_p = \epsilon_{pi} - \epsilon_{ci} \quad (4.5)$$



$$\Delta \epsilon_p = \epsilon_{pi} - \epsilon_{ci} = \epsilon_{pi} - \epsilon_{ci}$$

Jälkijännitetty sauva

Kuva 4.2: Venymäeron $\Delta \epsilon_p$ laskeminen.

4.3 Normaaliavoima

Aksiaalisesti kuormitetun sauvan ainoa jännitysresultantti on normaaliavoima N . Sen määrittelykaava on

$$N = \int \sigma dA \quad (4.6)$$

Koska betonin kokonaisvenymä on tasainen ja otaksumalla lisäksi, et-tä betonin kutistumisesta ja lämpötilaerosta aiheutuvat venymät ovat tasaisia, betonin jännitys tulee myös olemaan tasainen poikkipinnalla. Samoin tulee kaikilla betoniteräksillä olemaan sama jännitys ja kaikilla jänneteräksillä sama jännitys. Normaaliavoimalle saadaan nyt

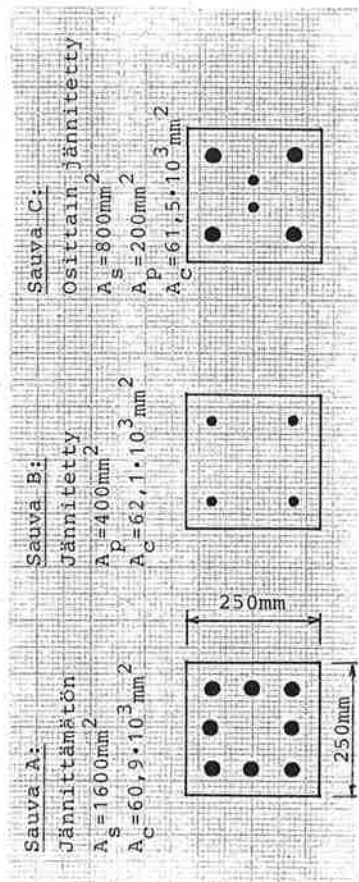
$$N = A_C \sigma_C + A_S \sigma_S + A_P \sigma_P \quad (4.7)$$

(Koska päästään aksiaalisesti kuormitetun sauvan kuorma F on tasapainoyhtälön $N=F$ perusteella normaaliavoiman N suuruinen, on myös siinä tässä yhteydessä merkitty symbolilla N .)

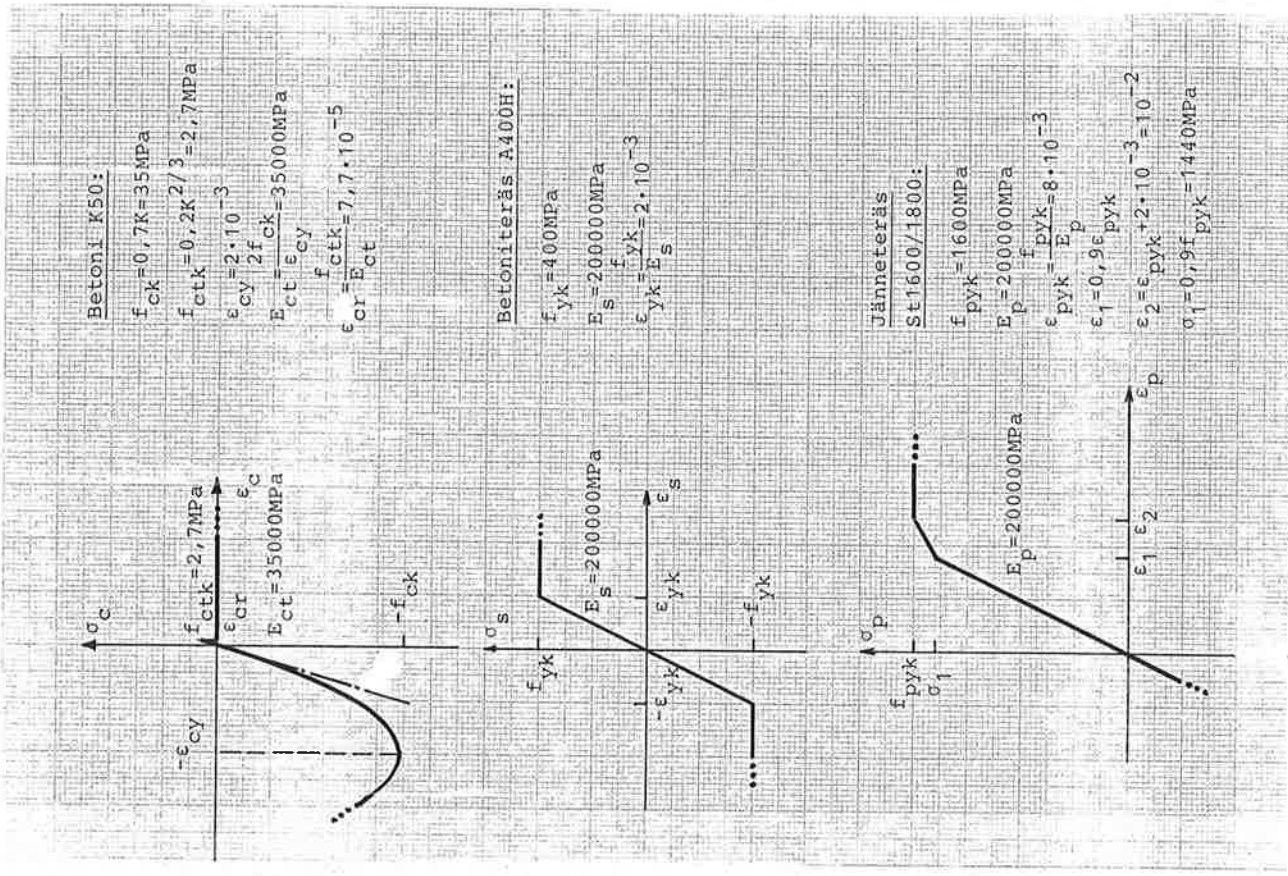
4.4 Aksiaalisesti kuormitetun sauvan vaste.

Aksiaalisesti kuormitetun sauvan vaste esitetään seuraavassa kuorman (=normaaliavoiman) N riippuvuutena venymästä $\epsilon_C = \Delta/L$. Se voidaan määrittää käyttäen normaaliavoiman lauseketta (4.7), yhteensopivuusyhtälöitä (4.2) ja (4.3) sekä luvussa 3 esillä olleita materiaalien jännitys-muodonmuutosyhteyksiä.

Valaisevana esimerkkinä laskentaprosessista ja jännittämisen vaikutuksesta lasketaan kolmen kuvassa 4.3 esitetyn sauvan kuorma-venymäriippuvudet. Näillä kaikilla kolmella sauvalla on samat mitat, mutta



Kuva 4.3: Esimerkkisauvat.



Kuva 4.4: Esimerkkisauvojen materiaalit.

Taulukko 4.1: Sauvojen A, B ja C vasteen määrittäminen.

Sauva	Venymä ϵ_c	Jännitys, MPa			Kuorma, kN	Huomautuksia
		σ_c	σ_s	σ_p		
A	-0,003	-26,25	-400	-	-2239	$\sigma_s = -f_{yk}$
	-0,002	-35	-400	-	-2772	
	-0,001	-26,25	-200	-	-1919	
	0	0	0	-	0	
B	0,000077	2,7	15,4	-	189	$\sigma_c = f_{ctk}$ $\sigma_c = 0$
	0,000077	0	15,4	-	25	
	0,001	0	200	-	320	
	0,002	0	400	-	640	
C	0,004	0	400	-	640	$\sigma_s = f_{yk}$
	-0,003	-26,25	-	600	-1390	
	-0,002	-35	-	800	-1853,5	
	-0,001	-26,25	-	1000	-1230	
B	0	0	-	1200	480	$\sigma_c = f_{ctk}$ $\sigma_c = 0$ $\sigma_p = \sigma_1$
	0,000077	2,7	-	1215	654	
	0,000077	0	-	1215	486	
	0,0012	0	-	1440	576	
C	0,002	0	-	1486	594	$\sigma_p = \sigma_1$ $\sigma_s = f_{yk}$
	0,003	0	-	1543	617	
	0,004	0	-	1600	640	
	-0,003	-26,25	-400	600	-1814	
C	-0,002	-35	-400	800	-2312,5	$\sigma_s = -f_{yk}$
	-0,001	-26,25	-200	1000	-1574	
	0	0	0	1200	240	
	0,000077	2,7	15,4	1215	421	
C	0,000077	0	15,4	1215	255	$\sigma_c = f_{ctk}$ $\sigma_c = 0$ $\sigma_p = \sigma_1$ $\sigma_s = f_{yk}$
	0,0012	0	240	1440	480	
	0,002	0	400	1486	617	
	0,003	0	400	1543	629	
C	0,004	0	400	1600	640	$\sigma_p = f_{yk}$

ne on raudoitettu eri tavoin. Raudoitus on valittu siten, että sen myötökuorma on kussakin sauvassa sama. Sauva A on jännittämätön. Terästyksen $8 \phi 16$ (A400H) pinta-ala on $A_s = 8 \cdot 201,1 \text{ mm}^2 \approx 1600 \text{ mm}^2$. Sauva B on jännitetty. Siinä on pelkästään jänneteräksiä, nimittäin $4 \phi 7$, $12,5$ joiden pinta-ala on otetaan $A_p = 4 \cdot 93 \text{ mm}^2 = 372 \text{ mm}^2 \approx 400 \text{ mm}^2$. (Suuri pyörästys ylöspäin on tehty, jotta terästyksen myötökuorma tulisi samaksi kuin sauvassa A). Sauva C on osittain jännitetty. Siinä on betoniteräksiä $4 \phi 16$ (A400H), $A_s = 800 \text{ mm}^2$ ja jänneteräksiä $2 \phi 7$, $12,5$, $A_p = 200 \text{ mm}^2$.

Kuormitus otaksutaan lyhytaikaiseksi (ts. virumisesta aiheutuva venymä on häviävän pieni) sekä kutistumisesta ja lämpötilan muutoksesta aiheutuvat venymät nolliksi. Määrittäksemme koko kuorma-venymä riippuvuuden määritämme normaaliavoiman N, joka aiheutuu eri venymien ϵ_c arvoista. Laskelma kulku on seuraava: Valitaan aluksi venymä ϵ_c , määritetään betoniterästen ja jänteiden venymät, määritetään vastaväät jännitykset jännitys-muodonmuutos yhteyksistä ja määritetään lopuksi normaaliavoima N.

(a) Sauvan A vasteen määrittäminen.

(a) Valitaan venymä ϵ_c :

$$\epsilon_c = -0,001$$

(b) Määritetään betoniterästen venymä:

$$\epsilon_s = \epsilon_c = -0,001$$

(c) Määritetään betonin jännitys:

Koska $\epsilon_c < 0$ saadaan

$$\sigma_c = -f_{ck} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right] = -35 \left[1 - \left(1 - \frac{-0,001}{-0,002} \right) \right] = -26,25 \text{ MPa}$$

(d) Määritetään betoniterästen jännitys:

Koska $|\epsilon_s| < \epsilon_{yk}$, betoniteräkset eivät ole myötäneet, ja saadaan

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s = 200000 \cdot (-0,001) = -200 \text{ MPa}$$

(e) Määritetään normaaliavoima:

$$N = A_c \sigma_c + A_s \sigma_s = 60,9 \cdot 10^3 \cdot (-26,25) + 1,6 \cdot 10^3 \cdot (-200) = -1919 \cdot 10^3 \text{ N} = -1919 \text{ kN}$$

Täten, kun betonin venymä on $\epsilon_c = -0,001$, sauvaa kuormittaa 1919 kN :n suuruinen puristusvoima.

Toistamalla ylläesitettyt laskelmat eri ϵ_c :n arvoilla saadaan taulukon 4.1 sauva A vastaavat tulokset. Huomaa, että venymään $\epsilon_c = f_{ctk}/E_c = 0,000077$ liittyy on tehty kaksi taulukkoriviä, ensimmäinen vastaa tilannetta ennen halkeamista, jollon $\sigma_c = f_{ctk}$ ja toinen tilannetta halkeamisen jälkeen, jolloin $\sigma_c = 0$.

(b) Sauvan B vasteen määrittäminen.

(a) Valitaan venymä ϵ_c :

$$\epsilon_c = -0,001$$

(b) Määritetään jänneiden venymä:

Jänneiden jännitys ennen betonin valua oli $\sigma_{\text{palusta}} = 1200 \text{MPa}$. Täten

$$\Delta \epsilon_c = \epsilon_{\text{palusta}} = \frac{\sigma_{\text{palusta}}}{E_p} = \frac{1200}{200000} = 0,006$$

$$\epsilon_p = \epsilon_c + \Delta \epsilon_c = -0,001 + 0,006 = 0,005$$

(c) Määritetään betonin jännitys:

$$\sigma_c = -f_{ctk} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right] = -26,25 \text{MPa}$$

(d) Määritetään jänneiden jännitys:

Koska $\epsilon_c < \epsilon_{c1} = 0,0072$, jänneet eivät ole myötäneet, ja saadaan

$$\sigma_p = E_p \epsilon_p = 200000 \cdot 0,005 = 1000 \text{MPa}$$

(e) Määritetään normaaliavoima:

$$N = A_c \sigma_c + A_s \sigma_s = 62,1 \cdot 10^3 \cdot (-26,25) + 0,4 \cdot 10^3 \cdot 1000 = -1230 \text{kN}$$

Täten, kun betonin venymä on $\epsilon_c = -0,001$, sauva kuormittaa 1230kN:n suuruinen puristusvoima.

Toistamalla ylläesitettyt laskelmat eri ϵ_c :n arvoilla saadaan taulukon 4.1 sauva B vastaavat tulokset. Jänteen venymää $\epsilon_1 = 0,0072$ vastaava betonin venymä $\epsilon_c = \epsilon_1 - \Delta \epsilon_p = 0,0072 - 0,006 = 0,0012$ on otettu yhdeksi laskennan lähtöarvoksi. Huomaa, että vaaditaan huomattava vetovoima $N = 400 \text{kN}$, jotta betonin venymä olisi nolla.

(c) Sauvan C vasteen määrittäminen.

(a) Valitaan venymä ϵ_c :

$$\epsilon_c = -0,001$$

(b) Määritetään betoniterästen ja jänneiden venymä:

$$\epsilon_s = \epsilon_c = -0,001$$

$$\epsilon_p = \epsilon_c + \Delta \epsilon_p = 0,005$$

(c) Määritetään betonin jännitys:

$$\sigma_c = -f_{ctk} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right] = -26,25 \text{MPa}$$

(d) Määritetään betoniterästen ja jänneiden jännitys:

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s = -200 \text{MPa}$$

$$\sigma_p = E_p \epsilon_p = 1000 \text{MPa}$$

(e) Määritetään normaaliavoima:

$$N = A_c \sigma_c + A_s \sigma_s + A_p \sigma_p = 61,5 \cdot 10^3 \cdot (-26,25) + 0,8 \cdot 10^3 \cdot (-200) + 0,2 \cdot 10^3 \cdot 1000 = -1574,4 \text{kN}$$

Täten, kun betonin venymä on $\epsilon_c = -0,001$, sauva kuormittaa 1574,4kN:n suuruinen puristusvoima.

Toistamalla ylläesitettyt laskelmat eri ϵ_c :n arvoilla saadaan taulukon 4.1 sauva C vastaavat tulokset.

(d) Jännittämisen vaikutus vasteeseen.

Kolmen analysoidun sauvan vasteita verrataan kuvassa 4.5. Kuvista voidaan tehdä seuraavat johtopäätökset.

- (1) Jännittäminen ei vaikuta sauvojen vetokestävytyteen, joka on yhtäsuuri kuin terästyksen ala kertaa sen myötölujuus.
- (2) Jännittäminen lisää kuormaa, jolla betoni alkaa halkeilla.
- (3) Jännittäminen johtaa kuorma-venymäkäyrään, joka ei kulje origon kautta.
- (4) Jännittäminen vähentää betonin venymä käyttötilaa vastaavilla vetokuormilla.
- (5) Jännittäminen on haitallista puristusvasteelle aiheuttaen kestävyden alenemisen ja muodonmuutoksen kasvun.

4.5 Virumisen, kutistumisen, relaxaation ja lämpötilamuutoksen huomiominen.

Kuvassa 4.5 esitettyjen aksiaalisen kuormituksen saavuttamisen jälkeen voidaan ymmärtää vastaavan lyhytaikaisen kuormituksen, koska niitä määritettäessä ei otettu huomioon virumisen, kutistumisen, relaxaation ja lämpötilan muutoksen vaikutuksia, jotka tapahtuvat ajan kuluessa.

Kuten luvussa 3 todettiin, viruminen voidaan ottaa huomioon käyttämällä muunnettua jännitys-muodonmuutos riippuvuutta betonille ja relaxaatio voidaan ottaa huomioon käyttämällä muunnettua tehokasta kimmomoduulia jänneteräkselle. Kutistuminen ja lämpötilan muutos voidaan ottaa huomioon identifioimalla vastaavat kokonaisvenymän osat.

Täten betonin kokonaisvenymä ϵ_c on

$$\epsilon_c = \epsilon_{cs} + \epsilon_{cs} + \epsilon_{ct} \quad (4.8)$$

missä ϵ_{cs} on jännityksestä aiheutuva venymä, ϵ_{cs} on vapaasti tapahtuva kutistumisvenymä (shrinkage) ja ϵ_{ct} on lämpötilan muutoksesta ΔT aiheutuva venymä (ts. $\alpha_{ct} \Delta T$).

Betoniterästen kokonaisvenymä ϵ_s on

$$\epsilon_s = \epsilon_{s\sigma} + \epsilon_{s\Delta T} \quad (4.9)$$

missä $\epsilon_{s\sigma}$ on jännityksestä aiheutuva venymä ja $\epsilon_{s\Delta T}$ on lämpötilan muutoksesta ΔT aiheutuva venymä (ts. $\alpha_{st} \Delta T$).

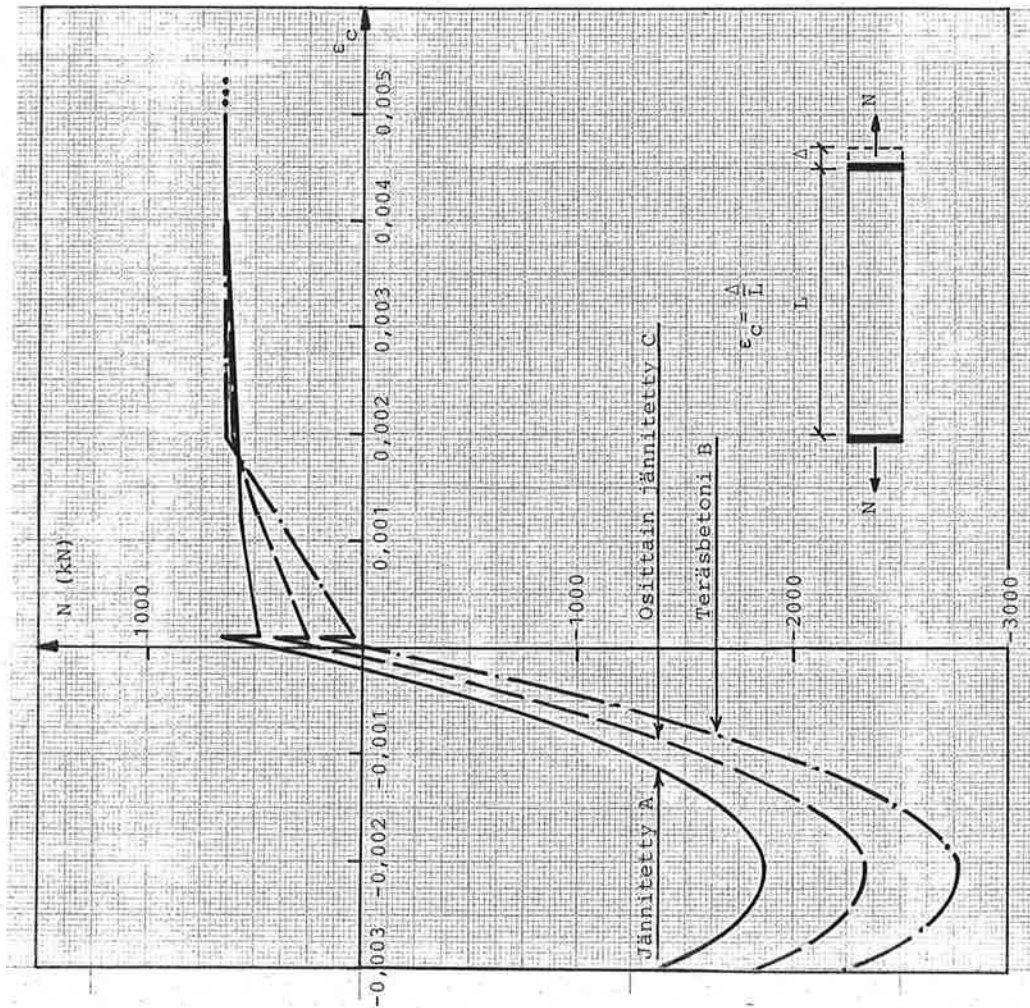
Jänneterästen kokonaisvenymä ϵ_p on

$$\epsilon_p = \epsilon_{ps} + \epsilon_{p\Delta T} \quad (4.10)$$

missä ϵ_{ps} on jännityksestä aiheutuva venymä ja $\epsilon_{p\Delta T}$ on lämpötilan muutoksesta ΔT aiheutuva venymä (ts. $\alpha_{pt} \Delta T$).

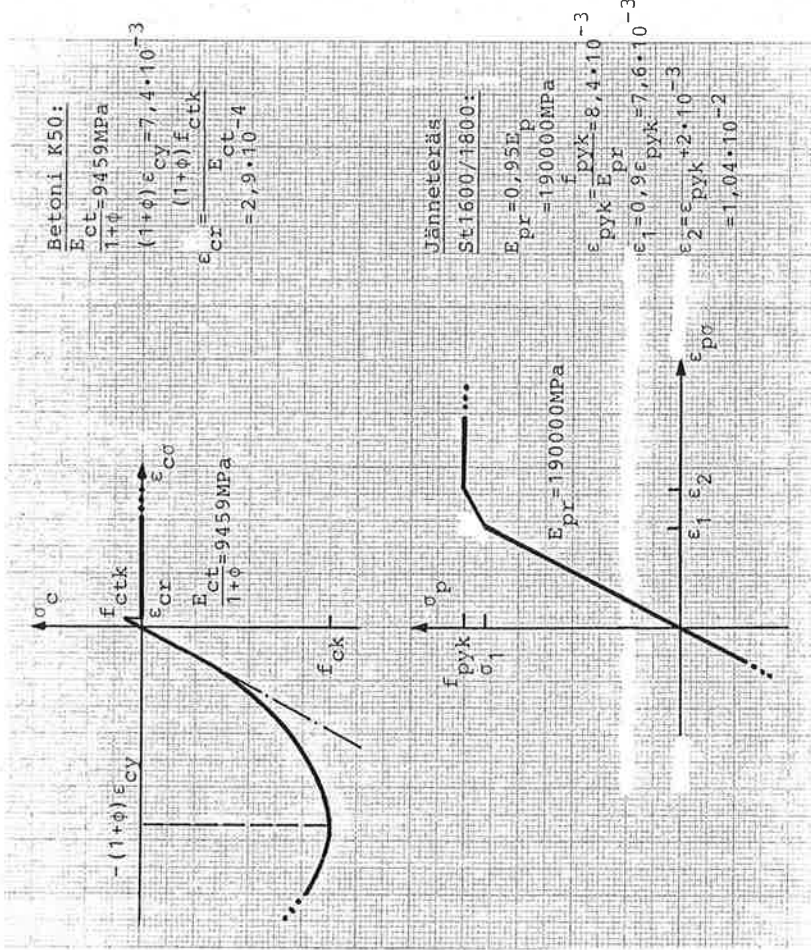
4.6 Aksiaalisesti kuormitetun sauvan vasteen määrittäminen pitkäaikaiskuormitukselle.

Saadaksemme käsityksen siitä, kuinka ajasta riippuvat vaikutukset otetaan huomioon, lasemme sauvan C pitkäaikaisen vasteen otaksuamalla, että



Kuva 4.5: Jännittämisen vaikutus kuorma-muodonmuutos vasteeseen.

- Virumaluku ϕ on 2,7. Tulokseksi saatu pitkäaikainen jännitys-
muodonmuutos riippuvuus on esitetty kuvassa 4.6.
- Betonin vapaa kutistumisvenymä ϵ_{cs} on $-0,4 \cdot 10^{-3}$.
- Jänteiden jännityshäviö relaxaation vaikutuksesta on 5%. Täten
 $E_{pr} = 0,95 \cdot 200000 = 190000 \text{ MPa}$. Vastaava jännitysmuodonmuutoskäyrä on
esitetty kuvassa 4.6.
- Lämpötila on laskenut 30°C ja pituuden lämpötilakertoimet α_{ct} ,
 α_{st} ja α_{pt} ovat kaikki $10^{-5}/^\circ\text{C}$.



Kuva 4.6: Betonin ja jänteen jännitys-muodonmuutoskäyrät pitkäaikaiskuormitukselle.

Sensijaan, että seuraisimme yksityiskohtaisesti todellista kuormitushistoriaa, laskemme pitkäaikaisvasteelle rajatapauksen. Ajatellaan, että kutistuminen ja lämpötilan muutos ovat tapahtuneet ensin ja sitten kuorma pannaan vaikuttamaan niin pitkäksi aikaa, että viiruminen ja relaxaatio tapahtuvat.

Jälleen määritämme useita valittuja betonin venymän ϵ_c arvoja vastaavan kuorman N .

- Valitaan venymä ϵ_c :

$$\epsilon_c = -0,001$$

- Määritetään betoniterästen ja jänteiden venymä:

$$\epsilon_s = \epsilon_c = -0,001$$

$$\epsilon_p = \epsilon_c + \Delta \epsilon_p = 0,005$$

- Määritetään betonin jännitys:

Vain osa betonin kokonaisvenymästä ϵ_c aiheutuu nyt jännityksestä.

Lausekkeesta (4.8) saadaan

$$\epsilon_{cs} = \epsilon_c - \epsilon_{cAT} = -0,001 - (-0,0004) = -0,0003$$

Betonin pitkäaikaisesta jännitys-muodonmuutos yhteydestä saadaan nyt

$$\sigma_c = -f_{ck} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_{cs}}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right] = -35 \left[1 - \left(1 - \frac{-0,0003}{-0,0074} \right)^2 \right] = -2,8 \text{ MPa.}$$

- Määritetään betoniterästen ja jänteiden jännitys:

Lausekkeesta (4.3) saadaan

$$\epsilon_{sAT} = \epsilon_s - \epsilon_{sAT} = -0,001 - (-30 \cdot 10^{-5}) = -0,0007$$

Betoniteräksen jännitys-muodonmuutosyhteydestä saadaan

$$\sigma_s = E_s \epsilon_{sAT} = 200000 \text{ MPa} \cdot (-0,0007) = -140 \text{ MPa}$$

Lausekkeesta (4.4) saadaan

$$\epsilon_{pAT} = \epsilon_p - \epsilon_{sAT} = 0,005 - (-30 \cdot 10^{-5}) = 0,0053$$

Jänteen pitkäaikaisesta jännitys-muodonmuutosriippuvuudesta saadaan

$$\sigma_p = E_p \epsilon_{pAT} = 190000 \cdot 0,0053 = 1007 \text{ MPa}$$

- Määritetään normaaliavoima:

$$N = A_c \sigma_c + A_s \sigma_s + A_p \sigma_p = 61,5 \cdot 10^3 (-2,8) + 0,8 \cdot 10^3 (-140) + 0,2 \cdot 10^3 \cdot 1007 = -81,6 \text{ kN}$$

Täten pitkäaikaisolosuhteissa aiheutuu venymä $-0,001$, kun hyvin pieni puristava voima $81,6 \text{ kN}$ vaikuttaa saavaan.

Toistamalla ylläesitetyt laskelmat eri ϵ_c :n arvoilla saadaan taulukossa 4.2 esitetyt tulokset.

Taulukko 4.2: Sauvan C vasteen määrittäminen pitkäaikaiskuormitukseksi.

ϵ_c	Venymät $\cdot 10^3$			Jännitykset, MPa			Voima, kN	Huomautuksia
	ϵ_{cs}	ϵ_{ps}	ϵ_{ps}	σ_c	σ_s	σ_p		
-10	-9,3	-9,7	-3,7	-32,7	-400	-703	-2471,7	
-8	-7,3	-7,7	-1,7	-35,0	-400	-323	-2537,1	
-6	-5,3	-5,7	0,3	-32,2	-400	57	-2288,9	
-4	-3,3	-3,7	2,3	-24,3	-400	437	-1727,1	
-2,3	-1,6	-2,0	4,0	-13,5	-400	760	-998,3	$\sigma_s = -f_{yk}$
-1,0	0,3	0,7	5,3	-2,8	-140	1007	-81,6	
-0,41	0,29	-0,11	5,89	2,7	-22	1119	372,3	$\sigma_c = f_{ctk}$
-0,41	0,29	-0,11	5,89	0	-22	1119	206,2	$\sigma_c = 0$
1,3	2,0	1,6	7,6	0	320	1444	544,8	$\sigma_p = \sigma_1$
1,7	2,4	2,0	8,0	0	400	1466	613,2	$\sigma_s = f_{yk}$
4,1	4,8	4,4	10,4	0	400	1600	640	$\sigma_p = f_{pyk}$
6,0	6,7	6,3	12,3	0	400	1600	640	

4.7 Lyhytaikaisen ja pitkäaikaisen vasteen vertailu

Kuva 4.6 vertaa laskettua pitkäaikaisesta vastetta lyhytaikaiseen vasteseen. Lyhytaikaisen ja pitkäaikaisen vasteen on tarkoitus olla mahdollisen vasteen ala- ja yläraja. Sana "lyhytaikainen" vastaa tapausta, jossa betonin kutistumista, virumista ja jänteen relaxaatiota ei ole vielä ehtinyt tapahtua, eikä myöskään lämpötila ole päässyt muuttumaan. Sana "pitkäaikainen" vastaa tapausta, jossa kaikki betonin viruminen, kutistuminen ja jänteen relaxaatio on tapahtunut ja tämän lisäksi sauva on kokenut huomattavan lämpötilan muutoksen. Täten "pitkäaikainen" antaa suurimman mahdollisen sauvan lyhenemän.

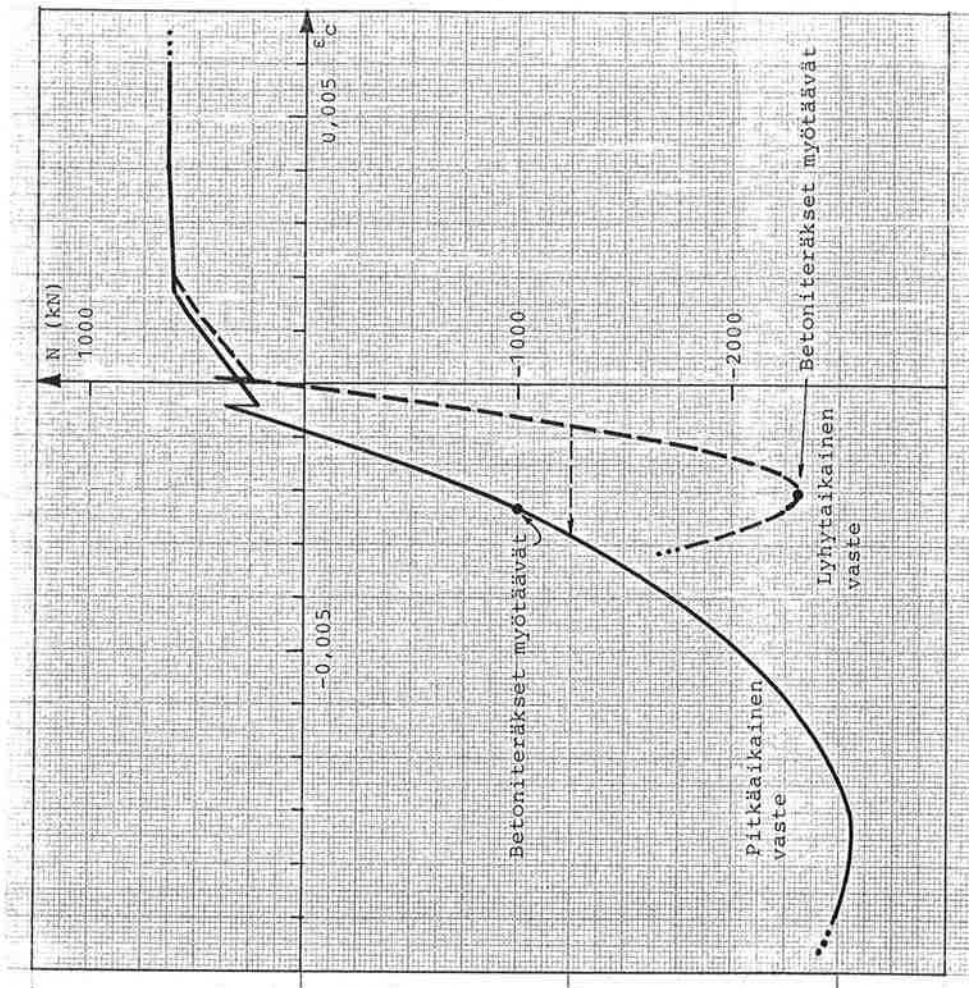
Todellinen vaste on näiden ääritapausten välillä. Täten, jos sauva olisi kuormitettu 1250kN:n puristusvoimalla ja kuorma pysyisi sitten vakiona, muodonmuutos kasvaisi vähitellen lyhytaikaisesta arvosta kohti pitkäaikaisesta arvoa (katso kuvaa 4.7).

Vertaamalla kuvan 4.7 kahta vastekäyrää voidaan tehdä seuraavat johtopäätökset:

- (1) Kuorman ollessa nollassa ($N=0$) tapahtuu ajan mukana huomattava sau-

van pituuden muutos. Tämä lyheneminen, joka on promillen luokkaa, tulee ottaa huomioon suunnittelussa.

- (2) Pitkäaikaiskuormituksella betoniteräksiset myötävät puristuspuolella ylläpitävän pienen kuorman alaisena. Viruminen ja kutistuminen aiheuttavat puristuskuorman siirtymisen betoniteräksille.
- (3) Pitkäaikainen puristuskestävyys on hieman suurempi kuin lyhytaikainen puristuskestävyys. Lyhytaikaiskuormituksella jänneteräksiset ovat vielä vedettyjä, kun betoni saavuttaa maksimipuristuslujuuden.



Kuva 4.7: Lyhytaikainen ja pitkäaikainen vaste.

(4) Pitkäaikaiskuormituksella betoni halkeilee samalla kun sen venymä on vielä puristavaa (negatiivinen)! Samalla kun kokonaisvenymä on puristavaa, jännityksestä aiheutuva venymä on vetävää. Täten on mahdollista muodostua halkeamia sellaisiin jännitetyjen rakenteiden osiin, jotka ovat selvästi lyhenemässä.

4.8 Halkeilemattoman sauvan lineaarisesti kimmoisen vaste.

Ylläesitetty menettelytapa antaa mahdollisuuden määrittää mukavasti aksiaalisen kuorman N , joka vastaa annettua betonin venymää ϵ_c . Vaikka $N:n$ ja $\epsilon_c:n$ yhteys on tässä tapauksessa helppo määrittää, se on voimakkaasti epälineaarinen, kuten kuvasta 4.8 voidaan todeta. Tämän vuoksi joudutaan käyttämään yrityksen ja erehdyksen menettelyä, jotta tiettyä aksiaalista kuormaa vastaava venymä saadaan määritettyksi.

Niin kauan kuin betoni säilyy halkeilemattomana ja jännitykset betonissa säilyvät "kimmoisella alueella", $N:n$ ja $\epsilon_c:n$ yhteys on käytännöllisesti katsoen lineaarinen (katso kuvaa 4.8). Tällä kuormitusalueella voidaan johtaa suljettua muotoa olevat lausekkeet, joilla voimme määrittää sauvan tiettyä annettua kuormitusta vastaavan vasteen turvautumatta yrityksen ja erehdyksen menetelmään.

Tarkastellaan ensiksi lyhytaikaista kuormitusta. Yhtälöt, joita käytetään lähtökohdista ovat:

Normaalivoiman ja jännitysten yhteys:

$$N = A_c \sigma_c + A_s \sigma_s \quad (4.11)$$

Yhteensopivuusyhteydet:

$$\epsilon_s = \epsilon_c \quad (4.12)$$

$$\epsilon_p = \epsilon_c + \Delta \epsilon_c \quad (4.13)$$

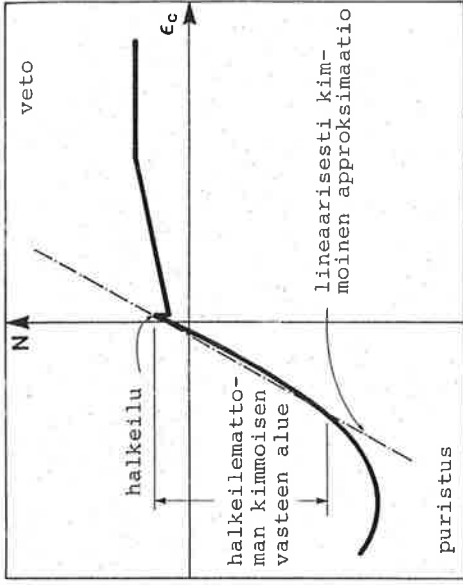
Jännitys-muodonmuutosyhteydet:

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c \quad (4.14)$$

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s \quad (4.15)$$

$$\sigma_p = E_p \epsilon_p \quad (4.16)$$

Sijoittamalla yhteensopivuusyhtälöt (4.12) ja (4.13) jännitysmuodon-



Kuva 4.8: Lineaarisesti kimmoisen vasteen soveltuvuusalue.

muutosyhtälöihin (4.14)-(4.16) ja nämä edelleen normaalivoiman lausekkeeseen (4.11) saadaan

$$N = (E_c A_c + E_s A_s + E_p A_p) \epsilon_c + E_p A_p \Delta \epsilon_c \quad (4.17)$$

Otetaan käyttöön termi

$$N_0 = E_c A_c \Delta \epsilon_c \quad (4.18)$$

jota kutsutaan alkunormaalivoimaksi. Se on normaalivoima, joka tarvitaan aiheuttamaan nollan suuruisen venymän. Otetaan käyttöön myös ns. muunnettu poikkipinnan ala

$$A_i = A_c + \alpha_s A_s + \alpha_p A_p \quad (4.19)$$

missä α_s betoniterästen ja betonin kimmomoduulien suhde, sekä α_p on jänneterästen ja betonin kimmomoduulien suhde, ts.

$$\alpha_s = \frac{E_s}{E_c}, \quad \alpha_p = \frac{E_p}{E_c} \quad (4.20)$$

Nyt saadaan yhtälö (4.17) muotoon

$$N = E_c A_i \epsilon_c + N_0 \quad (4.21)$$

eli

$$\epsilon_c = \frac{N - N_0}{E_c A_i} \quad (4.22)$$

Tämä lineaarinen yhteys aksiaalisen kuorman N ja betonin venymän ϵ_c välillä on kuvassa 4.8 esitetyn monimutkaisemman riippuvuuden approksimaatio. On tietysti asiallista käyttää tätä lineaarista riippuvuutta vetäville kuormille, jotka ovat pienempiä kuin halkeilukuorma, ja puristaville kuormille, jotka ovat pienempiä kuin merkityksellistä epälineaarisuutta aiheuttavat puristusvoimat.

Tarkastellaan nyt pitkäaikaista kuormitusta. Yhtälöt, joita käytetään, täydentyvät nyt kokonaisuodonnusten lausekkeilla

$$\epsilon_c = \epsilon_{cs} + \epsilon_{sAt} \quad (4.23)$$

$$\epsilon_s = \epsilon_{s\sigma} + \epsilon_{sAt} \quad (4.24)$$

$$\epsilon_p = \epsilon_{p\sigma} + \epsilon_{pAt} \quad (4.25)$$

Lisäksi jännitys-muodonmuutosyhteyksissä esiintyvät venymät täytyy nyt eritellä jännityksistä aiheutuviiksi venymiksi ϵ_{cs} , $\epsilon_{s\sigma}$ ja $\epsilon_{p\sigma}$, joten jännitys-muodonmuutosyhteydet kuuluvat

$$\sigma_c = E_c \epsilon_{cs} \quad (4.26)$$

$$\sigma_s = E_s \epsilon_{s\sigma} \quad (4.27)$$

$$\sigma_p = E_p \epsilon_{p\sigma} \quad (4.28)$$

Sijoittamalla jännityksistä aiheutuvat venymät kokonaisuodonnusten lausekkeista (4.23)-(4.25) jännitys-muodonmuutosyhteyksiin (4.26)-(4.28), ottamalla huomioon yhteensopivuusyhtälöt (4.12) ja (4.13) sekä sijoittamalla saadut jännitysten lausekkeet normaali-voiman lausekkeeseen (4.11) saadaan nytkin muotoa (4.21) tai (4.22) olevat tulokset. Nyt vain alkunormaali-voimalla on lauseke

$$N_0 = E_p A_p \Delta \epsilon_p - (E_c A_c \epsilon_c + E_s A_s \epsilon_s + E_p A_p \epsilon_p + E_c A_c \epsilon_{cs} + E_s A_s \epsilon_{s\sigma} + E_p A_p \epsilon_{p\sigma}) \quad (4.29)$$

4.9 Esimerkkilaskelma otaksumalla halkeilematon kimmoinen vaste

Lasketaan kuvan 4.3 saualle C betonin jännitys σ_c , betoniterästen jännitys σ_s ja jänteen jännitys σ_p lyhytaikaiselle ja pitkäaikaiselle kuormitukselle, kun aksiaalinen kuorma N on nolla. Jotta tulokset olisivat mahdollisimman hyvin vertailukelpoisia yllä saatujen kanssa, käytetään betonin lyhytaikaista kuormitusta vastaavana kimmoduullina kuvan 4.4 betonin jännitysmuodonmuutoskäyrän sopivaa sekanttimoduulia, jonka arvioidaan olevan noin 90% origossa lasketusta tangenttimoduulista E_{ct} , ts. $E_c = E_{cs} = 0,9 E_{ct} = 0,9 \cdot 35000 \text{ MPa} = 31500 \text{ MPa}$. (Tämä

poikkeaa betoninormien arvosta $E_c = 50000 \sqrt{K} = 35400 \text{ MPa}$ jonkin verran.)

(a) Lyhytaikaisten jännitysten määrittäminen

Aluksi saadaan

$$\alpha_s = \alpha_p \frac{E_s}{E_c} = \frac{E_p}{E_c} = \frac{200000}{31500} = 6,35$$

$$A_i = A_c + \alpha_s A_s + \alpha_p A_p = 61500 + 6,35 \cdot 800 + 6,35 \cdot 200 = 67900 \text{ mm}^2$$

$$N_0 = E_p A_p \Delta \epsilon_p = 200000 \cdot 200 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 240 \text{ kN}$$

Kokonaisvenymälle, kun kuorma N on nolla, saadaan

$$\epsilon_c = \frac{N - N_0}{E_c A_i} = \frac{0 - 240000}{31500 \cdot 67900} = -0,112 \cdot 10^{-3}$$

Betonin jännitykselle saadaan nyt

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c = 31500 \cdot (-0,112 \cdot 10^{-3}) = -3,52 \text{ MPa}$$

Betoniterästen venymälle ja jännitykselle saadaan

$$\epsilon_s = \epsilon_c = -0,112 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s = 200000 \cdot (-0,112 \cdot 10^{-3}) = -22,4 \text{ MPa}$$

Jänneterästen venymälle ja jännitykselle saadaan

$$\epsilon_p = \epsilon_c + \Delta \epsilon_p = -0,112 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-3} = 5,89 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_p = E_p \epsilon_p = 200000 \cdot 5,89 \cdot 10^{-3} = 1178 \text{ MPa}$$

(b) Pitkäaikaisten jännitysten määrittäminen

Lasketaan betonin ja jänneterästen tehollinen kimmoduuli pitkäaikaiskuormitukselle

$$E_{cc} = \frac{E_c}{1 + \phi} = \frac{31500}{1 + 2,7} = 8513,5 \text{ MPa}$$

$$E_{pr} = 0,95 \cdot E_p = 190000 \text{ MPa}$$

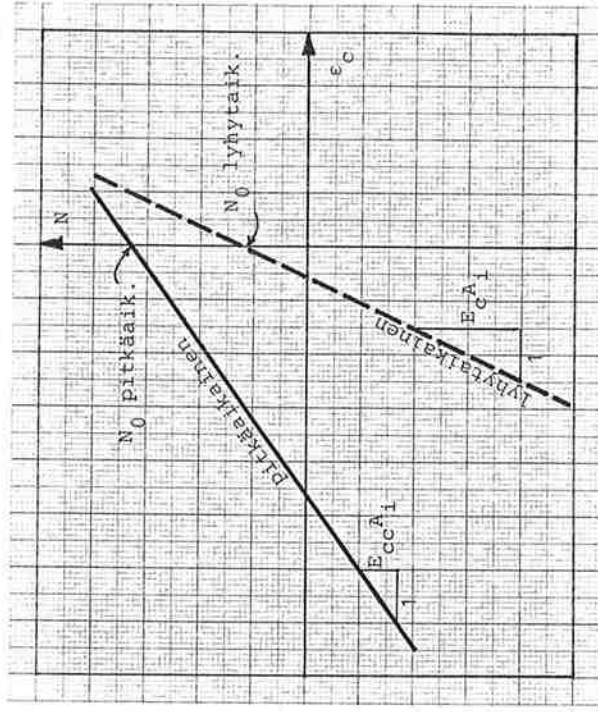
Nyt saadaan

$$\alpha_s = \frac{E_s}{E_{cc}} = \frac{200000}{8513,5} = 23,5$$

$$\alpha_p = \frac{E_{pr}}{E_{cc}} = \frac{190000}{8513,5} = 22,3$$

näolo aiheuttaa huomattavaa puristusjännitysten uudelleen jakautumista siten, että betoniterästen jännitys kasvaa ja betonin jännitys pienenee.

Lyhytaikainen ja pitkäaikainen kuorma-muodonmuutosriippuvuus saavalle C käyttäen lineaarisesti kimmoista, halkeilematonta mallia on esitetty kuvassa 4.9. Havaitaan, että virumisen, kutistumisen ja relaxaation vaikutuksesta sauvan jäykkyyks vähenee huomattavasti, nolakuormaa vastaava puristuma kasvaa suuresti ja aksiaalinen kuorma, joka tarvitaan aiheuttamaan nollavenymä, kasvaa.



Kuva 4.9: Lyhyt- ja pitkäaikaisen lineaarisen kimmoisuuden vertailu.

4.9 Betonin vetojännitykset halkeilun jälkeen

Tähän mennessä suorittamissamme laskelmissa olemme otaksuneet, että betonin jännityksestä aiheutuvan venymän ϵ_{cr} ylittävissä halkeiluvenymän ϵ_{cr} betonin vetojännitys menee nolllaksi. Otaksuuma vastaa sitä, että betonin olemassaolo halkeilun jälkeen jätetään ottamatta huomioon. Täten heti kuin betoni on haljennut, sauvan kuorma-venymäkäyrän otaksutaan olevan sama kuin pelkkien terästen.

$$A_i = A_c + \alpha_s A_s + \alpha_p A_p = 61500 + 23,5 \cdot 800 + 22,3 \cdot 200 = 84760 \text{ mm}^2$$

$$N_0 = E_p A_p \Delta \epsilon - (E_{cc} A_c \epsilon_{cs} + E_{cc} A_c \epsilon_{cs} \Delta t + E_{cc} A_c \epsilon_{cs} \Delta t + E_{cc} A_c \epsilon_{cs} \Delta t) + 190000 \cdot 200 \cdot 6 \cdot 10^{-3} - [8513,5 \cdot 61500 \cdot (-0,4 \cdot 10^{-3} - 0,3 \cdot 10^{-3}) + 200000 \cdot 800 \cdot (-0,3 \cdot 10^{-3}) + 190000 \cdot 200 \cdot (-0,3 \cdot 10^{-3})]$$

$$= 653,9 \text{ kN}$$

Kokonaisvenymälle, kun kuorma N on nollla, saadaan

$$\epsilon_c = \frac{N - N_0}{E_{cc} A_c} = \frac{0 - 653900}{8513,5 \cdot 61500} = -0,906 \cdot 10^{-3}$$

Betonin jännityksestä aiheutuvalle venymälle ja jännitykselle saadaan

$$\epsilon_{cs} = \epsilon_c - \epsilon_{cs} \Delta t = -0,906 \cdot 10^{-3} - (-0,4 \cdot 10^{-3}) - (-0,3 \cdot 10^{-3}) = -0,206 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_c = E_{cc} \epsilon_{cs} = 8513,5 \cdot (-0,206 \cdot 10^{-3}) = -1,75 \text{ MPa}$$

Havaitaan, että virumisen, kutistumisen, relaxaation ja lämpötilan muutoksen johdosta betonin puristusjännitys on vähentynyt arvosta 3,52 MPa arvoon 1,75 MPa. Häviö on 50,3%! Betoniterästen kokonaisvenymälle, jännityksestä aiheutuvalle venymälle ja jännitykselle saadaan

$$\epsilon_s = \epsilon_c = -0,906 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{s\sigma} = \epsilon_s - \epsilon_{s\Delta t} = -0,906 \cdot 10^{-3} - (-0,3 \cdot 10^{-3}) = -0,606 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_s = E_s \epsilon_{s\sigma} = 200000 \cdot (-0,606 \cdot 10^{-3}) = -121,2 \text{ MPa}$$

Havaitaan, että virumisen, kutistumisen, relaxaation ja lämpötilan muutoksen johdosta betoniterästen puristusjännitys on kasvanut arvosta 22,4 MPa arvoon 121,6 MPa. Kasvu on 443%! Jänneterästen kokonaisvenymälle, jännityksestä aiheutuvalle venymälle ja jännitykselle saadaan

$$\epsilon_p = \epsilon_c + \Delta \epsilon_p = -0,906 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-3} = 5,09 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{p\sigma} = \epsilon_p - \epsilon_{p\Delta t} = 5,09 \cdot 10^{-3} - (-0,3 \cdot 10^{-3}) = 5,39 \cdot 10^{-3}$$

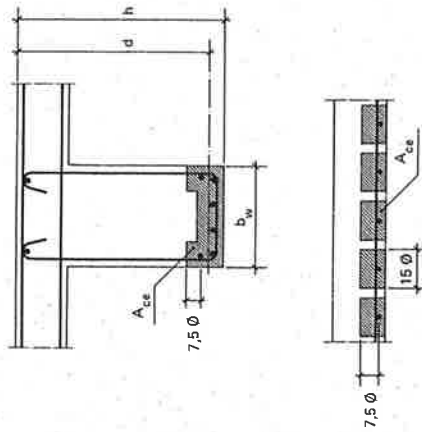
$$\sigma_p = E_p \epsilon_{p\sigma} = 190000 \cdot 5,39 \cdot 10^{-3} = 1024 \text{ MPa}$$

Havaitaan, että virumisen, kutistumisen, relaxaation ja lämpötilan muutoksen johdosta jänneteräksen vetojännitys on vähentynyt arvosta 1178 MPa arvoon 1024 MPa. Häviö on 13,1%!

Tämä esimerkki osoittaa, että jännittämättömien betoniterästen läs-

Koetulokset kuitenkin osoittavat, että näin ei ole asia, vaan betoniin jää raudoituksen läheisyyteen vetojännityksiä, joilla on selvä vaikutus osittain jännitettyjen rakenteiden vasteeseen. Lähteessä [1] on havainnollinen ja selkeä esitys näiden vetojännitysten synty-mekanismista. Tässä tyydyimme esittämään pääpiirtein kaavat joita voidaan käyttää käytännön laskelmissa.

Vecchio ja Collins ovat esittäneet kokemusperäisen kaavan betonin keskimääräisen vetojännityksen σ_c ja keskimääräisen venymän $\epsilon_{c\sigma}$ yhteydelle. Kaavaa voidaan käyttää poikkileikkauksen raudoituksen vaikutusalueella A_{ce} . Poikkileikkauksen raudoituksen vaikutusalueeseen lasketaan se poikkileikkauksen vetovähykkeen alue, jota rajoittavat matkan $7,5\phi$ päässä yksittäisen tangon tai jänteen keskipisteestä sijaitsevat suorat. Kuva 4.10 (betoninormit) havainnollistaa poikkileikkauksen raudoituksen vaikutusalueen pinta-alan A_{ce} määrittämistä.



Kuva 4.10: Poikkileikkauksen raudoituksen vaikutusalueen pinta-ala.

Jos siis betonin vetojännityksestä aiheutuva venymä $\epsilon_{c\sigma}$ ylittää halkeiluvenymän ϵ_{cr} , voidaan raudoituksen vaikutusalueella A_{ce} käyttää Vecchion ja Collinsin esittämää betonin keskimääräisen vetojännityksen ja venymän välistä yhteyttä

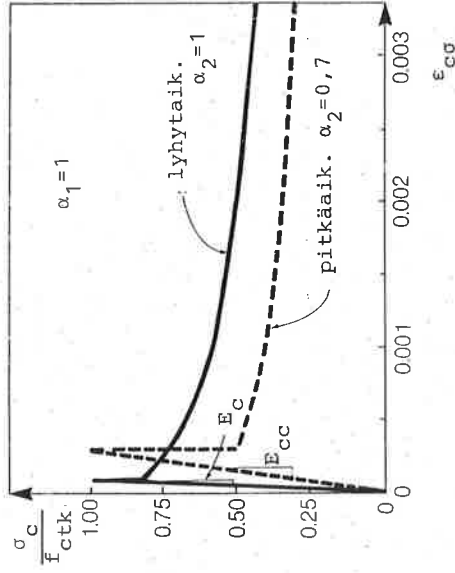
$$\sigma_c = \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctk}}{1 + \sqrt{500\epsilon_{c\sigma}}} \quad (4.30)$$

Betonin vetovähykkeen osassa, joka on raudoituksen vaikutusalueen ulkopuolella, betonin vetojännitykselle käytetään arvoa $\sigma_c = 0$. Kerroin α_1 on tekijä, joka ottaa huomioon raudoituksen tartuntaominaisuudet:

- $\alpha_1 = 1,0$ kuviopintaiset ja harjatangot
- $\alpha_1 = 0,7$ sileät tangot, langat ja tartunnalliset punokset
- $\alpha_1 = 0$ tartunnattomat jänteet

Kerroin α_2 ottaa huomioon kuormituksen luonteen:

- $\alpha_2 = 1,0$ lyhytaikainen muuttumaton kuormitus
- $\alpha_2 = 0,7$ pitkäaikaiskuorma ja/tai toistuva kuorma



Kuva 4.11: Vedetyn betonin keskimääräisen jännityksen ja keskimääräisen venymän riippuvuus.

Kuva 4.11 havainnollistaa esitettyä betonin keskimääräisen jännityksen ja keskimääräisen venymän riippuvuutta vedetyssä betonissa.

4.10 Halkeaman leveys ja halkeilyväli

Halkeaman ominaisleveys voidaan laskea kaavalla

$$w_k = \epsilon_{c\sigma} S_r \quad (4.31)$$

missä $\epsilon_{c\sigma}$ on betonin keskimääräinen, jännityksestä aiheutuva venymä

teräsen pintakeskiön kohdalla ja s_r on halkeiluväli. Halkeiluväli laskeaan kaavalla

$$s_r = 3,5c + k_w \frac{\phi}{\rho_r} \quad (4.32)$$

missä c on pääraudoituksen betonipeitteen paksuus tai vutussuunnassa, ϕ on keskimääräinen tangon tai jänteen halkaisija ja

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{ce}} \quad (4.33)$$

Raudoituspinta-alalla A_s ymmärretään tässä betoniterästen tai/ja jännerästen pinta-alaa. Ankkurijänteitä ei kuitenkaan yleensä oteta huomioon alaa A_s laskettaessa. Kerroin k_w huomioi raudoituksen tartuntaominaisuudet:

$$k_w = 0,085 \text{ (A400H, A400HW, A500H, A500HW, A600H, B500K)}$$

$$k_w = 0,13 \text{ (punos tai vastaava)}$$

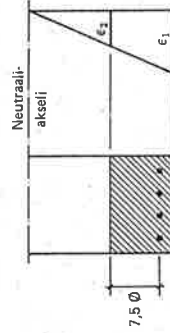
$$k_w = 0,14 \text{ (kuvioipintainen tanko)}$$

$$k_w = 0,17 \text{ (sileäpintainen tanko)}.$$

Jos rakenteeseen vaikuttaa vetävä normaaliavoima, korotetaan kerrointa k_w kertoimella

$$\alpha = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1}$$

missä ϵ_1 ja ϵ_2 ovat venymät pinta-alan A_{ce} reunoilla (katso kuvaa 4.12).



Kuva 4.12: Venymät ϵ_1 ja ϵ_2 raudoituksen vaikutusalueen reunoilla.

Vaatimukset halkeaman ominaisluvella on esitetty taulukossa 4.3, joka on kopio betoninormien taulukosta 2.16.

4.11 Esimerkki halkeamaleveyden määrittämisestä

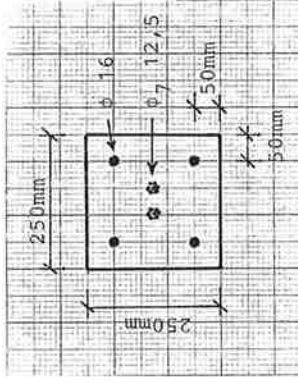
Määritetään halkeaman ominaisluvuus sauvalle C, kun sitä kuormittaa lyhytaikainen aksiaalinen vetovoima, joka on suuruudeltaan 430kN.

Taulukko 4.3: Vaatimukset halkeaman ominaisluvella.

Taulukko 2.16 Vaatimukset rakenteen tiivyyden ja halkeilun suhteen eri ympäristöolosuhteissa. a-kohta tarkoittaa vaatimusta pitkäaikaiskuormilla ja b-kohta lyhytaikaiskuormilla. Jännittämissivahkeen vaatimuksena pidetään b-kohtaa paitsi ympäristöluokassa Y1, jossa vaatimuksena on halkeaman muodostumisrajatila. Jos betonipeitteen paksuus on suurempi kuin taulukossa 4.2 mukainen vaatimus (c_{min}), saa valita halkaimaleveyden kertoa luvulla $\frac{c}{c_{min}} \leq 1,5$.

Ympäristöluokka ¹⁾	Korroosioherkkä raudoitus ²⁾	Muu raudoitus
Y1	Vaikeat olosuhteet a) ja b) Vetojännitysrajatila	a) $w_k \leq 0,1$ mm b) $w_k \leq 0,2$ mm
Y2	Tavalliset olosuhteet a) Vetojännitysrajatila	a) $w_k \leq 0,2$ mm b) $w_k \leq 0,3$ mm
Y3	Heipot olosuhteet a) $w_k \leq 0,2$ mm b) $w_k \leq 0,3$ mm	-

¹⁾ Ympäristöolosuhteet on määritelty kohdassa 4.1.1.2.
²⁾ Korroosioherkkä raudoitus on määritelty kohdassa 4.1.2.1.



Kuva 4.13: Sauvan C poikkipinnan yksityiskohtia.

Sauvan C poikkipinnan yksityiskohdat on esitetty kuvassa 4.13.

Määritetään aluksi kuormaa $N=430$ kN vastaava betonin keskimääräinen venymä ϵ_c . Käytetään taas yrityksen ja erehdyksen menetelmää.

(a) Valitaan venymä:

$$\epsilon_c = 10^{-3}$$

(b) Määritetään betonin keskimääräinen jännitys:

Betonin jännityksestä aiheutuva venymä on

$$\epsilon_{c\sigma} = \epsilon_c = 10^{-3}$$

Betonin halkeiluvuonema on

$$\epsilon_{cr} = \frac{f_{ctk}}{E_{ct}} = \frac{2,7}{35000} = 7,7 \cdot 10^{-5}$$

Koska $\epsilon_{cr} > \epsilon_{cr}$, betoni on halkeillut. Kerroin α_1 määritetään teräsaloilla painotettuna keskiarvona

$$\alpha_1 = \frac{800 \cdot 1,0 + 200 \cdot 0,7}{800 + 200} = 0,94$$

ja kerroin $\alpha_2 = 1$. Nyt saadaan

$$\sigma_c = \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctk}}{1 + \sqrt{\frac{500 \epsilon_{cr}}{500 \cdot 10^{-3}}}} = \frac{0,94 \cdot 1 \cdot 2,7}{1 + \sqrt{\frac{500 \cdot 7,7 \cdot 10^{-5}}{500 \cdot 10^{-3}}}} = 1,49 \text{MPa}$$

(c) Määritetään betoniterästen jännitys:

$$\epsilon_{ss} = \epsilon_c = 10^{-3}$$

$$\sigma_s = E_s \epsilon_{ss} = 200000 \cdot 10^{-3} = 200 \text{MPa}$$

(d) Määritetään jätteiden jännitys:

$$\epsilon_{ps} = \epsilon_c + \Delta \epsilon_p = 7 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_{ps} = E_s \epsilon_{ps} = 200000 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = 1400 \text{MPa}$$

(e) Määritetään normaaliavoima:

$$N = A_c \sigma_c + A_s \sigma_s + A_p \sigma_{ps} = 61,5 \cdot 10^3 \cdot 1,49 + 0,8 \cdot 10^3 \cdot 200 + 0,2 \cdot 10^3 \cdot 1400 = 531,6$$

Täten, kun betonin venymä on $\epsilon_c = 10^{-3}$, saavaa kuormittaa voima $N = 531,6 \text{kN}$. Tämä on suurempi kuin 430kN , joten otetaan uudeksi betonin venymäksi pienempi arvo $\epsilon_c = 0,5 \cdot 10^{-3}$ ja määritetään voimalle N uusia arvo. Näin jatketaan, kunnes on saatu voiman N suuruudeksi riittäväällä tarkkuudella 430kN . Taulukossa 4.4 on esitetty yhteenveto laskelmasta. Lopputulos on $\epsilon_c = 0,41 \cdot 10^{-3}$.

Betonipeitteen paksuus (katso kuvaa 4.13) on

$$c = 50 - 16/2 = 42 \text{mm}$$

Kerroin k_w lasketaan teräspinta-aloilla painotettuna keskiarvona

$$k_w = \frac{800 \cdot 0,085 + 200 \cdot 0,13}{800 + 200} = 0,094$$

Koska saavaa kuormittaa vetävä normaaliavoima, kerrointa k_w korjataan

Taulukko 4.4: Halkeilleen vetosauvan kuormaa $N = 430 \text{kN}$ vastaavaan beto-
nin keskimääräisen venymän ϵ_c määrittäminen.

$\epsilon_c \cdot 10^3$	σ_c	σ_s	σ_p	N
1,0	1,49	200	1400	531,6
0,5	1,69	100	1300	443,9
0,4	1,75	80	1280	427,6
0,41	1,75	82	1282	429,6
0,414	1,74	83	1283	430,0

korjauskertoimella

$$\alpha = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{2 \epsilon_c}{\epsilon_c} = 2$$

Kertoimen k_w lopullinen arvo on siis

$$k_w = 2 \cdot 0,094 = 0,188$$

Keskimääräinen terästen halkaisija on

$$\phi = \frac{4 \cdot 16 + 2 \cdot 12,5}{4 + 2} = 14,8$$

Koska $7,5 \cdot 16 \text{mm} = 120 \text{mm}$ ja $7,5 \cdot 13,5 \text{mm} = 101 \text{mm}$, nähdään kuvan 4.13 perusteella, että raudoituksen vaikutusalueeksi tulee koko betonipinta, ts. $A_{ce} = A_c = 61500 \text{mm}^2$. Näin

$$\rho_r = \frac{800 + 200}{61500} = 0,0163$$

Halkeiluväliksi ja halkeaman ominaisleveydeksi saadaan lopulta

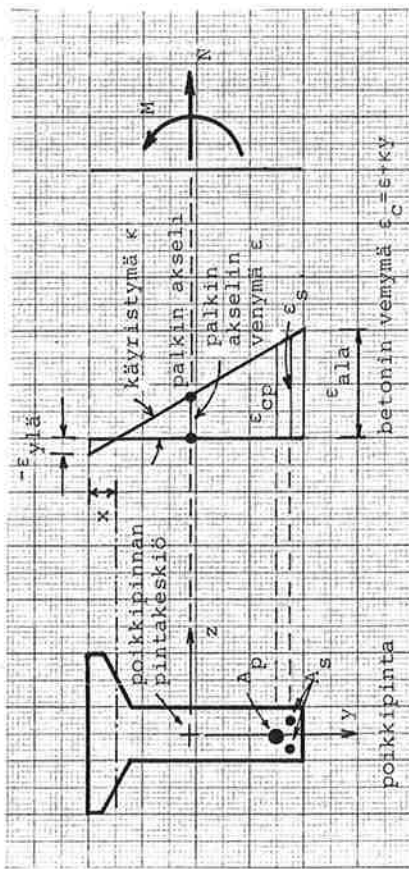
$$s_r = 3,5c + k_w \frac{\phi}{\rho_r} = 3,5 \cdot 42 + 0,188 \cdot \frac{14,8}{0,0163} = 318 \text{mm}$$

$$w_k = \epsilon_{cs} = 0,41 \cdot 10^{-3} \cdot 318 \text{mm} = 0,13 \text{mm}$$

5. TAIVUTUKSEN ALAISTEN RAKENTEIDEN TOIMINTA

5.1 Johdanto

Koska taivutetut rakenteet, kuten palkit ja laatat, ovat laajimmin käytettyjä jännitettyjä rakenteita, on asiallista tutkia niiden vastetta jonkin verran. Vaikka taivutettujen rakenteiden aksiaalinen kuormitus on tyyppillisesti nolla, on tarkoituksenmukaista lähteä kehittämiin laskentamenetelmiä, jotka soveltuvat myös yleisempään taivutukseen, nimittäin aksiaalaisesti rasitettuun ja taivutettuun rakenteeseen.

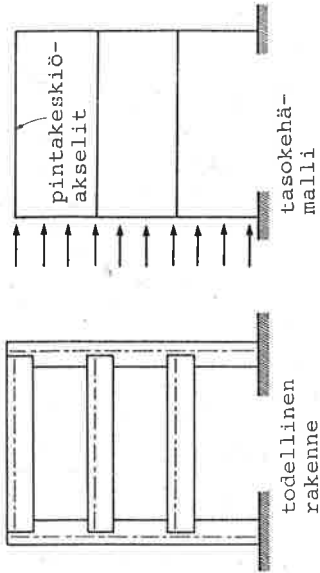


Kuva 5.1: Normaaliavoiman ja taivutusmomentin rasittama jännepalkin poikkileikkaus.

Kuva 5.1 esittää tyyppillistä poikkileikkausta, jota tutkimme tässä kappaleessa. Otaksutaan, että poikkileikkaus on symmetrinen pystyakselin (y-akseli) suhteen ja sisältää sekä jännitetyn (ala A_p), että jännittämättömän (ala A_s) raudoituksen. Otaksutaan, että betoni saa venymä ainoastaan aksiaaliossa suunnassa ja nämä venymät ovat tasan jakautuneita poikkileikkauksen leveyssuunnassa, mutta jakautuvat lineaarisesti palkin korkeussuunnassa.

Jännitysresultantit M ja N määritetään rakenteiden analyysin menetelmin. Todellinen rakenne idealisoidaan viivamallilla (katso kuva 5.2), jossa kukin sauva esitetään viivalla. On tärkeää huomata, että jännitysresultanttien M ja N arvot riippuvat sauvaa kuvaamaan valitun viivan asemasta. Koska raudoituksityiskohdat eivät useimmiten

ole tiedossa analyysiä tehtäessä, käytetään tyyppillisesti kokonaispoikkileikkauksen (koko poikkipinnan reunaviivojen rajaavan pinnan) pintakeskiäkselle rakennetta esittävinä viivoina.



Kuva 5.2: Kehärakenne ja sen viivamalli jännitysresultanttien määrittämiseksi

5.2 Yhteensopivuusyhtälöt

Betonin venymäjakautuma (katso kuvaa 5.1) voidaan esittää käyttäen kahta parametria. Voidaan käyttää joko ylä- ja alareunan venymä $\epsilon_{ylä}$ ja ϵ_{ala} , tai pintakeskiäkselin venymää ϵ ja käyristymää κ . Käyristymä κ on toisaalta palkin kiertymän muutos pituusyksikköä kohti palkin pituussuunnassa miinusmerkkinen (ts. $\kappa = -d\phi/dx$) ja toisaalta venymäkuvion kaltevuus poikkileikkauksen korkeussuunnassa.

Täten betonin venymä halutulla korkeudella y saadaan kaavasta

$$\epsilon_c = \epsilon + \kappa y. \quad (5.1)$$

Betoniterästen venymä korkeudella y on sama kuin ympäröivän betonin venymä, ts.

$$\epsilon_s = \epsilon + \kappa y. \quad (5.2)$$

Jänneterästen venymä korkeudella y on ympäröivän betonin venymä, jolle käytetään usein merkintää ϵ_{cp} , plus jännittämisessä syntynyt venymäero $\Delta\epsilon_p$, ts.

$$\epsilon_p = \epsilon_{cp} + \Delta\epsilon_p = \epsilon + \kappa y + \Delta\epsilon_p. \quad (5.3)$$

Ylläolevissa kaavoissa vetäviä venymä pidetään positiivisinä ja puristavia venymä negatiivisinä. Edelleen on valittu käytäntö, jossa positiivinen käyristymä aiheuttaa algebrallisesti suuremman venymän alapintaan kuin yläpintaan.

5.3 Jännitysresultanttien määrittelykaavat

Normaalivoima N on poikkileikkauksen normaali-jännitysten resultantti ja taivutusmomentti M on niiden momentti pintakeskiön kautta kulkevan vaakakselin (z -akseli) suhteen. Niiden lausekkeet ovat täten

$$N = \int_{A_C} \sigma_C dA + \int_{A_S} \sigma_S dA + \int_{A_P} \sigma_P dA \quad (5.4)$$

ja

$$M = \int_{A_C} \sigma_C y dA + \int_{A_S} \sigma_S y dA + \int_{A_P} \sigma_P y dA \quad (5.5)$$

Näissä lausekkeissa vetojännitykset on otettu positiivisiksi ja puristusjännitykset negatiivisiksi. Normaalivoima N on siis vetävä, jos se on positiivinen ja puristava, jos se on negatiivinen. Taivutusmomentti on positiivinen, jos se aiheuttaa vetojännityksiä poikkileikkauksen alareunaan.

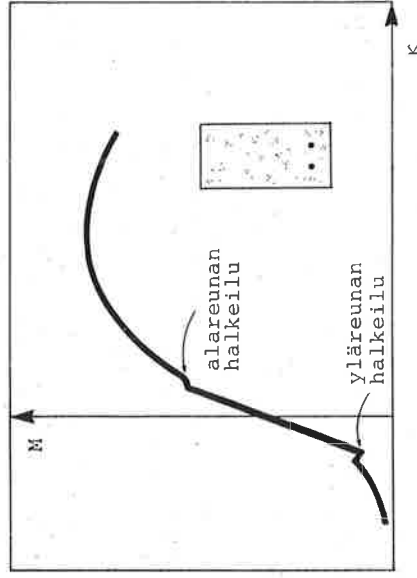
5.4 Taivutettujen rakenteiden vasteen määrittäminen

Taivutettujen poikkileikkausten vaste voidaan määrittää käyttämällä ylläesitettyjä yhteensopivuusyhtälöitä (5.1)-(5.3), jännitysresultanttien määrittelykaavoja (5.4) ja (5.5) sekä luvuissa 3 ja 4 esitettyjä eri materiaalien jännitys-muodonmuutos yhteyksiä.

Kuten todettiin, betonin venymäjakautuma on poikkileikkauksen korkeussuunnassa lineaarinen ja määrätty kahden parametrin, esimerkiksi ylä- ja alareunan venymien, avulla. Kun betonin venymäjakautuma tunnetaan, saadaan yhteensopivuusyhtälöiden (5.2) ja (5.3) perusteella myös betoni- ja jänneterästen kokonaisvenymät määritettyä. Jännityksistä aiheutuvat venymät saadaan sitten helposti määritettyä kokonaisvenymien lausekkeita (4.8)-(4.10) käyttäen. Jännitykset poikkipinnan eri osamateriaaleissa saadaan tämän jälkeen jännitys-muodonmuutosyhteyksiä käyttäen. Jännitysresultantit saadaan lopuksi määrittelykaavojensa (5.4) ja (5.5) avulla. Täten, jos tunnettu ylä- ja alareunan venymät, voimme laskea normaalivoiman ja taivutusmomentin, jotka aiheuttavat nämä venymät.

Tutkittaessa palkkien puhdasta taivutusta (ts. normaalivoima on nolla) on tarkoituksenmukaista määrittää poikkileikkauksen momentti-

käyritymä riippuvuus. Käyttökelpoinen tapa edetä on valita arvo poikkipinnan yläreunan venymälle ja määrittää sitten yriityksen ja erehdyksen menetelmällä vastaava poikkileikkauksen alareunan venymä siten, että normaalivoima tulee nolllaksi. Tätä venymäjakautumaa vastaava käyritymä ja taivutusmomentti voidaan sitten määrittää. Jos tällainen laskelma toistetaan eri yläpinnan venymän arvoja käyttäen, poikkileikkauksen koko momentti-käyritymä riippuvuus saadaan määritetyksi. Kuva 5.3 esittää tyyppillistä jännitetyn palkin poikkileikkauksen momentti-käyritymä riippuvuutta.

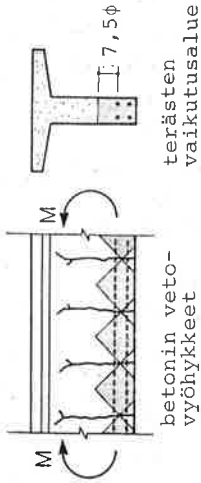


Kuva 5.3: Jännepalkin poikkileikkauksen momentti-käyritymä riippuvuus.

5.5 Vetojännitykset betonissa

Ennen halkeilua betoni vastustaa vetojännityksiä. Kun halkeamat ovat muodostuneet tilanne tulee monimutkaisemmaksi. Halkeamissa ei ole vetojännityksiä, mutta halkeamien väliseen betoniin syntyy vetojännityksiä (katso kuvaa 5.4) tartunnallisen raudoituksen vaikutuksesta.

Vetojännitysten läsnäolo halkeamien välisessä betonissa jäykistä palkkia. Tämän "vetojäykistymisen" huomioiniseksi voimme käyttää Vecchion ja Collinsin esittämää betonin keskimääräisen vetojännityksen ja keskimääräisen venymän yhteyttä (4.29) betonin keskimääräisen vetojännityksen arvioimiseksi halkeamien muodostumisen jälkeen.



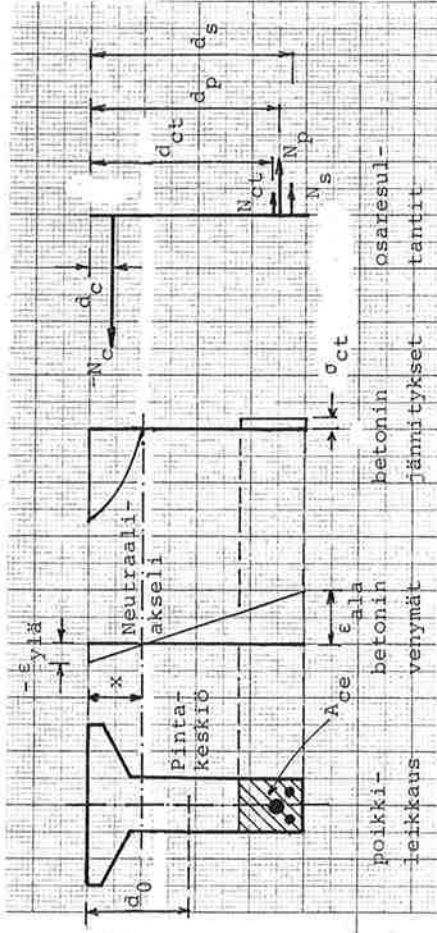
Kuva 5.4: Vetojännitykset halkeilleessa betonissa.

Betonin vetojännitykset halkeamien välillä keskittyvät teräksiä ympäröivään ns. terästen vaikutusalueeseen (katso kohta 4.9). Täten betonin vetojännitykset terästen vaikutusalueen ulkopuolella jätetään huomioimattomatta.

Suurta virhettä ei tehdä (vrt. kuva 4.11), jos betonin pieniä vetojännityksiä approksimoidaan koko terästen vaikutusalueella vakioarvolla

$$\sigma_{ct} = 0,5\alpha_1\alpha_2 f_{ctk}' \quad (5.6)$$

missä kertoimet α_1 ja α_2 ovat kohdan 4.9 mukaiset.



Kuva 5.5: Betonin puristus- ja veto puolen, jänneterästen sekä betoniterästen osaresultantit.

5.6 Jännityseresultanttien määrittäminen - ohutkerrosmalli

Kuva 5.5 kuvaa betonin puristus- ja veto puolen, jänneterästen sekä betoniterästen osaresultantteja N_c , N_{ct} , N_p ja N_s ja niiden muodos-

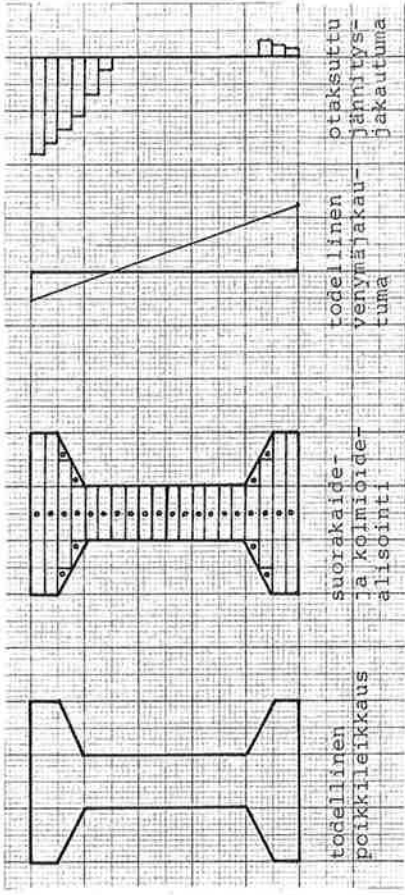
tumista yksinkertaisessa tapauksessa. Niiden avulla normaaliavoima ja taivutusmomentti saadaan kaavoista

$$N = N_c + N_{ct} + N_p + N_s, \quad (5.7)$$

ja

$$M = N_c(d_c - d_0) + N_{ct}(d_{ct} - d_0) + N_p(d_p - d_0) + N_s(d_s - d_0). \quad (5.8)$$

Betonin osaresultantin N_c ja vaikutuspisteen aseman d_c määrittäminen on jo kuvan 5.5 tapauksessa vaikea tehtävä. Tämän vuoksi betonipoikkileikkauksen puristuspuoli tai koko betonipoikkileikkaus voidaan korvata ohutkerrosmallilla, joka muodostuu ohuista suorakaiteista ja haluttaessa niitä täydentävistä kolmioista (katso kuvaa 5.6). Mallin kussakin osapinnassa jännityksen otaksutaan olevan vakion ja se määritetään pinnan pintakeskiön kohdalla määritetyn betonin venymän avulla betonin jännitys-muodonmuutos riippuvuutta käyttäen.



Kuva 5.6: Betonipoikkileikkauksen ohutkerrosmalli.

Näin kerrosta i vastaava osaresultantti on

$$N_{ci} = \sigma_{ci} A_{ci} \quad (5.9)$$

ja sen vaikutuspisteen otaksutaan olevan ko. pinnan pintakeskiössä. Menettely yksinkertaistaa laskelmia huomattavasti, mutta se on likimääräinen. Virhe pienenee kuitenkin nopeasti kerros määrää lisääntäessä.

Usein käytännön rakenteissa on useita jännteitä tai jänneryhmiä, jotka joudutaan käsittelemään erillisinä (esim. sijaitsevat eri korkeuksilla tai jännteillä on erisuuret venymäerot $\Delta \epsilon_p$) ja useita beto-

niteräksiä tai teräsryhmiä (esim. veto- ja puristuspuolen terästys).

Kaavojen (5.7) ja (5.8) vastineet, kun betonin puristuspuolella ja betonin vetopuolella terästen vaikutusalueella käytetään ohutkerros-mallia ja poikkileikkauksessa on useita jänne- ja betoniteräsryhmiä, olisivat muotoa

$$N = \sum N_{ci} + \sum N_{cti} + \sum N_{pi} + \sum N_{si}' \quad (5.10)$$

ja

$$M = \sum N_{ci}(d_{ci} - d_0) + \sum N_{cti}(d_{cti} - d_0) + \sum N_{pi}(d_{pi} - d_0) + \sum N_{si}(d_{si} - d_0) \quad (5.11)$$

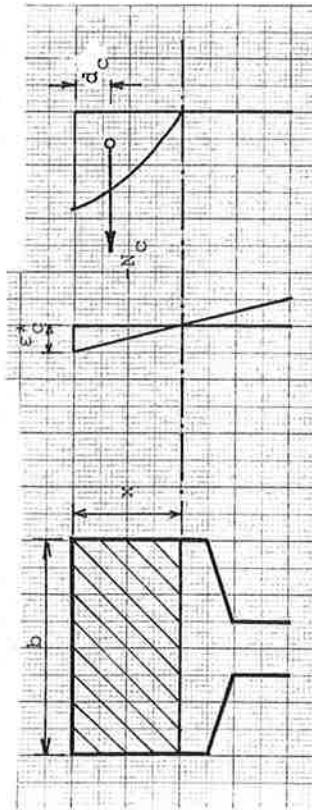
5.7 Momentti-käyritymä yhteys suorakaidepoikkipinnalle

Kuvassa 5.7 on esitetty poikkipinta, jonka suorakaiteen muotoisessa puristusalueessa ($\epsilon_c \leq 0$) vaikuttaa kaavan

$$\sigma_c = -f_{ck} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{-\epsilon_{cy}} \right)^2 \right] \quad (5.12)$$

mukainen paraabelin muotoinen betonin jännitysjakautuma. Sen resultantti N_c ja tämän vaikutuspisteen etäisyys d_c poikkileikkauksen yläreunasta voidaan helposti määrittää. Niille saadaan tulokset

$$\begin{aligned} N_c &= -k_1 f_{ck} b x, \\ d_c &= k_2 x. \end{aligned} \quad (5.13)$$



Kuva 5.7: Betonin puristusjännitysten resultantti ja sen asema poikkipinnalla, jonka puristusalue on suorakaiteen muotoinen.

Kertoimet k_1 ja k_2 riippuvat reunan venymästä ϵ_c^* (≤ 0) ja voidaan

määrittää kaavoilla

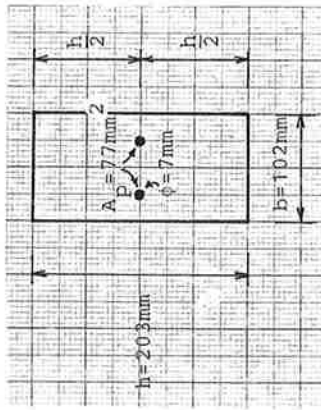
$$k_1 = \frac{\epsilon_c^*}{-\epsilon_{cy}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\epsilon_c^*}{-\epsilon_{cy}} \right)^2, \quad k_2 = \frac{4 - \frac{\epsilon_c^*}{-\epsilon_{cy}}}{12 - 4 \frac{\epsilon_c^*}{-\epsilon_{cy}}} \quad (5.14)$$

Taulukossa 5.1 on esitetty kertoimien k_1 ja k_2 arvoja.

Taulukko 5.1: Betonin puristusjännitysten resultantin määrittämiseen tarvittavat kertoimet k_1 ja k_2 palkin poikkipinnan suorakaiteen muotoisessa puristusalueessa.

$\frac{\epsilon_c^*}{-\epsilon_{cy}}$	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
k_1	0,229	0,417	0,563	0,667	0,729	0,75	0,729	0,667
k_2	0,341	0,35	0,361	0,375	0,393	0,417	0,45	0,5

Kaavoja (5.13) voidaan käyttää helpottamaan momentti-käyritymä riippuvuuden määrittämistä suorakaidepoikkipinnalle. Niitä voidaan myös soveltaa T- ja I-poikkipinnoille, joissa on suorakaiteen muotoiset laipat.



Kuva 5.8: Esimerkki poikkileikkaukselle.

5.8 Esimerkki momentti-käyritymä riippuvuuden määrittämisestä suorakaidepoikkipinnalle

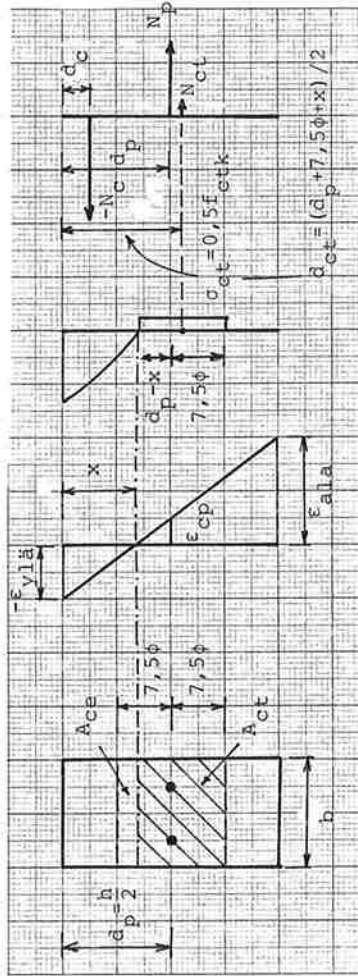
Lasketaan ja piirretään momentti-käyritymä riippuvuus esijännitettylle palkille, jonka poikkileikkaus on kuvan 5.8 mukainen. Tällaisen palkin ovat tutkineet kokeellisesti Priestley, Park ja Lo nimiset tutkijat ja se tehtiin betonista, jolla on seuraavat materiaaliominaisuudet: $f_{ck} = 44,9 \text{ MPa}$, $\epsilon_{cy} = 0,0025$ ja $f_{ctk} = 2,9 \text{ MPa}$. Palkki jänni-

tettiin käyttäen kahta 7mm:n lankaa, joiden kokonaispinta-ala oli 77mm². Jänteiden jännitys-muodonmuutuskäyrä oli sen muotoinen, että sitä voidaan hyvällä tarkkuudella approksimoida Ramberg-Osgood funktiolla

$$\sigma_p = 200 \cdot 10^3 \epsilon_{po} \left\{ 0,032 + \frac{0,968}{[1+(135\epsilon_{po})^{6,1/6}]} \right\}$$

Jänne jännitettiin siten, että venymäeroiksi tuli $\Delta\epsilon_p = 4,24 \cdot 10^{-3}$.

Koko momentti-käyritymä riippuvuuden määrittämiseksi lasimme käyristymät ja momentit, jotka vastaavat useita yläreunan venymän ϵ_{yla} arvoja. Menetellään siten, että valitaan yläreunan venymän arvo ϵ_{yla} (≈ 0) ja määritetään kokeilemalla alareunan venymälle ϵ_{ala} sellainen arvo, että normaaliavoima N häviää (puhdas taivutus).



Kuva 5.9: Poikkipintaan vaikuttavien voimien laskeminen.

Esimerkiksi arvoa $\epsilon_{yla} = -0,001$ vastaava laskelma on seuraava:

Askel 1: Määritetään kertoimet k_1 ja k_2 .

$$k_1 = \frac{\epsilon_{yla}}{-\epsilon_{cy}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\epsilon_{yla}}{-\epsilon_{cy}} \right)^2 = \frac{1}{2,5} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2,5} \right)^2 = 0,347$$

$$k_2 = \frac{4 - \frac{\epsilon_{yla}}{-\epsilon_{cy}}}{12 - 4 \frac{\epsilon_{yla}}{-\epsilon_{cy}}} = \frac{4 - (1/2,5)}{12 - 4(1/2,5)} = 0,346$$

Askel 2: Määritetään ϵ_{ala} siten, että $N=0$.

Arvataan, että $\epsilon_{ala} = 0,002$. Neutraaliakselin etäisyydelle yläreunasta saadaan

$$x = \frac{-\epsilon_{yla}}{\epsilon_{ala} - \epsilon_{yla}} h = \frac{0,001}{0,002 + 0,001} 203 = 67,7 \text{ mm}$$

Betonin venymä jänteen kohdalla on

$$\epsilon_{cp} = -\frac{d-x}{x} \epsilon_{yla} = -\frac{101,5 - 67,7}{67,7} 0,001 = -0,499 \cdot 10^{-3}$$

Jänneteräksen venymä on

$$\epsilon_p = \epsilon_{cp} + \Delta\epsilon_p = 0,499 \cdot 10^{-3} + 4,24 \cdot 10^{-3} = 4,74 \cdot 10^{-3} = \epsilon_{po}$$

Jänteen jännitys on

$$\sigma_p = 200 \cdot 10^3 \cdot 4,74 \cdot 10^{-3} \left\{ 0,032 + \frac{0,968}{[1+(135 \cdot 4,74 \cdot 10^{-3})^{6,1/6}]} \right\} = 937,9 \text{ MPa}$$

Betonin puristusjännitysresultantti on

$$N_c = -k_1 f_{ctk} b x = -0,347 \cdot 44,9 \cdot 102 \cdot 67,7 = -107,6 \text{ kN}$$

Jänteen voima on

$$N_p = \sigma_p A_p = 937,9 \cdot 77 = 72,2 \text{ kN}$$

Betonin vetojännitys on

$$\sigma_{ct} = 0,5 \cdot f_{ctk} = 0,5 \cdot 2,9 = 1,45 \text{ MPa}$$

Betonin vetojännitysten vaikutusalueen (katso kuvaa 5.9) alaksi saadaan

$$A_{ct} = b \cdot (d_p - x + 7,5\phi) = 102 (101,5 - 67,7 + 7,5 \cdot 7) = 8,80 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

ja betonin vetojännitysresultantti on

$$N_{ct} = \sigma_{ct} A_{ct} = 1,45 \cdot 8,80 \cdot 10^3 = 12,8 \text{ kN}$$

Normaaliavoimaksi tulee lopulta

$$N = N_c + N_p + N_{ct} = -107,6 + 72,2 + 12,8 = -22,6 \text{ kN}$$

Koska normaaliavoiman pitäisi saada arvo nollla, alareunan venymä tulisi valita jonkin verran suuremmaksi kuin 0,002. Taulukossa 5.2 on laskettu eri alareunan venymän ϵ_{ala} arvoja vastaavia normaaliavoiman arvoja. Siitä nähdään, että oikea arvo on $\epsilon_{ala} = 0,00256$.

Taulukko 5.2: Venymän ϵ_{ala} määrittäminen venymälle $\epsilon_{yla} = -0,001$.

$\epsilon_{ala} \cdot 10^3$	2,0	2,5	2,6	2,56
N, kN	-22,6	-2,1	1,4	-0,0

Yrityksen erehdyksen menettely venymän ϵ_{ala} määrittämiseksi voidaan

suorittaa ohjelmoitavalla taskulaskimella.

Askel 3: Määritetään betonin venymäjakautumaa vastaava käyritymä ja taivutusmomentti. Taulukon 5.2 viimeistä saraketta vastaava laskelma antoi neutraaliakselin asemalle

$$x = 57,0 \text{ mm},$$

betonin puristusjännitysresultantille

$$N_c = -90,5 \text{ kN}$$

ja betonin vetojännitysresultantille

$$N_{ct} = 14,3 \text{ kN}.$$

Käyritysmälle saadaan kuvan 5.11 avulla

$$\kappa = \frac{\epsilon_{\text{ala}} - \epsilon_{\text{ylä}}}{h} = \frac{0,00256 + 0,001}{2,03} = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

Betonin puristusjännitysresultantin etäisyydelle yläreunasta saadaan

$$d_c = \kappa_2 \cdot x = 0,346 \cdot 57,0 = 19,7 \text{ mm}$$

Betonin vetojännitysresultantin etäisyydelle yläreunasta saadaan

$$d_{ct} = (d_c - d_p + x) / 2 = (101,5 + 7,5 + 57,0) / 2 = 105,5 \text{ mm}$$

Taivutusmomentille saadaan

$$M = N_c (d_c - d_p) + N_{ct} (d_{ct} - d_p) = -90,5 \cdot (19,7 - 101,5) + 14,3 \cdot (105,5 - 101,5) = 7,44 \text{ kNm}$$

Taulukko 5.3: Betonin vetojännitykset huomioiden laskettu momentti-käyritymäriippuvuus.

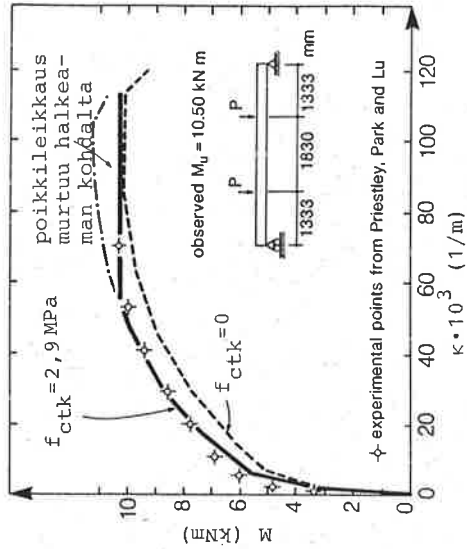
$\epsilon_{\text{ylä}} \cdot 10^3$	$\epsilon_{\text{ala}} \cdot 10^3$	$\kappa \cdot 10^3$ [1/m]	M [kNm]
-0,25	0,096	1,70	3,44
-0,50	0,646	5,64	5,60
-1,0	2,56	17,5	7,44
-1,5	4,94	31,7	8,81
-2,0	7,53	46,9	9,84
-2,5	10,22	62,7	10,54
-3,0	12,92	78,4	10,93
-4,0	17,41	105,5	11,06
-5,0	18,85	117,5	10,42

Toistamalla askeleet 1-4 eri venymän $\epsilon_{\text{ylä}}$ arvoilla saadaan taulukon 5.3 tulokset.

Taulukko 5.4: Halkeaman kohdalla olevan poikkileikkauksen momentti-käyritymäriippuvuus.

$\epsilon_{\text{ylä}} \cdot 10^3$	$\epsilon_{\text{ala}} \cdot 10^3$	$\kappa \cdot 10^3$ [1/m]	M [kNm]
-0,25	0,102	1,73	3,38
-0,50	0,793	6,37	5,02
-0,75	1,84	12,8	5,91
-1,25	4,36	27,6	7,39
-1,75	7,14	43,8	8,56
-2,25	10,11	60,9	9,37
-3,25	16,30	96,3	10,03
-3,75	18,95	111,8	10,08
-4,25	20,87	123,7	10,00
-4,75	21,77	130,6	9,76

Jotta voisimme tarkistaa halkeaman kohdalla olevan poikkileikkauksen kantokyvyn, laskeimme uudelleen momentti-käyritymäriippuvuuden jät-



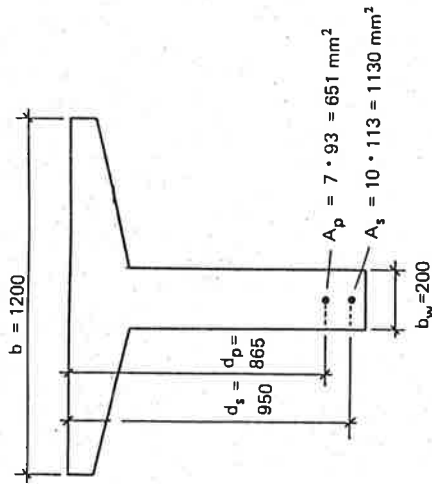
Kuva 5.10: Lasketun ja kokeellisesti määritetyn momentti-käyritymäriippuvuuden vertailu.

tämällä betonin vetojännitykset huomiioon ottamatta. Ilman betonin vetojännityksiä suoritettu laskelma edustaa halkeaman kohdalla olevan poikkipinnan vastetta. Yhteenveto laskelmasta on esitetty taulukossa 5.4, josta voidaan havaita, että poikkileikkauksen murtomomentti on 10,08kNm.

Sauvan laskettu ja kokeellisesti määritetty vaste on esitetty kuvassa 5.10. Vetojännitykset huomioiden laskettu vaste seuraa kokeellisesti määritettyjä arvoja momenttiin 10,08kNm saakka, jossa pisteessä poikkileikkaus laskelman mukaan murtuu. Havaitaan, että lasketut ja kokeellisesti saadut tulokset ovat lähellä toisiaan.

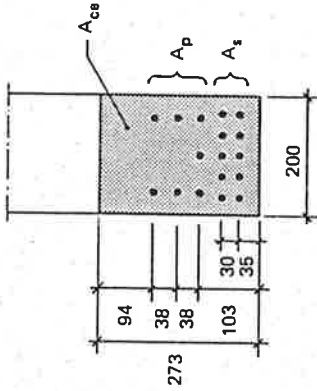
5.9 Esimerkki ohutkerrosmallin käytöstä halkeamaleveyden määrittämissä yhteydessä

Tarkastellaan kaksitukista, osittain jännitettyä palkkia, jonka jännemitta on $L=18\text{m}$. Palkkia kuormittaa oman painon $g_1=8,59\text{kN/m}$ lisäksi muu pysyvä kuorma $g_2=0,6\text{kN/m}$ ja hyötykuorma $q=10\text{kN/m}$. Palkin poikkileikkaus on kuvan 5.11 mukainen ja betonin lujuusluokka on K45. Jän-



Kuva 5.11: Esimerkkipalkin poikkileikkaus.

neteräksinä on 7kpl ϕ_7 12,5 laatu St1600/1800 niiden pintakeskiön ollessa palkin keskellä 130mm:n etäisyydellä alareunasta ja betoniteräksinä on 10 ϕ_{12} (A400H) niiden pintakeskiön ollessa palkin keskellä 50mm:n etäisyydellä alareunasta. Poikkileikkauksen yksityiskohtaisempi raudoitusdetalji on esitetty kuvassa 5.12. Jänneet on jännitetty jännitysalustassa voimalla $P_{alusta}=712,6\text{kN}$. Käytetään be-



Kuva 5.12: Esimerkkipalkin raudoitusdetalji.

tonille puristuspuolella lineaarisesti kimmoista materiaaalilakia, vetopuolella, terästen vaikutusalueella yhtälöä (4.29) noudattavaa materiaaalilakia ja terästen vaikutusalueen ulkopuolella vetoa kestävä mätöntä materiaaalilakia. Lasketaan (a) betonin jännitysjakautuma, betoniterästen jännitys ja jänteen jännitys palkin keskellä, loppu-tilassa, kun virumaluku on $\phi=2$, betonin kutistumisvenymä on $\epsilon_{cs}=-0,4 \cdot 10^{-3}$ ja jänneterästen relaksaatio 3%. Lasketaan vielä (b) betonin jännityksestä aiheutuva (keskimääräinen) venymä palkin keskellä, betoni- ja jänneterästen yhteisen pintakeskiön kohdalla ja tätä hyväksi käyttäen halkeamaleveyden ominaisarvo.

Määritetään taivutusmomentti palkin keskellä:

$$w=g_1+g_2+q=8,59+0,6+10=19,19\text{kN/m},$$

$$M=\frac{wL^2}{8}=\frac{19,18 \cdot 18^2}{8}=777,2\text{kNm}.$$

Määritetään materiaaalivakiot:

$$E_c=5000\sqrt{K}=5000\sqrt{45}=33541\text{MPa},$$

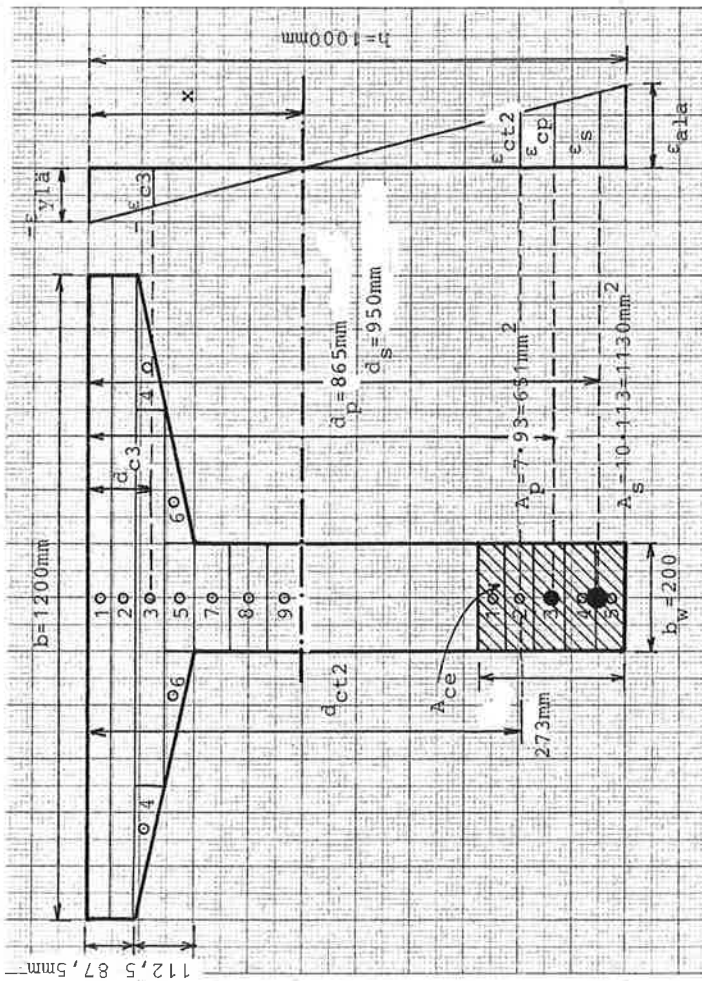
$$E_{cc}=\frac{E_c}{1+\phi}=\frac{33541}{1+2}=11180\text{MPa},$$

$$E_s=200000\text{MPa},$$

$$E_{pr}=0,97E_p=0,97 \cdot 200000=194000\text{MPa},$$

$$f_{ctk} = 0,2 \cdot K^2/3 = 0,2 \cdot 45^2/3 = 2,53 \text{ MPa.}$$

Seuraavassa määritetään kaikki kaavat, joita tarvitaan annettuja ylä- ja alareunan venyvien arvoja vastaavien normaaliavoiman ja taivutusmomentin määrittämiseksi. Käytetään kuvan 5.13 esittämää ohutkerrosmallia sekä betonin puristus-, että vetopuolella.



Kuva 5.13: Esimerkki poikkipinta ja sen betoniosien ohutkerrosmallit.

Neutraaliakselin etäisyys x yläreunasta:

$$x = \frac{-\epsilon_{ylä}}{\epsilon_{ala} - \epsilon_{ylä}} h = \frac{-\epsilon_{ylä}}{\epsilon_{ala} - \epsilon_{ylä}} 1000 \text{ mm}$$

Osapintojen pinta-alat:

$$A_{c1} = A_{c2} = 1200 \cdot 87,5/2 = 52500 \text{ mm}^2,$$

$$A_{c3} = 700 \cdot 112,5/2 = 39375 \text{ mm}^2,$$

$$A_{c4} = A_{c6} = 1/2 \cdot 500 \cdot 112,5/2 = 14062,5 \text{ mm}^2,$$

$$A_{c5} = 200 \cdot 112,5/2 = 11250 \text{ mm}^2,$$

$$A_{c7} = A_{c8} = A_{c9} = 200(x-200)/3 \text{ mm}^2,$$

$$A_p = 651 \text{ mm}^2,$$

$$A_s = 1130 \text{ mm}^2,$$

$$A_{ct1} = A_{ct2} = A_{ct3} = A_{ct4} = A_{ct5} = 200 \cdot 273/5 = 10920 \text{ mm}^2.$$

(Jätetään yksinkertaisuuden vuoksi jänteiden ja betoniterästen pinta-ala näistä vähentämättä, koska betonin vetojännityksen ovat verrattain pieniä.)

Osapintojen pintakeskiöiden etäisyydet yläreunasta:

$$d_{c1} = 1/4 \cdot 87,5 = 21,875 \text{ mm},$$

$$d_{c2} = 3/4 \cdot 87,5 = 65,625 \text{ mm},$$

$$d_{c3} = 87,5 + 1/4 \cdot 112,5 = 115,625 \text{ mm},$$

$$d_{c4} = 87,5 + 1/6 \cdot 112,5 = 106,25 \text{ mm},$$

$$d_{c5} = 87,5 + 3/4 \cdot 112,5 = 171,875 \text{ mm},$$

$$d_{c6} = 87,5 + 173 \cdot 112,5 = 162,5 \text{ mm},$$

$$d_{c7} = 200 \text{ mm} + 1/6(x-200 \text{ mm}),$$

$$d_{c8} = 200 \text{ mm} + 1/2(x-200 \text{ mm}),$$

$$d_{c9} = 200 \text{ mm} + 5/6(x-200 \text{ mm}),$$

$$d_s = 950 \text{ mm},$$

$$d_p = 865 \text{ mm},$$

$$d_{ct1} = 1000 - 9/10 \cdot 273 = 754,3 \text{ mm},$$

$$d_{ct2} = 1000 - 7/10 \cdot 273 = 808,9 \text{ mm},$$

$$d_{ct3} = 1000 - 5/10 \cdot 273 = 863,5 \text{ mm},$$

$$d_{ct4} = 1000 - 3/10 \cdot 273 = 918,1 \text{ mm},$$

$$d_{ct5} = 1000 - 1/10 \cdot 273 = 972,7 \text{ mm}.$$

$$N_{ci} = \sigma_{ci}^A \cdot c_{ci}, \quad i=1, \dots, 9,$$

$$N_p = \sigma_p^A \cdot p_p,$$

$$N_s = \sigma_s^A \cdot s_s,$$

$$N_{cti} = \sigma_{cti}^A \cdot c_{cti}, \quad i=1, \dots, 5.$$

Normaalivoima:

$$N = \sum_{i=1}^9 N_{ci} + N_p + N_s + \sum_{i=1}^5 N_{cti}.$$

Taivutusmomentti (Tapauksessa $N=0$, jolloin se voidaan laskea poikki pinnan yläreunan suhteen):

$$M = \sum_{i=1}^9 N_{ci} d_{ci} + N_p d_p + N_s d_s + \sum_{i=1}^5 N_{cti} d_{cti}.$$

Yllä esitettyjä kaavoja hyväksi käyttäen voidaan määrittää yrityksen ja erehdyksen menetelmällä valittua yläreunan venymää $\epsilon_{ylä}$ vastaava alareunan venymä ϵ_{ala} siten, että normaalivoima N menee nolllaksi. Tämän jälkeen voidaan määrittää vastaava taivutusmomentti M . Taivutusmomenttia $M=777,2 \text{ kNm}$ vastaava arvo $\epsilon_{ylä}$ voidaan nyt määrittää yrityksen ja erehdyksen menetelmällä vaihtelemalla yläreunan venymän $\epsilon_{ylä}$ arvoa ja määrittämällä vastaava taivutusmomentti M . Yhteenvedo laskelmasta on esitetty taulukossa 5.5.

Taulukko 5.5: Taivutusmomenttia $M=777,2 \text{ kNm}$ vastaavan betonin venymä-kuvion määrittäminen.

$\epsilon_{ylä} \cdot 10^3$	$\epsilon_{ala} \cdot 10^3$	M [kNm]
-1,1	1,1759	880,5
-1,0	0,7926	776,9
-1,0003	0,7938	777,2

Lopullisia venymien arvoja $\epsilon_{ylä} = -1,0003 \cdot 10^{-3}$ ja $\epsilon_{ala} = 0,7938 \cdot 10^{-3}$ vastaavaksi neutraaliakselin asemaksi saadaan $x=557,5 \text{ mm}$.

(a) Taivutusmomenttia $M=777,2 \text{ kNm}$ vastaavat betonin, jäniteiden ja be-

Kokonaisvenymät:

$$\epsilon_{ci} = \frac{x-d_{ci}}{x} \epsilon_{ylä}, \quad i=1, \dots, 9,$$

$$\epsilon_s = -\frac{d_s-x}{x} \epsilon_{ylä},$$

$$\epsilon_{cp} = -\frac{d_p-x}{x} \epsilon_{ylä},$$

$$\epsilon_p = \epsilon_{cp} + \Delta \epsilon_p,$$

$$\epsilon_{cti} = -\frac{d_{cti}-x}{x} \epsilon_{ylä}, \quad i=1, \dots, 5.$$

Jännityksestä aiheutuvat venymät:

$$\epsilon_{c_{oi}} = \epsilon_{ci} - \epsilon_{cs}, \quad i=1, \dots, 9,$$

$$\epsilon_{p\sigma} = \epsilon_p,$$

$$\epsilon_{s\sigma} = \epsilon_s,$$

$$\epsilon_{ct\sigma i} = \epsilon_{cti} - \epsilon_{cs}, \quad i=1, \dots, 5.$$

Jännitykset:

$$\sigma_{ci} = 0, \quad \text{jos } \epsilon_{c_{oi}} \geq 0 \quad \left. \begin{array}{l} i=1, \dots, 9, \\ \sigma_{ci} = E_c \epsilon_{c_{oi}}, \quad \text{jos } \epsilon_{c_{oi}} < 0 \end{array} \right\}$$

(Otaksuttiin betoni lineaarisesti kimmoiseksi ja terästen vaikutus-alueen ulkopuolella vetoa kestäättömäksi.)

$$\sigma_p = E_p \epsilon_{p\sigma},$$

$$\sigma_s = E_s \epsilon_{s\sigma},$$

$$\alpha_1 = \frac{651 \cdot 0,7 + 1130 \cdot 1,0}{651 + 1130} = 0,89,$$

$$\alpha_2 = 0,7,$$

$$\sigma_{cti} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctk}}{1 + \sqrt{500 \epsilon_{ct\sigma i}}} = \frac{0,89 \cdot 0,7 \cdot 2,53}{1 + \sqrt{500 \epsilon_{ct\sigma i}}} = \frac{1,58 \text{ MPa}}{1 + \sqrt{500 \epsilon_{ct\sigma i}}}, \quad i=1, \dots, 5.$$

Osareulantit:

toniterästen jännitykset saadaan nyt käyttäen ylläesitettyjä kaavoja peräkkäin. Tulos on

$$\sigma_{c1} = -6,27 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{c2} = -5,40 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{c3} = -4,39 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{c4} = -4,58 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{c5} = -3,26 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{c6} = -3,45 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{c7} = -1,50 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{c8} = 0,$$

$$\sigma_{c9} = 0,$$

$$\sigma_{ct1} = 0,98 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{ct2} = 0,96 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{ct3} = 0,93 \text{ MPa,}$$

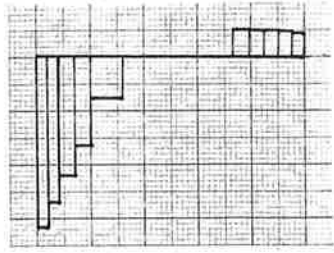
$$\sigma_{ct4} = 0,91 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{ct5} = 0,90 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_p = 1168,9 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_s = 140,9 \text{ MPa.}$$

Betonin jännitysjakautuma on esitetty kuvassa 5.14.



Kuva 5.14: Betonin ohutkerroksmallin jännitysjakautuma.

(b) Jänteen ja betoniterästen yhteisen pintakeskiön etäisyys poikki-leikkauksen yläreunasta on

$$d_{p+s} = \frac{A_d + A_s d}{A_p + A_s} = \frac{651 \cdot 865 + 1130 \cdot 950}{651 + 1130} = 918,9 \text{ mm.}$$

Betonin keskimääräinen venymä ko. korkeudella on

$$\epsilon_{c,p+s} = -\frac{p+s \cdot x}{x} \cdot \epsilon_{ylä} = -\frac{918,9 - 557,5}{557,5} (-1,0003 \cdot 10^{-3}) = 0,6484 \cdot 10^{-3}.$$

Betonin jännityksestä aiheutuva keskimääräinen venymä on

$$\epsilon_{c\sigma, p+s} = \epsilon_{c, p+s} - \epsilon_{cs} = (0,6484 + 0,4) \cdot 10^{-3} = 1,048 \cdot 10^{-3}.$$

Betonipeitteen paksuus taivutussuunnassa (katso kuvaa 5.12) on $c = 35 - 12/2 = 29 \text{ mm}$.

Tekijä k_w , terästen keskimääräinen läpimitta ϕ ja tekijä ρ_r ovat

$$k_w = \frac{10 \cdot 0,085 + 7 \cdot 0,13}{17} = 0,104,$$

$$\phi = \frac{10 \cdot 12 + 7 \cdot 12,5}{17} = 12,2$$

ja

$$\rho_r = \frac{A_s + A_{ce}}{A_{ce}} = \frac{651 + 1130}{200 \cdot 273} = 0,0326.$$

Näin saadaan halkeiluvälille

$$s_r = 3,5c + k_w \frac{\phi}{\rho_r} = 3,5 \cdot 29 + 0,104 \frac{12,2}{0,0326} = 140,4 \text{ mm.}$$

Halkeaman ominaisleveydelle saadaan lopulta tulos

$$w_k = \epsilon_{c\sigma, p+s} s_r = 1,048 \cdot 10^{-3} \cdot 140,4 = 0,147 \text{ mm.}$$

5.10 Lineaarisesi kimmainen halkeilematon vaste

Bernoulli-Euler palkkiteorian mukainen betonin venymän lauseke on

$$\epsilon_c = \epsilon + \kappa y, \quad (5.15)$$

missä ϵ on palkin akselin venymä, κ on käyritymä ja y on tarkasteltavan poikkipinnan pisteen y -koordinaatti (katso kuvaa 5.1). Betoniteräksen venymä on sama kuin betonin venymä kyseisessä kohdassa, ts.

$$\epsilon_s = \epsilon + \kappa y, \quad (5.16)$$

Jänteen venymä on betonin venymä kyseisessä kohdassa plus jänteen ja betonin venymäero, ts.

$$\epsilon_p = \epsilon + k_y + \Delta \epsilon_p \quad (5.17)$$

Betonin, betoniterästen ja jänteen kokonaisvenymä voidaan jakaa jännityksestä aiheutuvaan venymään ja jännityksestä aiheutumattomaan ns. alkuvenymään. Näin voidaan kirjoittaa

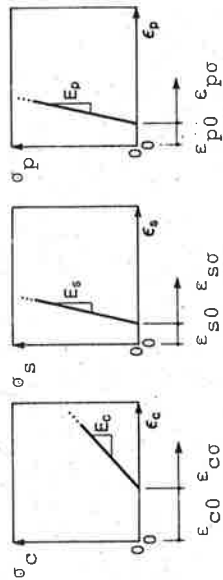
$$\begin{aligned} \epsilon_c &= \epsilon_{c0} + \epsilon_{cs} \\ \epsilon_s &= \epsilon_{s0} + \epsilon_{ss} \\ \epsilon_p &= \epsilon_{p0} + \epsilon_{ps} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Betonin alkuvenymä ϵ_{c0} muodostuu kutistumisvenymästä ϵ_{cs} ja lämpötilan muutoksesta aiheutuva venymästä $\epsilon_{c\Delta t}$. Betoniterästen ja jänteen alkuvenymät ϵ_{s0} ja ϵ_{p0} käsittävät lämpötilan muutoksesta aiheutuvat venymät $\epsilon_{s\Delta t}$ ja $\epsilon_{p\Delta t}$.

Betonin, betoniteräksen ja jänteen jännitysten ja venymien yhteydet ovat

$$\begin{aligned} \sigma_c &= E_c \epsilon_{cs} \\ \sigma_s &= E_s \epsilon_{ss} \\ \sigma_p &= E_p \epsilon_{ps} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Kuvassa 5.15 on esitetty betonin, betoniteräksen ja jänteen lineaarisesti kimmoiset jännitys-muodonmuutosyhteydet.



(a) betoni (b) betoniteräs (c) jänne

Kuva 5.15: Jännebetonipalkin materiaalien jännitysmuodonmuutosyhteydet.

Normaalivoima N on poikkipinnalla vaikuttavien jännitysten resultantti ja taivutusmomentti M on niiden aiheuttama resultoiva momentti z-akselin suhteen. Niiden lausekkeet ovat

$$N = \int_{A_c} \sigma_c dA + \int_{A_s} \sigma_s dA + \int_{A_p} \sigma_p dA, \quad (5.20)$$

$$M = \int_{A_c} \sigma_c y dA + \int_{A_s} \sigma_s y dA + \int_{A_p} \sigma_p y dA, \quad (5.21)$$

missä A_c , A_s ja A_p tarkoittavat koko poikkipinnan A osia, jotka koostuvat betonista, betoniteräksistä ja jänneteräksistä.

Kaavojen (5.15)-(5.19) avulla saadaan jännityksille helposti

$$\begin{aligned} \sigma_c &= E_c (\epsilon + k_y - \epsilon_{c0}), \\ \sigma_s &= E_s (\epsilon + k_y - \epsilon_{s0}), \\ \sigma_p &= E_p (\epsilon + k_y + \Delta \epsilon_p - \epsilon_{p0}). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Sijoittamalla nämä normaalivoiman ja momentin lausekkeisiin (5.20) ja (5.21) saadaan aluksi

$$N = \int_{A_c} E_c (\epsilon + k_y - \epsilon_{c0}) dA + \int_{A_s} E_s (\epsilon + k_y - \epsilon_{s0}) dA + \int_{A_p} E_p (\epsilon + k_y + \Delta \epsilon_p - \epsilon_{p0}) dA \quad (5.23)$$

ja

$$M = \int_{A_c} E_c (\epsilon + k_y - \epsilon_{c0}) y dA + \int_{A_s} E_s (\epsilon + k_y - \epsilon_{s0}) y dA + \int_{A_p} E_p (\epsilon + k_y + \Delta \epsilon_p - \epsilon_{p0}) y dA \quad (5.24)$$

sekä edelleen

$$\begin{aligned} N &= (E_c A_c + E_s A_s + E_p A_p) \epsilon + (E_c S_c + E_s S_s + E_p S_p) k_y \\ &+ E_p \int_{A_p} \Delta \epsilon_p y dA - E_c \int_{A_c} \epsilon_{c0} dA - E_s \int_{A_s} \epsilon_{s0} dA - E_p \int_{A_p} \epsilon_{p0} dA, \end{aligned} \quad (5.25)$$

ja

$$\begin{aligned} M &= (E_c S_c + E_s S_s + E_p S_p) \epsilon + (E_c I_c + E_s I_s + E_p I_p) k_y \\ &+ E_p \int_{A_p} \Delta \epsilon_p y^2 dA - E_c \int_{A_c} \epsilon_{c0} y dA - E_s \int_{A_s} \epsilon_{s0} y dA - E_p \int_{A_p} \epsilon_{p0} y dA. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Kaavoissa (5.25) ja (5.26)

$$S_c = \int_{A_c} y dA, \quad S_s = \int_{A_s} y dA, \quad S_p = \int_{A_p} y dA \quad (5.27)$$

ja

$$(5.28)$$

$$I_C = \int_{A_C} y^2 dA, \quad I_S = \int_{A_S} y^2 dA, \quad I_P = \int_{A_P} y^2 dA$$

ovat poikkipinnan betoni-, betoniteräs- ja jänneosien staattiset momentit ja jäyhyyshmomentit z-akselin suhteen.

Otetaan käyttöön käsitteet muunnettu pinta-ala

$$(5.29)$$

$$A_i = A_C + \alpha_s A_S + \alpha_p A_P = A + (\alpha_s - 1) A_S + (\alpha_p - 1) A_P,$$

muunnettu staattinen momentti

$$(5.30)$$

$$S_i = S_C + \alpha_s S_S + \alpha_p S_P = S + (\alpha_s - 1) S_S + (\alpha_p - 1) S_P$$

ja muunnettu jäyhyyshmomentti

$$(5.31)$$

$$I_i = I_C + \alpha_s I_S + \alpha_p I_P = I + (\alpha_s - 1) I_S + (\alpha_p - 1) I_P$$

missä α_s ja α_p ovat betoniteräksen ja betonin sekä jänteen ja betonin kimmomodulien suhteet, ts.

$$(5.32)$$

$$\alpha_s = \frac{E_S}{E_C}, \quad \alpha_p = \frac{E_P}{E_C}.$$

Otetaan vielä käyttöön suureet

$$(5.33)$$

$$N_0 = E_P \int_{A_P} \Delta \epsilon_p dA - E_C \int_{A_C} \epsilon_{c0} dA - E_S \int_{A_S} \epsilon_{s0} dA - E_P \int_{A_P} \epsilon_{p0} dA$$

ja

$$(5.34)$$

$$M_0 = E_P \int_{A_P} \Delta \epsilon_p y dA - E_C \int_{A_C} \epsilon_{c0} y dA - E_S \int_{A_S} \epsilon_{s0} y dA - E_P \int_{A_P} \epsilon_{p0} y dA,$$

joita kutsutaan alkunormaaliivoimaksi ja alkumomentiksi.

Nyt lausekkeet (5.25) ja (5.26) saadaan muotoon

$$(5.35)$$

$$N = E_C A_i \epsilon + E_C S_i \kappa + N_0$$

ja

$$(5.36)$$

$$M = E_C S_i \epsilon + E_C I_i \kappa + M_0.$$

y, z-koordinaatiston origo sijoitetaan tavallisesti muunnetun poikkipinnan pintakeskiöön. Tällöin staattinen momentti S_i on nolla ja kaavat (5.35) ja (5.36) saavat muodon

$$(5.37)$$

$$N = E_C A_i \epsilon + N_0$$

ja

$$(5.38)$$

$$M = E_C I_i \kappa + M_0.$$

Näin saadaan lausekkeet

$$(5.39)$$

$$\epsilon = \frac{N - N_0}{E_C A_i},$$

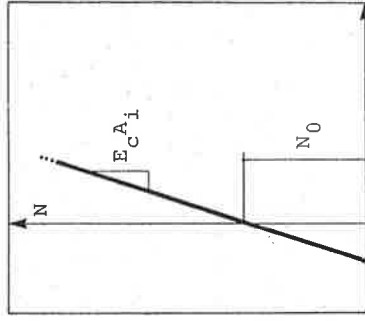
ja

$$(5.40)$$

$$\kappa = \frac{M - M_0}{E_C I_i},$$

joiden avulla tarkasteltavan palkin poikkileikkauksen normaaliivoimaa N ja taivutusmomenttia M vastaavat palkin akselin venymä ϵ ja käyrä κ voidaan suoraan (ilman yrityksen ja erehdyksen menetelmää) määrittää. Näiden avulla saadaan sitten betonin, betoniterästen ja jänneiden venymät kaavoja (5.15), (5.16) ja (5.17) käyttäen sekä jännitykset kaavoja (5.18) ja (5.19) käyttäen.

Lineaarisesti kimmoiseksi ja halkeilemattomaksi otaksutun jännepalkin normaaliivoiman ja aksiaalisen venymän riippuvuus (5.39) on esitetty graafisesti kuvassa 5.16a sekä taivutusmomentin ja käyrästäytymän riippuvuus (5.40) kuvassa 5.16b.



(a) normaaliivoima-akksiaalinen venymä yhteys (b) momentti-käyrä yhteys

Kuva 5.16: Lineaarisesti kimmoisen ja halkeilemattoman jännepalkin (a) normaaliivoiman ja aksiaalisen venymän sekä (b) taivutusmomentin ja käyrästäytymän riippuvuudet.

Tarkastellaan lähemmin muunnetun pinta-alan A_i , muunnetun staattisen momentin S_i ja muunnetun jäyhyyshmomentin I_i lausekkeita (5.29), (5.30) ja (5.31). Jos betoniteräksen muodostavat ryhmät, jonka te-

räkset ovat korkeussuunnassa niin lähellä toisiaan, että ryhmän jäyhysmomentti oman pintakeskiönä suhteen voidaan jättää huomiotta ja jos jänteet muodostavat samantyyppisen ryhmän, muunnettujen poikkileikkaussuureiden lausekkeet saavat muodon

$$A_i = A + (\alpha_s - 1)A_s + (\alpha_p - 1)A_p \quad (5.41)$$

$$S_i = S + (\alpha_s - 1)A_s y_s + (\alpha_p - 1)A_p y_p \quad (5.42)$$

$$I_i = I + (\alpha_s - 1)A_s y_s^2 + (\alpha_p - 1)A_p y_p^2 \quad (5.43)$$

jossa y_s ja y_p ovat betoniteräsi ryhmän ja jänmeteräsi ryhmän pintakeskiöiden y -koordinaatit (muunnettu poikkipinnan pintakeskiöön O_i si-
joitetussa y, z -koordinaatistossa).

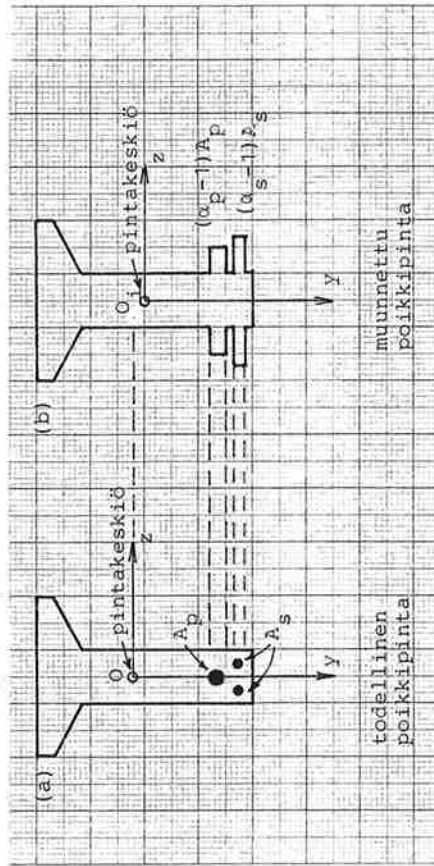
Jos betoni- ja jänneräksiä tarkastellaan kutakin erillisinä tai ne muodostuvat useampia yllämainitun tyyppisiä ryhmiä, muunnettujen poikkileikkaussuureiden lausekkeet saavat muodon

$$A_i = A + \sum (\alpha_s - 1)A_{sj} + \sum (\alpha_p - 1)A_{pj} \quad (5.44)$$

$$S_i = S + \sum (\alpha_s - 1)A_{sj} y_{sj} + \sum (\alpha_p - 1)A_{pj} y_{pj} \quad (5.45)$$

$$I_i = I + \sum (\alpha_s - 1)A_{sj} y_{sj}^2 + \sum (\alpha_p - 1)A_{pj} y_{pj}^2 \quad (5.46)$$

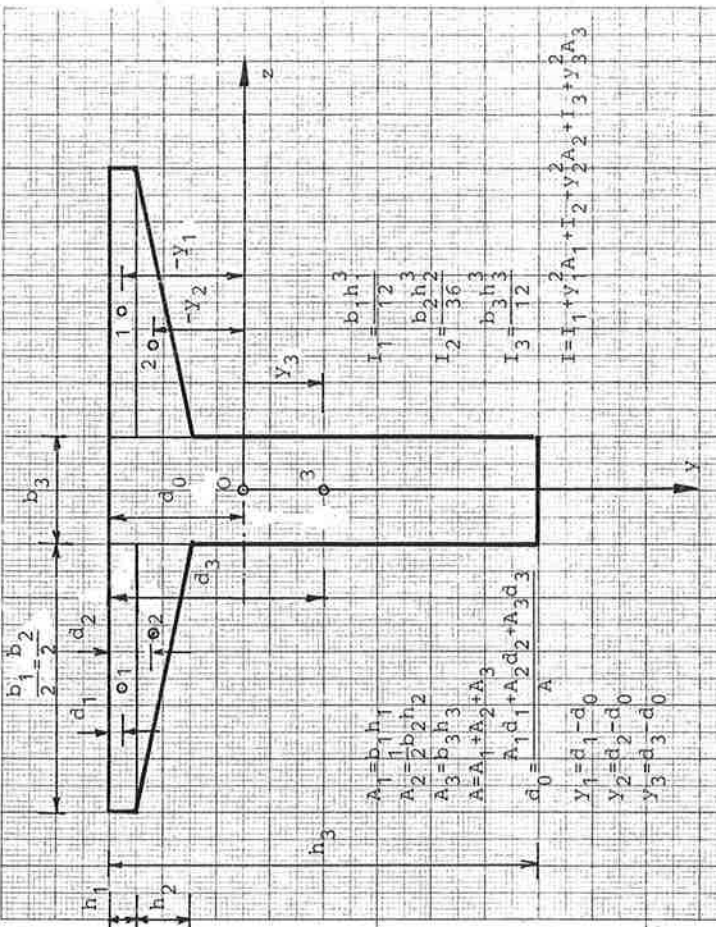
joissa summaukset käyvät yli yksittäisten terästen tai teräsi ryhmien. (Summausindeksinä on käytetty j :tä.)



Kuva 5.17: Jännepalkin (a) todellinen poikkipinta ja (b) muunnettu poikkipinta.

Muunnettu pinta-ala, muunnettu staattisen momentin ja muunnettu jäyhysmomentin käsitteitä havainnollistaa kuva 5.17. Se esittää (a) todellista poikkipintaa ja (b) ns. muunnettua poikkipintaa, joka on homogeeninen ja kokonaan betonia. Muunnettu poikkileikkaussuureet (pinta-ala, staattinen momentti, pintakeskiö, ja jäyhysmomentti) ovat yksinkertaisesti muunnettu poikkipinnan kyseiset suureet.

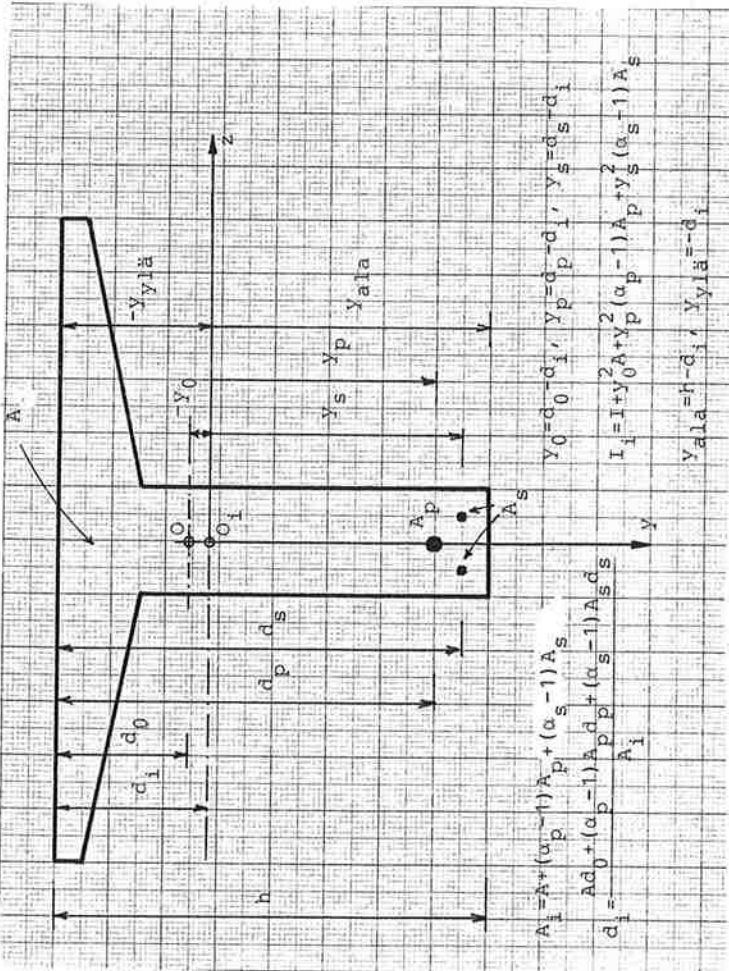
Vaikka poikkileikkaussuureiden laskemista on käsitelty lujusopin kurssissa, palataan asiaan tässä vähän. Erittäisesti kiinnitetään huomiota jännepalkkien suunnittelun kannalta oleellisiin seikkoihin. Asiaa esitellään havainnollistavia kuvia hyväksi käyttäen esimerkiksi-mäisesti. Usein jännepalkin alkuuperäinen poikkipinta on sama koko palkilla, vaikka muunnettu poikkipinta saattaa vaihdella esimerkiksi jänteen aseman vaihdelleessa pitkin palkkia. Myös saman poikkileikkauksen muunnettu poikkipinta alkutilassa ($\alpha_s = E_s/E_c$, $\alpha_p = E_p/E_c$) ja lopputilassa ($\alpha_s = E_s/E_{cc}$, $\alpha_p = E_{pr}/E_{cc}$) on erilainen. Koska muunnettu poikkipinnan poikkileikkaussuureet on nopeampi määrittää, kun alku-



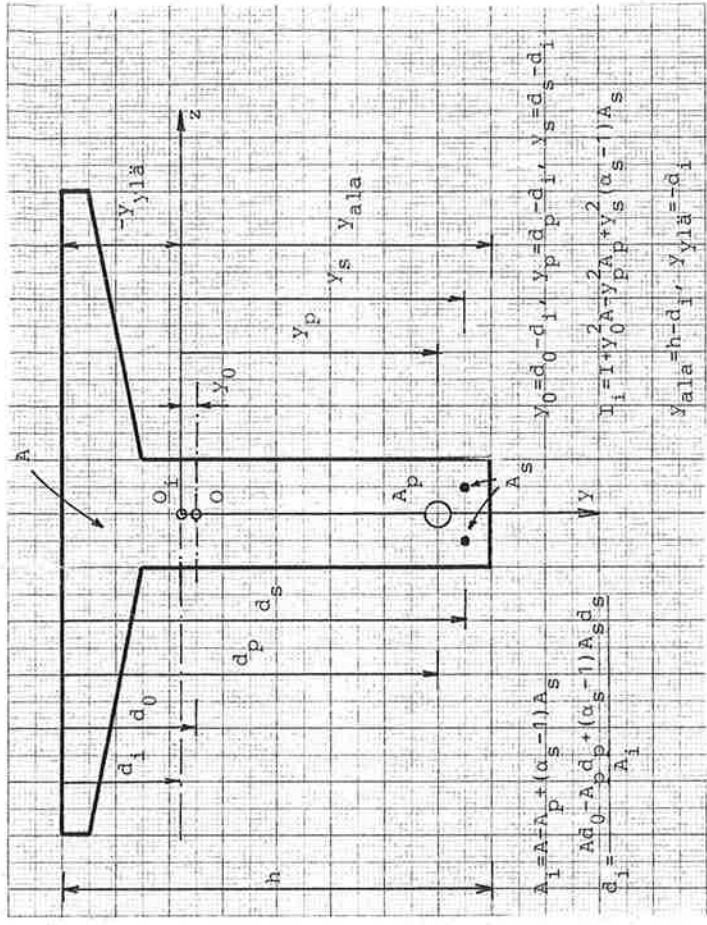
Kuva 5.18: Alkuuperäisen poikkipinnan jäyhysmomentin laskenta esimerkkinä kuvattuna.

peräisen poikkipinnan poikkileikkaussuureet tunnetaan, kannattaa edelliset määrittää aluksi erikseen.

Kuvassa 5.18 on esimerkkimäisesti esitetty tyypillisen jännepalkin poikkileikkauksen alkuperäisen poikkipinnan jähyysmomentin laskemiseen liittyvät kaavat. Kuvassa 5.19 on esitetty muunnetun poikkipinnan jähyysmomentin laskemiseen liittyvät kaavat, kun alkuperäisen poikkipinnan poikkileikkaussuureet tunnetaan. Kuvassa 5.20 on esitetty muunnetun poikkipinnan jähyysmomentin laskemiseen liittyvät kaavat, kun ainoastaan betoniteräkset otetaan huomioon. Tällaista muunnetua poikkipintaa voidaan käyttää, kun tutkitaan ankkurijännepalkin käyttäytymistä ennen injektointia, jolloin jänteen ja betonin välillä ei ole tartuntaa, sekä tartunnattomien jänteiden yhteydessä.



Kuva 5.19: Muunnetun poikkipinnan jähyysmomentin laskenta esimerkkimäisesti kuvattuna, kun alkuperäisen poikkipinnan poikkileikkaussuureet tunnetaan.



Kuva 5.20: Sellaisen muunnetun poikkipinnan, jossa jänneteräksi ei oteta huomioon, jähyysmomentin laskenta esimerkkimäisesti kuvattuna.

Käytössä olevien standardityyppisten jännepalkkien poikkileikkausten alkuperäisen poikkipinnan poikkileikkaussuureet ovat tiedossa, jolloin asianomainen laskentavaihe jää pois ja joudutaan määrittämään ainoastaan muunnetun poikkipinnan suureet.

Tarkastellaan lähemmin alkunormaalivoiman N_0 ja alkumomentin M_0 lausekkeita (5.33) ja (5.34). Otaksutaan, että kaikkien jänteiden jännittämisvenymäero $\Delta \epsilon_p$ on vakio. Otaksutaan lisäksi, että betonin, betoniterästen ja jänneterästen alkuvenymät $\epsilon_{c0}, \epsilon_{s0}$ ja ϵ_{p0} ovat vakioita. Tämä merkitsee vakioisuudesta kutistumisvenymää ja lämpötilan muutosta koko poikkileikkauksessa (tilanne ei suinkaan aina ole voimassa). Tällöin alkunormaalivoiman ja alkumomentin lausekkeet saavat muodon

$$N_0 = E_p A_p \Delta \epsilon_p - E_c A_c \epsilon_{c0} - E_s A_s \epsilon_{s0} - E_p A_p \epsilon_{p0} \quad (5.47)$$

ja

$$M_0 = \sum p p^A \Delta \epsilon_Y - E_A \epsilon_C \sum Y_C^A \epsilon_C - \sum s_0 Y_C^A \epsilon_C - \sum p p^A \epsilon_C \sum p_0 Y_C^A \epsilon_C \quad (5.48)$$

Jossa Y_C on betonipoikkipinnan pintakeskiön y-koordinaatti (muunneltun poikkipinnan pintakeskiön O_i sijoitettussa y,z-koordinaatistossa). Usein jännittämisvenymäero $\Delta \epsilon_C$ kaikilla jänteillä ei ole sama ja betonin, betoniterästen ja jänneterästen alkuvenymät ϵ_{C0} , ϵ_{S0} ja ϵ_{P0} eivät ole vakioita (esimerkiksi korkeus suunnassa vaihteleva lämpötilan muutos). Tällöin joudutaan jänne- ja betoniteräksiä tarkastelemaan yksittäin tai ryhmittäin. Alkunormaaliavoiman ja alkumomentin lausekkeet (5.33) ja (5.34) voidaan tällöin esittää muodossa

$$N_0 = \sum p \sum p_j \Delta \epsilon_C - E_C \int \epsilon_C dA - E_C \sum s_j \epsilon_{S0} - E_C \sum p_j \epsilon_{P0} \quad (5.49)$$

ja

$$M_0 = \sum p \sum p_j \Delta \epsilon_C - E_C \int \epsilon_C y dA - E_C \sum s_j \epsilon_{S0} y - E_C \sum p_j \epsilon_{P0} y \quad (5.50)$$

Kaavojen kolmansissa termeissä termeissä ovat integroinnit betonipinnan yli voidaan tehdä joko analyttisesti tai numeerisesti, kun alkuvenymän lauseke $\epsilon_{C0}(y)$ tunnetaan.

5.12 Lineaarisesti kimmoisen halkeilemattoman jännepalkin kaavoja.

5.12.1 Aksiaalinen venymä ja käyritymä.

Tarkastellaan vielä yksityiskohtaisemmin puhtaan taivutuksen alaisen jännepalkin tapausta. Tällöin normaaliavoima N on nolla ja palkin akselin venymä (5.39) ja käyritymä (5.40) saavat muodon

$$\epsilon = - \frac{N_0}{E_C A_i} \quad (5.51)$$

ja

$$\kappa = - \frac{M_0}{E_C I_i} + \frac{M}{E_C I_i} \quad (5.52)$$

Palkin akselin venymä ϵ aiheutuu (katso kaavaa (5.33)) jännittämisestä ja materiaalien alkuvenymistä, ts. betonin kutistumisesta ja lämpötilan muutoksista, mutta ei ulkoisesta kuormituksesta. Käyritymä voidaan jakaa jännittämisestä ja alkuvenymistä (katso kaavaa (5.34)) aiheutuvaan osuuteen

$$\kappa^0 = - \frac{M_0}{E_C I_i} \quad (5.53)$$

ja ulkoisesta kuormituksesta w aiheutuvaan osuuteen

$$\kappa^w = \frac{M}{E_C I_i} \quad (5.54)$$

Jännittämisestä ja alkuvenymistä aiheutuva käyritymä κ^0 aiheuttaa palkkiin negatiivisen taipuman eli korotuksen. Ulkoisesta kuormituksesta aiheutuva käyritymä κ^w aiheuttaa palkkiin positiivisen taipuman.

5.12.2 Betonin jännitys.

Betonin jännitykselle saadaan

$$\sigma_C = E_C \epsilon_C = E_C (\epsilon_C - \epsilon_{C0}) = E_C (\epsilon + \kappa y - \epsilon_{C0})$$

ja edelleen tulos

$$\sigma_C = - \frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{I_i} y + \frac{M}{I_i} y - E_C \epsilon_{C0} \quad (5.55)$$

Betonin reunajännitykset voidaan myös ilmaista tavanomaiseen tapaan muunnetun poikkipinnan taivutusvastusten $W_{i,y_lä}$ ja $W_{i,ala}$ avulla muodossa

$$\sigma_{y_lä} = - \frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{W_{i,y_lä}} + \frac{M}{W_{i,y_lä}} - E_C \epsilon_{C0} \quad (5.56a)$$

ja

$$\sigma_{ala} = - \frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{W_{i,ala}} + \frac{M}{W_{i,ala}} - E_C \epsilon_{C0} \quad (5.56b)$$

Nämä taivutusvastukset määritellään tässä kaavoilla

$$W_{i,y_lä} = \frac{I_i}{Y_{ylä}} \quad (5.57a)$$

ja

$$W_{i,ala} = \frac{I_i}{Y_{ala}} \quad (5.57b)$$

Valitun käytännön mukaan on taivutusvastus $W_{i,y_lä}$ negatiivinen ja taivutusvastus $W_{i,ala}$ positiivinen (koska $Y_{ylä} < 0$ ja $Y_{ala} > 0$).

Betonin jännitys voidaan myös jakaa jännittämisestä ja alkuvenymistä aiheutuvaan jännitykseen

$$\sigma_c^0 = -\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{I_i} Y - E_c \epsilon_{c0} \quad (5.58)$$

$$\sigma_c^w = \frac{M}{I_i} Y. \quad (5.59)$$

ja ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvaan jännitykseen

Vastaavat reunajännitysten lausekkeet ovat

$$\sigma_{ylä}^0 = -\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{W_{i,ylä}} - E_c \epsilon_{c0}, \quad (5.60a)$$

$$\sigma_{ala}^0 = -\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{W_{i,ala}} - E_c \epsilon_{c0} \quad (5.60b)$$

ja

$$\sigma_{ylä}^w = \frac{M}{W_{i,ylä}}, \quad (5.61a)$$

$$\sigma_{ala}^w = \frac{M}{W_{i,ala}}. \quad (5.61b)$$

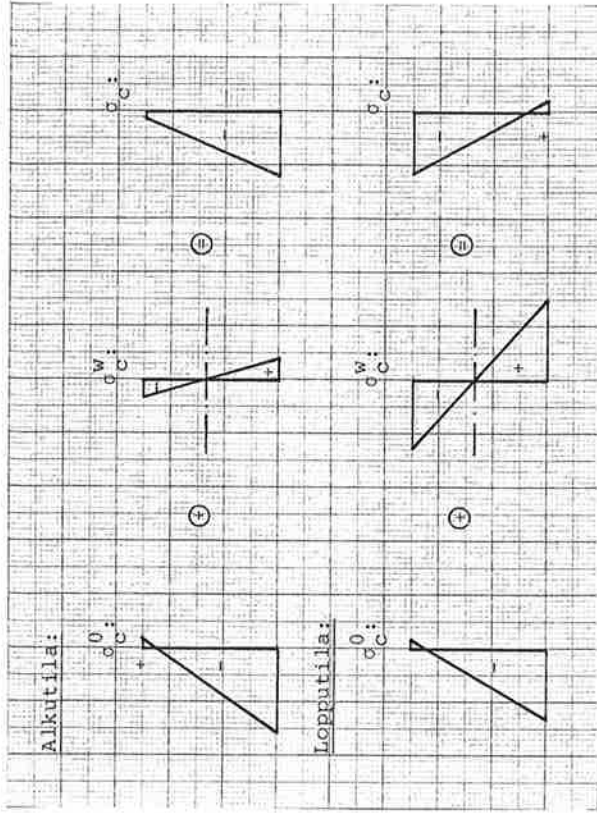
Kuva 5.21 selvittää, kuinka betonin jännitys σ_c muodostuu jännittämisestä ja alkuvenymistä aiheutuvan jännityksen σ_c^0 ja kuormituksesta aiheutuvan jännityksen σ_c^w summana sekä alkutilassa että lopputilassa. Alkutilassa viruminen, kutistuminen, relaxaatio ja lämpötilan muutokset eivät ole vielä tapahtuneet ($\epsilon_{c0} = \epsilon_{s0} = \epsilon_{p0} = 0$) ja kuormituksenä on vain oma paino ($w = g_1$), jolloin taiputusmomentti on pienimmillään (M_{min}). Lopputilassa viruminen, kutistuminen, relaxaatio ja lämpötilan muutokset ovat tapahtuneet ja kuormituksenä on koko hyötykuorma ($w = g_1 + g_2 + q$), jolloin taiputusmomentti on suurimmillaan (M_{max}). Jännittämisestä ja alkuvenymistä aiheutuva betonin jännitys σ_c^0 on kokonaan tai miltei kokonaan negatiivinen (puristava). Ulkoisesta kuormituksesta aiheutuva betonin jännitys σ_c^w on tyyppillinen teknisen taiputusteorian lineaarinen jännitysjakautuma, joka saa arvon nolla neutraaliakselilla.

5.12.3 Betoniterästen jännitykset.

Betoniterästen jännitykselle saadaan

$$\sigma_s = E_s \epsilon_{s0} = E_s (\epsilon_s - \epsilon_{s0}) = E_s (\epsilon + k Y_s - \epsilon_{s0})$$

ja edelleen



Kuva 5.21: Betonin jännityksen σ_c muodostuminen jännittämisestä ja alkuvenymistä aiheutuvasta jännityksestä σ_c^0 ja kuormituksesta aiheutuvasta jännityksestä σ_c^w .

$$\sigma_s = \alpha_s \left(-\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{I_i} Y_s + \frac{M}{I_i} Y_s \right) - E_s \epsilon_{s0}. \quad (5.62)$$

ja lopulta

$$\sigma_s = \alpha_s \sigma_{cs} + E_s (\epsilon_{c0} - \epsilon_{s0}), \quad (5.63)$$

missä σ_{cs} on betonin jännitys betoniterästen pintakeskiön kohdalla, (joka voidaan laskea kaavalla (5.55) sijoittamalla siihen betoniterästen pintakeskiön y-koordinaatti Y_s). Betoniterästen jännitys voidaan myös jakaa jännittämisestä ja alkuvenymistä aiheutuvaan jännitykseen

$$\sigma_s^0 = \alpha_s \sigma_{cs}^0 + E_s (\epsilon_{c0} - \epsilon_{s0}) \quad (5.64)$$

ja ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvaan jännitykseen

$$\sigma_s^w = \alpha_s \sigma_{cs}^w, \quad (5.65)$$

missä σ_{cs}^0 ja σ_{cs}^w ovat betonin vastaavat jännitykset betoniterästen pintakeskiön kohdalla.

5.12.4 Jänneterästen jännitykset.

Jänneterästen jännitykselle saadaan

$$\sigma_p = E_p \varepsilon_p = E_p (\varepsilon_p - \varepsilon_{p0}) = E_p (\varepsilon + \kappa y_p + \Delta \varepsilon_p - \varepsilon_{p0})$$

ja edelleen

$$\sigma_p = \alpha_p \left(-\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{I_i} y_p + \frac{M}{I_i} y_p \right) + E_p \Delta \varepsilon_p - E_p \varepsilon_{p0} \quad (5.66)$$

ja lopulta

$$\sigma_p = \alpha_p \sigma_{cp} + E_p (\Delta \varepsilon_p + \varepsilon_{c0} - \varepsilon_{p0}), \quad (5.67)$$

missä σ_{cp} on betonin jännitys jänneterästen pintakeskiön kohdalla, (joka voidaan laskea kaavalla (5.55) sijoittamalla siihen jänneterästen pintakeskiön y -koordinaatti y_p). Jänneterästen jännitys voidaan myös jakaa jännittämiseksi ja alkuvenymistä aiheutuvaan jännitykseen

$$\sigma_p^0 = \alpha_p \sigma_{cp}^0 + E_p (\Delta \varepsilon_p + \varepsilon_{c0} - \varepsilon_{p0}) \quad (5.68)$$

ja ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvaan jännitykseen

$$\sigma_p^w = \alpha_p \sigma_{cp}^w \quad (5.69)$$

missä σ_{cp}^0 ja σ_{cp}^w ovat betonin vastaavat jännitykset betoniterästen pintakeskiön kohdalla.

Tässä kappaleessa käyttöön otettu jännepalkin vasteen erittely toisaalta jännittämiseksi ja alkuvenymistä (betonin kutistuminen ja lämpötilan muutos) aiheutuvaan osuuteen (yläindeksi 0) ja toisaalta ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvaan osuuteen (yläindeksi w) on käytännön suunnittelun kannalta erittäin hyödyllinen. Huomionarvoista on myös, että ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvan käyritymän ja betonin jännityksen kaavat (5.54), (5.59) ja (5.61) ovat identtiset tavanomaisen yksiakselisen taivutuksen käyritymän ja normaali-jännityksen lausekkeiden kanssa, kunhan vain käytetään muunnettua poikkipintaa.

5.13 Taipumien ja korotuksen laskeminen.

Kun palkkia rasittava taivutusmomentti $M(x)$ tunnetaan, voidaan sitä vastaava käyritymä $\kappa(x)$ kussakin palkin pisteessä määrittää momentti-

ti-käyritysmäyhteyden avulla. Kuvat 5.3 ja 5.10 edustavat tyyppillisiä, koko poikkileikkauksen vastealueen kattavia, epälineaaraisia momentti-käyritysmäyhteyksiä. Kaava (5.40) on halkeilemattoman, lineaarisesti kimmoisen jännepalkin momentti-käyritysmäyhteys ja kuva 5.16b edustaa sen kuvaajaa. Taivutusmomentin määrittäminen etukäteen ennen siirtymien määrittämistä on mahdollista ainoastaan staattisesta määrityksessä sauvarakenteissa. Tässä luvussa käsitellään ainoastaan staattisesti määrättyjä jännepalkkeja.

Seuraavassa esitellään kaksi menetelmää, Mohrin menetelmä ja yksikövoimamenetelmä jotka soveltuvat taipumien (ja myös kiertymien) määrittämiseen, kun käyritysmäjakautuma $\kappa(x)$ on tunnettu.

(a) Mohrin menetelmä

Teknisen (Bernoulli-Euler) taivutusteorian mukaan palkin taipuman ja kiertymän yhteys on

$$v' = \varphi \quad (5.70)$$

ja kiertymän ja käyritymän yhteys on

$$\varphi' = -\kappa. \quad (5.71)$$

Toisaalta palkin momenttitasapainoyhtälö on

$$M' = Q \quad (5.72)$$

ja vertikaalinen voimatasapainoyhtälö on

$$Q' = -w. \quad (5.73)$$

Jos palkin käyritymä $\kappa(x)$ on tunnettu, saadaan kiertymä $\varphi(x)$ ja taipuma $v(x)$ määritettyä differentiaaliyhtälöiden (5.70) ja (5.71) ratkaisuna. Annettua kuormaa $w(x)$ vastaava staattisesti määrätyn palkin leikkausvoima $Q(x)$ ja taivutusmomentti $M(x)$ saadaan taas differentiaaliyhtälöiden (5.72) ja (5.73) ratkaisuna. Yhtäiöt (5.70) ja (5.71) sekä yhtäiöt (5.72) ja (5.73) ovat muodoltaan samoja. Niihin liittyvät fysikaaliset probleemat ovat näinmuodoin analogisia. Tässä analogiassa taipumaa v vastaa taivutusmomentti M , kiertymää φ vastaa leikkausvoima Q ja käyritysmää κ vastaa kuorma w .

Annettua kuormaa vastaavien leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuvien määrittäminen on perustehtävä, jonka jokaisen rakennusinsinöörin tulee hallita. Annettua käyritysmää vastaavien kiertymän ja taipuman määrittäminen ei sensijaan ole yhtä tuttua. Mohrin menetelmäs-

Taulukko 5.6: Eräiden jakautuneiden kuormitusten resultantteja ja resultanttien vaikutuspisteitä.

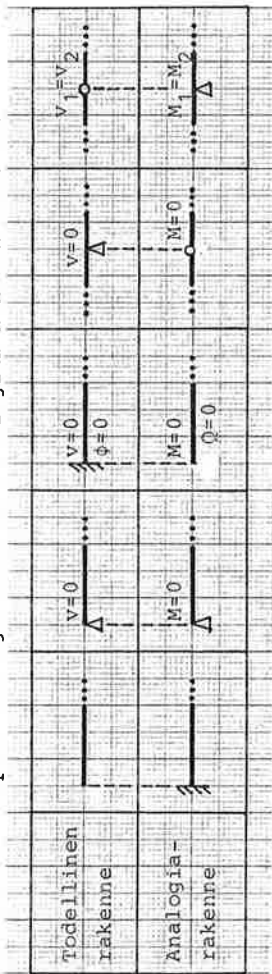
Suorakaide		$R = wl$ $e_1 = \frac{l}{2}$ $e_2 = \frac{l}{2}$
Kolmio		$R = \frac{1}{2} wl$ $e_1 = \frac{2}{3} l$ $e_2 = \frac{1}{3} l$
Puoli-suunnikas		$R = \frac{w_1 + w_2}{2} l$ $e_1 = \frac{w_1 + 2w_2}{3(w_1 + w_2)} l$ $e_2 = \frac{2w_1 + w_2}{3(w_1 + w_2)} l$
Paraabeli		$R = \frac{2}{3} wl$ $e_1 = \frac{1}{2} l$ $e_2 = \frac{1}{2} l$
		$R = \frac{1}{3} wl$ $e_1 = \frac{3}{4} l$ $e_2 = \frac{1}{4} l$
		$R = \frac{2}{3} wl$ $e_1 = \frac{5}{8} l$ $e_2 = \frac{3}{8} l$
Kuutio-paraabeli		$R = \frac{1}{4} wl$ $e_1 = \frac{4}{5} l$ $e_2 = \frac{1}{5} l$

Taulukko 5.7: Integraalin $\int \kappa \bar{M} dx$ arvoja yksikkövoimamenetelmää varten.

\bar{M} -pinta	κ -pinta	\bar{M}_1	\bar{M}_2	\bar{M}_1	\bar{M}_2
	$l \kappa \bar{M}$		$\frac{l}{2} \kappa \bar{M}_2$		$\frac{l}{2} \kappa (\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$
	$\frac{l}{2} \kappa_2 \bar{M}$		$\frac{l}{3} \kappa_2 \bar{M}_2$		$\frac{l}{6} \kappa_2 (\bar{M}_1 + 2\bar{M}_2)$
	$\frac{l}{2} \kappa_1 \bar{M}$		$\frac{l}{6} \kappa_1 \bar{M}_2$		$\frac{l}{6} \kappa_1 (2\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$
	$\frac{l}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) \bar{M}$		$\frac{l}{6} (\kappa_1 + 2\kappa_2) \bar{M}_2$		$\frac{l}{6} [\kappa_1 (2\bar{M}_1 + \bar{M}_2) + \kappa_2 (\bar{M}_1 + 2\bar{M}_2)]$
	$\frac{2l}{3} \kappa_3 \bar{M}$		$\frac{l}{3} \kappa_3 \bar{M}_2$		$\frac{l}{3} \kappa_3 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$
	$\frac{2l}{3} \kappa_2 \bar{M}$		$\frac{5l}{12} \kappa_2 \bar{M}_2$		$\frac{l}{12} \kappa_2 (3\bar{M}_1 + 5\bar{M}_2)$
	$\frac{2l}{3} \kappa_1 \bar{M}$		$\frac{l}{4} \kappa_1 \bar{M}_2$		$\frac{l}{12} \kappa_1 (5\bar{M}_1 + 3\bar{M}_2)$
	$\frac{l}{3} \kappa_2 \bar{M}$		$\frac{l}{4} \kappa_2 \bar{M}_2$		$\frac{l}{12} \kappa_2 (\bar{M}_1 + 3\bar{M}_2)$
	$\frac{l}{3} \kappa_1 \bar{M}$		$\frac{l}{12} \kappa_1 \bar{M}_2$		$\frac{l}{12} \kappa_1 (3\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$

sä todellisen rakenteen annettua käyritystä vastaavan kiertymän ja taipuman määrittämistehtävä ymmärretään analogiarakenteen annettua kuormaa $q(x) \equiv \kappa(x)$ vastaavan leikkausvoiman $Q(x) \equiv \varphi(x)$ ja taivutusmomentin $M(x) \equiv v(x)$ määrittämistehtäväksi. Näin taipuman ja kiertymän määrittäminen palautuu tehtäväksi, jonka ratkaiseminen hallitaan ennestään.

Mohrin menetelmässä analogiarakenteen tuennat eivät ole samat kuin todellisen rakenteen. Kuvassa 5.22 on esitetty todellisen rakenteen tavallisimpia tuentoja vastaavat analogiarakenteen tuennat.



Kuva 5.22: Tuennat Mohrin menetelmässä.

Mohrin menetelmään liittyviä laskelmia helpottamaan on laadittu taulukko 5.6, jossa on esitetty eräiden yksinkertaisten jakautuneiden kuormien resultantit ja niiden vaikutuspisteiden asemat.

(b) Yksikkövoimamenetelmä

Tavoitteenamme on määrittää rakenteen tietyn siirtymäsuureen δ (taipuma tai kiertymä) arvo. Olkoon tätä vastaava voimaosuus F (voima tai momentti).

Käytetään nyt virtuaalisen työn periaatetta siten, että virtuaaliseksi voimatilaksi otetaan ajatellun yksikkövoimaosuuden $\bar{F}=1$ (voima tai momentti) aiheuttama rakenteen voimatila ja todelliseksi siirtymätilaksi otetaan todellisen kuormituksen aiheuttama rakenteen siirtymätila. Teknistä taivutusteoriaa noudattavan palkkirakenteen taivutusvoimatila käsittää siis voimaosuuden $\bar{F}=1$ ja sen aiheuttaman rakenteen taivutusmomentin $\bar{M}(x)$. Siirtymätila käsittää todellisen kuormituksen rakenteeseen aiheuttaman siirtymäsuureen δ ja käyritysmä $\kappa(x)$. Koska ainoa rakennetta kuormittava ulkoinen virtuaalinen voima on \bar{F} , ulkoinen virtuaalinen työ on

$$\delta W_{\text{ext}} = \bar{F} \delta = \delta. \quad (5.74)$$

Sisäisen virtuaalisen työn lauseke on

$$\delta W_{\text{int}} = - \int_L \bar{M} \kappa dx, \quad (5.75)$$

missä integrointi tapahtuu koko rakenteen yli. Virtuaalisen työn periaatteesta

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (5.76)$$

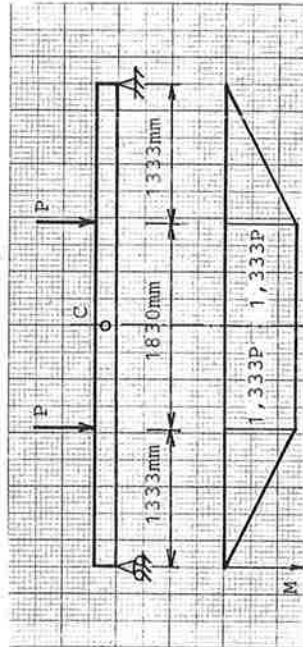
seuraa heti tulos

$$\delta = \int_L \kappa \bar{M} dx. \quad (5.77)$$

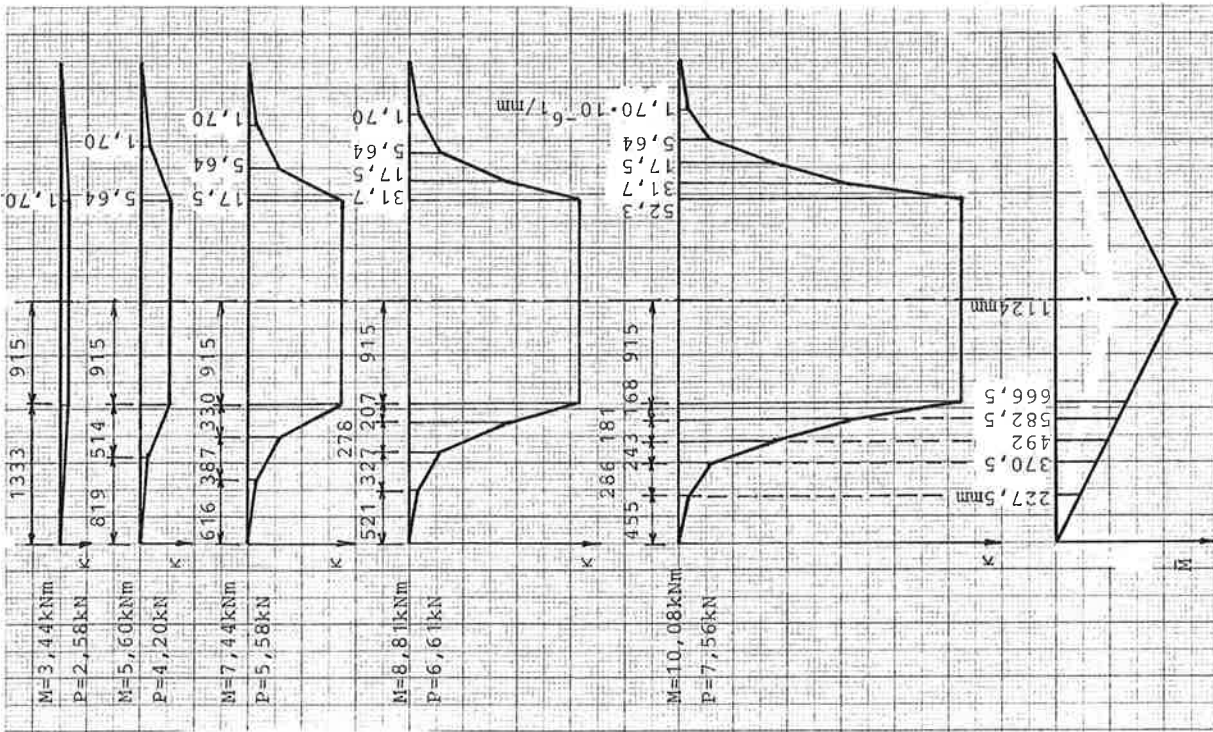
Tämä on yksikkövoimamenetelmän peruskaava. Tulon $\kappa(x) \cdot \bar{M}(x)$ integrointia helpottamaan on laadittu taulukko 5.7. Kaavojen käyttötapaa ilmenee parhaiten esimerkkitehtävien yhteydessä.

5.14 Esimerkki taipuman määrittämisestä

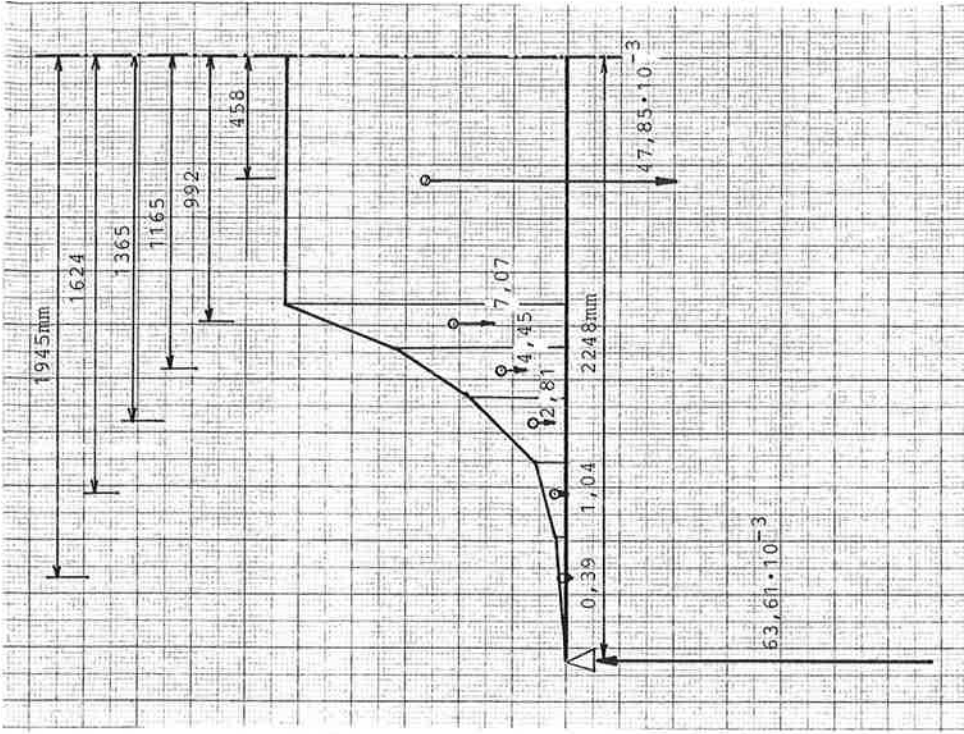
Määritetään kuvassa 5.10 esitetyn palkin kuorman P ja keskipiisteen taipuman v_C välinen riippuvuus. Palkki ja sen kuormasta P riippuva momenttipinta on esitetty kuvassa 5.23. Kuvassa 5.24 on esitetty viisi palkin käyritysmajakautumaa $\kappa(x)$, jotka vastaavat kuorman P arvoja, joilla palkin suurin momentti saavuttaa taulukossa 5.3 esiintyvät taivutusmomentin arvot $M=3,44\text{kNm}, \dots, 8,81\text{kNm}$ sekä arvon $M=10,08\text{kNm}$, joka vastaa murtorajatilaa. Todellista käyritysmajakautumaa on taulukosta 5.3 saatavien pisteiden välillä approksimoitu murtoviivalla.



Kuva 5.23: Kahden pistekuorman P kuormittama palkki.



Kuva 5.24: Viittä eri pisteuorman P arvoa vastaavat käyritymäjakautumat $\kappa(x)$ sekä yksikkövoimaa $\bar{F}=1$ vastaava momenttijakautuma $\bar{M}(x)$ kuvan 5.23 palkille.



Kuva 5.25: Analogiapalkin symmetrinen puolisko.

Alimmaisena kuvassa 5.24 on palkin keskipisteessä vaikuttavaa yksikkövoimaa $\bar{F}=1$ vastaava virtuaalinen momenttijakautuma $\bar{M}(x)$. Alimmaisesta käyritymäjakautumasta $(M=10,08 \text{ kNm})$ vastaavalle palkin keskipisteeseen taipumalle saadaan yksikkövoimamenetelmällä integrointitaulukkoa 5.7 hyväksi käyttäen

$$v_c = 2 \left\{ \frac{455}{3} \cdot 1,70 \cdot 227,5 + \frac{286}{6} [170(2 \cdot 227,5 + 370,5) + 5,64 \cdot (227,5 + 2 \cdot 370,5)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{243}{6} [5,64(2 \cdot 370,5+492)+17,5(370,5+2 \cdot 492)] \\
& + \frac{181}{6} [17,5(2 \cdot 492+582,5)+31,7(492+2 \cdot 582,5)] \\
& + \frac{168}{6} [31,7(2 \cdot 582,5+666,5)+52,3(582,5+2 \cdot 666,5)] \\
& + \frac{915}{6} 52,3(666,5+1124) \cdot 10^{-6} \text{ mm} \\
& = 102,6 \text{ mm}.
\end{aligned}$$

Kuvassa 5.25 on esitetty kuvan 5.23 palkkia vastaavan analogiapalkin symmetrinen puolisko, jota kuormittaa kuvan 5.24 alin käyrästymäjä-kautuma ($M=10,08 \text{ kNm}$). Sen puolisuunnikkaan muotoisten osien resultantit ja niiden etäisyydet palkin keskipisteestä on myös määritetty taulukko 5.6 hyväksi käyttäen ja merkitty kuvaan. Palkin tukireaktion ($63,61 \cdot 10^{-3}$) määrittämisen jälkeensä taipuma v_c saadaan Mohrin menetelmällä analogiapalkin taivutusmomentin arvona sen keskipisteessä C. Tulos on

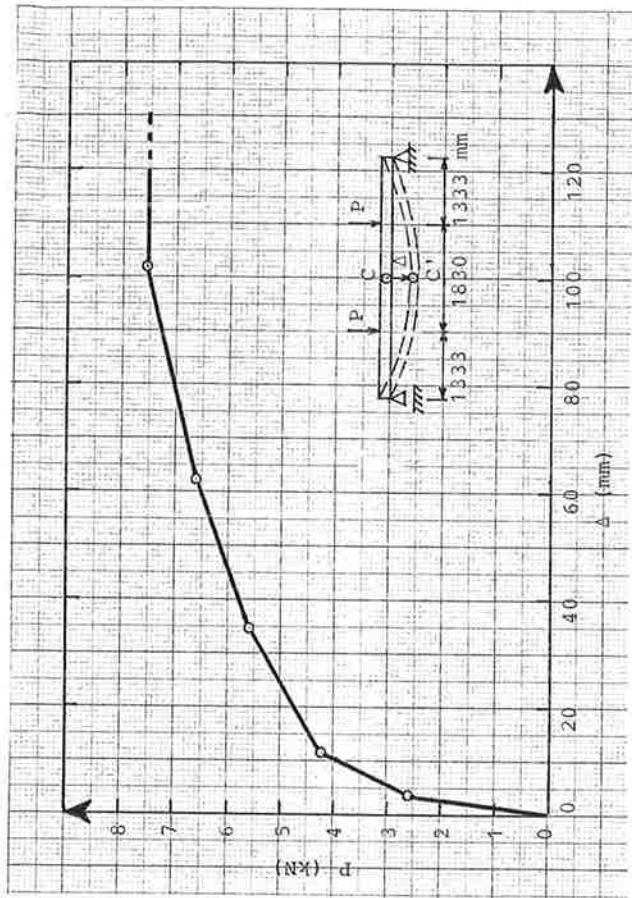
$$v_c = (63,61 \cdot 2248 - 0,39 \cdot 1945 - 1,04 \cdot 1624 - 2,81 \cdot 1365 - 4,45 \cdot 1165 - 7,07 \cdot 992$$

$$- 47,85 \cdot 458) \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 102,6 \text{ mm}.$$

Samanlainen taipumalaskelma voidaan tehdä neljää muuta käyrästymäjä-kautumaa hyväksi käyttäen joko yksikkövoima- tai Mohrin menetelmällä. Tulokset on koottu taulukkoon 5.8 ja kuorma-taipumakäyrä on esitetty kuvassa 5.26.

Taulukko 5.8: Kuorma-taipumalaskelman tulos.

M (kNm)	P (kN)	v_c (mm)
3,44	2,58	3,8
5,60	4,20	11,7
7,44	5,58	34,7
8,81	6,61	62,5
10,08	7,56	102,6



Kuva 5.26: Esimerkkipalkin kuorma-taipumakäyrä.

6. JÄNNEBETONIRAKENTEIDEN SUUNNITTELUSTA

6.1 Tarkastelutavat suunnittelussa

6.1.1 "Venymäyhteensopivuus" tarkastelutapa

Luvuissa 4 ja 5 esillä ollutta tartunnallisten jännitettyjen rakenteiden tarkastelutapaa voidaan kutsua "venymäyhteensopivuus" tarkastelutavaksi. Sen peruslähtökohta oli jännittämissuunnitelman säilyminen vakiona, ts.

$$\Delta \epsilon_p = \text{vakio.} \quad (6.1)$$

"Venymäyhteensopivuus" tarkastelutapaa taivutettujen rakenteiden lineaarisesti kimmoisen, halkeilemattoman vasteen tapauksessa käsiteltiin perusteellisesti jo kohdissa 5.10-5.12. Tässä yhteydessä käsitellään tämän tarkastelutavan kaavoja vielä hieman. Tarkoituksena tuoda esille kuinka se eroaa kohdassa 6.12 käsiteltävästä "voimajänteessä" tarkastelutavasta.

Tarkastellaan alkutilaa, jolloin betoni ei ole ehtinyt kutistua eikä siihen ole ehtinyt kohdistua lämpötilan muutoksia. Tällöin betonin, jänteen ja betoniterästen alkumuodonmuutokset ovat nolliä. Alkunoimaalivoima ja alkumomentti ovat nyt kaavojen (5.47) ja (5.48) perusteella muotoa

$$N_0 = E_p A_p \Delta \epsilon_p \quad (6.2)$$

ja

$$M_0 = E_p A_p \Delta \epsilon_p \cdot y_p \quad (6.3)$$

Käytetään jännittämissuunnitelmaa vastaavalle jännevoimalle merkitä

$$P_0 = E_p A_p \Delta \epsilon_p \quad (6.4)$$

ja todetaan samalla, että tartuntajänteen tapauksessa sille pätee

$$P_0 = P_0 \text{ alusta.} \quad (6.5)$$

Alkunoimaalivoimalle ja alkumomentille saadaan nyt

$$N_0 = P_0 \quad (6.6)$$

ja

$$M_0 = P_0 y_p \quad (6.7)$$

Jatkossa käytetään jänteen pintakeskiön y-koordinaatille y_p myös merkintää e ja sitä kutsutaan jänteen epäkeskisyydeksi. Näin alkumomentti on

$$M_0 = P_0 e. \quad (6.8)$$

Betonin jännitykselle ja reunajännityksille saadaan nyt kaavojen (5.55), (5.56) perusteella

$$\sigma_c = -\frac{P_0}{A_i} - \frac{P_0 e}{I_i} y + \frac{M}{I_i} y, \quad (6.9)$$

$$\sigma_{ylä} = -\frac{P_0}{A_i} - \frac{P_0 e}{W_{i,ylä}} + \frac{M}{W_{i,ylä}} \quad (6.10a)$$

ja

$$\sigma_{ala} = -\frac{P_0}{A_i} - \frac{P_0 e}{W_{i,ala}} + \frac{M}{W_{i,ala}}. \quad (6.10b)$$

Betonin jännitykselle betoniterästen pintakeskiön kohdalla ja betoniterästen jännitykselle sadaan kaavojen (6.9) ja (5.63) perusteella

$$\sigma_{cs} = -\frac{P_0}{A_i} - \frac{P_0 e}{I_i} y_s + \frac{M}{I_i} y_s \quad (6.11)$$

ja

$$\sigma_s = \alpha_s \sigma_{cs}. \quad (6.12)$$

Betonin jännitykselle jänteen pintakeskiön kohdalla ja jänteen jännitykselle sadaan kaavojen (6.9) ja (5.67) perusteella

$$\sigma_{cp} = -\frac{P_0}{A_i} - \frac{P_0 e^2}{I_i} + \frac{M e}{I_i} \quad (6.13)$$

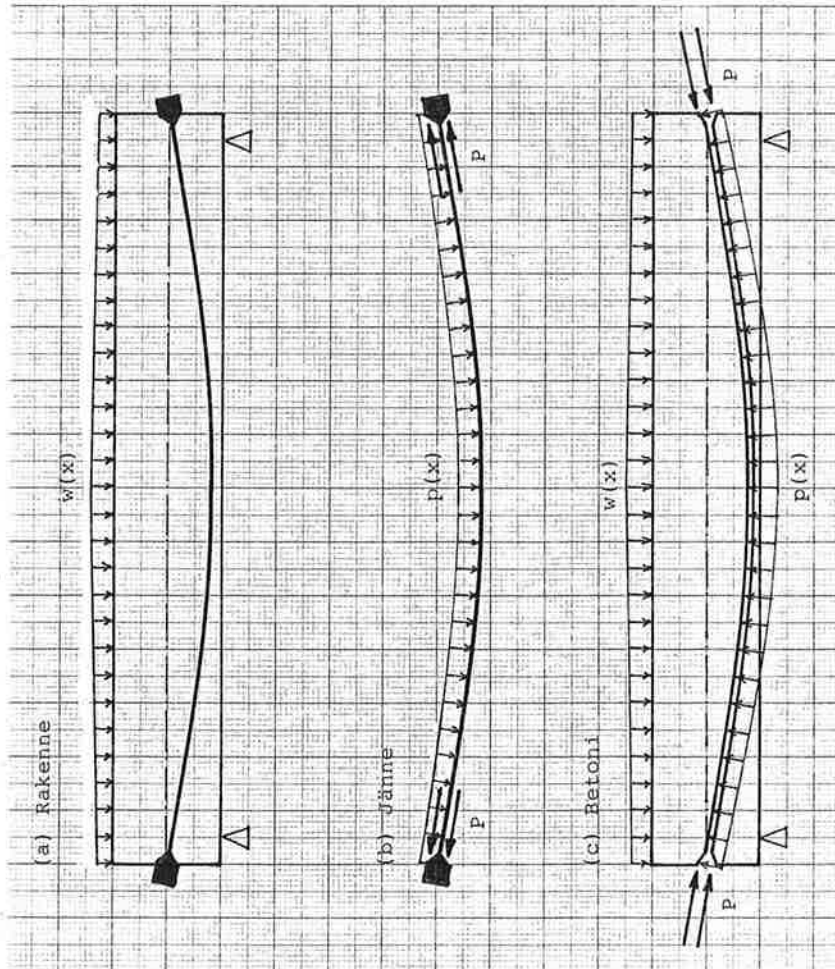
ja

$$\sigma_p = \alpha_p \sigma_{cp} + \sigma_{p0}, \quad (6.14)$$

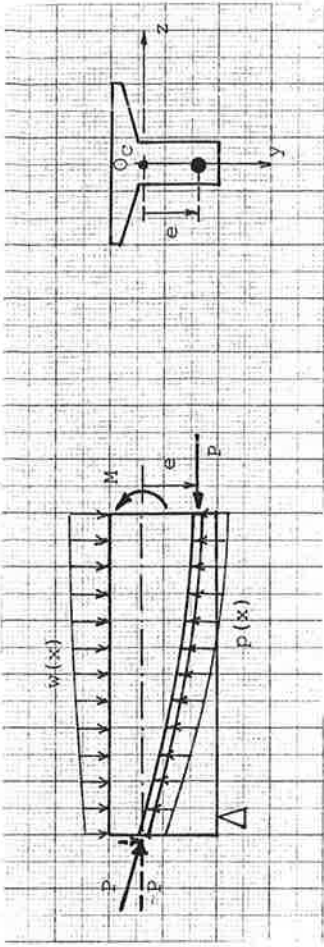
missä $\sigma_{p0} = E_p \Delta \epsilon_p = P_0 / A_p$ ja tartuntajänteen tapauksessa $\sigma_{p0} = \sigma_{p0}$ alusta.

6.12 "Voima jänteessä" tarkastelutapa

"Voima jänteessä" tarkastelutavassa otaksutaan, että jänteen ja betonin välillä ei ole tartuntaa. Likiarvolaskelmissa myös jänteen ja betonin välinen kitka jätetään huomioimattomaksi. Kuvan 6.1b esittää jänteen vapaakappalekuviota ankkureineen ja kuva 6.1c palkin betoniosan vapaakappalekuviota. Palkin päiden ja ankkurien välissä vaikuttaa jännevoiman P suuruinen kosketusvoima sekä betonin ja jänteen välissä jakautunut kosketusvoima $p(x)$. Voiman ja vastavoiman periaatteen mukaan näiden voimien suunta on mainituissa vapaakappalekuvioissa vastakkainen.



Kuva 6.1: "Voima jänteessä" tarkastelutavan periaate: (a) jännepalkki, (b) jänteen vapaakappalekuvio ja (c) palkin betoniosan vapaakappalekuvio.



Kuva 6.2: Jännepalkin vasemman puoliskon betoniosan vapaakappalekuvio.

Kuva 6.2 esittää puhtaan taivutuksen alaisen palkin betoniosaa, joka on katkaistu tarkasteltavan poikkileikkauksen kohdalta, siihen vaikuttavine voimineen. Yhdistämällä poikkileikkaukseen vaikuttavat jännevoima P ja ulkoisesta kuormituksesta $w(x)$ aiheutuva taivutusmomentti M betonipinnan pintakeskiössä O_C vaikuttavaksi normaaliavoimaksi ja taivutusmomentiksi saadaan

$$N_C = -P \quad (6.15a)$$

ja

$$M_C = -Pe + M. \quad (6.15b)$$

Soveltamalla normaaliavoiman ja taivutusmomentin rasittaman poikkipinnan palkin akselin venymän ja käyrästymän kaavoja betonipoikkileikkaukselle saadaan

$$\epsilon = \frac{N_C}{E_C A_C}, \quad \kappa = \frac{M_C}{E_C I_C} \quad (6.16)$$

ja edelleen tulokset

$$\epsilon = -\frac{P}{E_C A_C}, \quad \kappa = -\frac{Pe}{E_C I_C} + \frac{M}{E_C I_C} \quad (6.17)$$

Soveltamalla normaaliavoiman ja taivutusmomentin rasittaman poikkipinnan jännityksen kaavaa betonipoikkileikkaukselle saadaan

$$\sigma_C = \frac{N_C}{A_C} + \frac{M_C}{I_C} y, \quad (6.18)$$

ja edelleen tulos

$$\sigma_C = -\frac{P}{A_C} - \frac{Pe}{I_C} y + \frac{M}{I_C} y. \quad (6.19)$$

Jos palkissa on betoniteräksia, voidaan niiden vaikutus huomioida muuntamalla ne betonipinnaksi (vrt. kuva 5.20) ja käyttämällä vastaavaa pinta-alaa A_i ja jäyhyysmomenttia I_i . Useissa tapauksissa jänteen pinta-ala on siksi pieni, että suurta virhettä ei tehdä, vaikka betonipinnan (josta jänteeet on korvattu reijillä), sijasta käytetään täyttä poikkipintaa. Toisin sanoen tehdään likimääräistykset $A_c \approx A$ ja $I_c \approx I$. Jatkossa käytetään pinta-alalle merkintää A ja jäyhyysmomentille I riippumatta siitä millä tavalla ne todellisuudessa on määritetty. Kaavat (6.17) ja (6.19) saavat näin muodon

$$\epsilon = -\frac{P}{E_c A}, \quad \kappa = -\frac{P e}{E_c I} + \frac{M}{E_c I}, \quad (6.20)$$

$$\sigma_c = -\frac{P}{A} - \frac{P e}{I} Y + \frac{M}{I} Y. \quad (6.21)$$

Betonin reunajännityksille saadaan nyt lausekkeet

$$\sigma_{ylä} = -\frac{P}{A} - \frac{P e}{W_{ylä}} + \frac{M}{W_{ylä}} \quad (6.22a)$$

ja

$$\sigma_{ala} = -\frac{P}{A} - \frac{P e}{W_{ala}} + \frac{M}{W_{ala}}, \quad (6.22b)$$

missä taivutusvastukset ovat

$$W_{ylä} = \frac{I}{Y_{ylä}} \quad (6.23a)$$

ja

$$W_{ala} = \frac{I}{Y_{ala}}. \quad (6.23b)$$

"Voima jänteeessä" tarkastelutavassa käytetään jännevoimalle P alkutilassa arvoa P_0 . Tällöin nähdään kaavojen (6.21) ja (6.22) olevan läheistä sukua "venymäyhteensopivuuksien" tarkastelutavan kaavojen (6.9) ja (6.10) kanssa. Erona on vain, että "voima jänteeessä" tarkastelutavassa käytetään muunnetun poikkipinnan sijasta betonipoikkipintaa. "Venymäyhteensopivuuksien" tarkastelutapaa voidaan pitää tartuntajännepalkkien yhteydessä oikeaoppisena kun taas "voima jänteeessä" tarkastelutapa on yksinkertaistettu likimenetelmä. "Voima jänteeessä" nettelyn olettamukset ovat paremmin voimassa tartunnattomin jänteen jännitetyissä rakenteissa sekä ankkurijännepalkeissa ennen injektointia.

"Voima jänteeessä" tarkastelutapa soveltuu erittäin hyvin kaikkien jännitettyjen rakenteiden alustavaan suunnitteluun. Koska betonipoikkipinnan pinta-ala ja jäyhyysmomentti ovat muunnetun poikkipinnan vastaavia suureita pienempiä, on "voima jänteeessä" tarkastelutapa tartunnallisten jänneiden yhteydessä, jossa se on likimääräisempi, varmallalla puolella.

"Voima jänteeessä" tarkastelutavassa betonin viruman ja kutistuman, jänneiden relaksaation sekä mahdollisten lämpötilan muutosten otaksutaan pienentävän jännevoimaa P siten, että sillä on lopputilassa arvo P_∞ . Alutavassa suunnittelussa käytetään apuna ns. jännityshäviökerrointa

$$\eta = \frac{P_\infty}{P_0}, \quad (6.24)$$

jolle käytetään arvioitua arvoa. Usein arvio jänteen jännityshäviöstä ilmaistaan häviöprosenttina

$$\frac{P_0 - P_\infty}{P_0} \cdot 100\% = (1 - \eta) \cdot 100\%. \quad (6.25)$$

Kun rakenteen lopulliset mitat sekä jänneiden ja betoniterästen koot ja määrät ovat tiedossa, voidaan arvioitujen jännityshäviökertoimen arvon oikeellisuus todentaa tarkempien lopullisten laskelmien yhteydessä.

"Voima jänteeessä" tarkastelutavan yllä esitellyt kaavat soveltuvat siis sekä alku- että lopputilan tarkasteluihin, kun niissä esiintyvälle jännevoimalle P käytetään alkutilassa arvoa

$$P = P_0 \quad (6.26a)$$

ja lopputilassa arvoa

$$P = P_\infty = \eta P_0. \quad (6.26b)$$

Määritettäessä alustavia arvoja korotukselle ja lopputilan taipumalle voidaan käyttää momentti-käyritysmääriippuvuutta (6.20), jossa kimmomoduulille lopputilassa käytetään tehollista arvoa

$$E_{cc} = \frac{E_c}{1 + \phi}. \quad (6.27)$$

6.2 Betonin sallitut jännitykset

Jännitettyjen betonirakenteiden alustavassa mitoituksessa on tarkoituksenmukaista käyttää sallittuja jännityksiä. Ne voidaan määrittellä monella tavalla, joista tässä esitetään yksi [8].

Betonin sallitut puristusjännitykset ovat alkutilassa

$$\sigma_{c0, \text{sall}} = -0,6C \quad (6.28)$$

ja lopputilassa

$$\sigma_{c\infty, \text{sall}} = -0,5C. \quad (6.29)$$

Kaavoissa (6.28) ja (6.29) C on lieriölujuus. Kotimaista kuutiolujuusluokitusta vastaavat lieriölujuuden arvot saadaan taulukosta 6.1.

Betonin sallitut vetojännitykset ovat alkutilassa

$$\sigma_{t0, \text{sall}} = f_{ctk} = 1,7f_{ctk} \quad (6.30)$$

ja lopputilassa

$$\sigma_{t\infty, \text{sall}} = 0. \quad (6.31)$$

Taulukko 6.1: Lujuusluokitusta vastaavat kuutio- ja lieriölujuudet (MPa).

Lujuusluokka	K30	K35	K40	K45	K50	K55	K60	K70	K80	K90	K100
Kuutio särmä 150mm	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100
Lieriö $\phi 150\text{mm} \times 300\text{mm}$	23	27,5	32	37	42	47	52	62	71	80	90

6.3 Alustavan suunnittelun menetelmiä

6.3.1 Jännitysepäyhtälöt

Alkutilassa jännevoima on suurimmillaan ja sillä on arvo $P=P_0$. Kuormituksen on vain oma paino g_1 , jolloin taiputusmomentti on pienimmillään ja sillä on arvo $M=M_{\min}$. Betonin jännitysjakautuma kaksitu-

kisen palkin keskipoikkileikkauksessa on

$$\sigma_c = -\frac{P_0}{A} - \frac{P_0 e}{I} y + \frac{M_{\min}}{I} y. \quad (6.32)$$

Kuva 6.3a esittää sen muodostumista jännevoimasta P_0 aiheutuvaasta osuudesta

$$\sigma_{cP_0} = -\frac{P_0}{A} - \frac{P_0 e}{I} y \quad (6.33)$$

ja momentista M_{\min} aiheutuvaasta osuudesta

$$\sigma_{cM_0} = \frac{M_{\min}}{I} y. \quad (6.34)$$

Yläpinnan jännitys ei saa ylittää betonin sallittua vetojännitystä alkutilassa ja alapinnan jännitys ei saa alittaa betonin sallittua puristusjännitystä alkutilassa. Epäyhtälöin ilmaistuin esitetyt mitoitusehdot ovat

$$\sigma_{0, \text{ylä}} \leq \sigma_{t0, \text{sall}} \quad (6.35)$$

$$\sigma_{0, \text{ala}} \geq \sigma_{c0, \text{sall}}$$

Lopputilassa jännevoima on pienimmillään ja sillä on arvo $P=P_\infty$. Kuormituksena on oma paino g_1 , muu pysyvä kuorma g_2 sekä muuttuva kuorma q , jolloin taiputusmomentti on suurimmillaan ja sillä on arvo $M=M_{\max}$. Betonin jännitysjakautuma kaksitukisen palkin keskipoikkileikkauksessa on

$$\sigma_c = -\frac{P_\infty}{A} - \frac{P_\infty e}{I} y + \frac{M_{\max}}{I} y. \quad (6.36)$$

Kuva 6.3b esittää sen muodostumista jännevoimasta P_∞ aiheutuvaasta osuudesta

$$\sigma_{cP_\infty} = -\frac{P_\infty}{A} - \frac{P_\infty e}{I} y \quad (6.37)$$

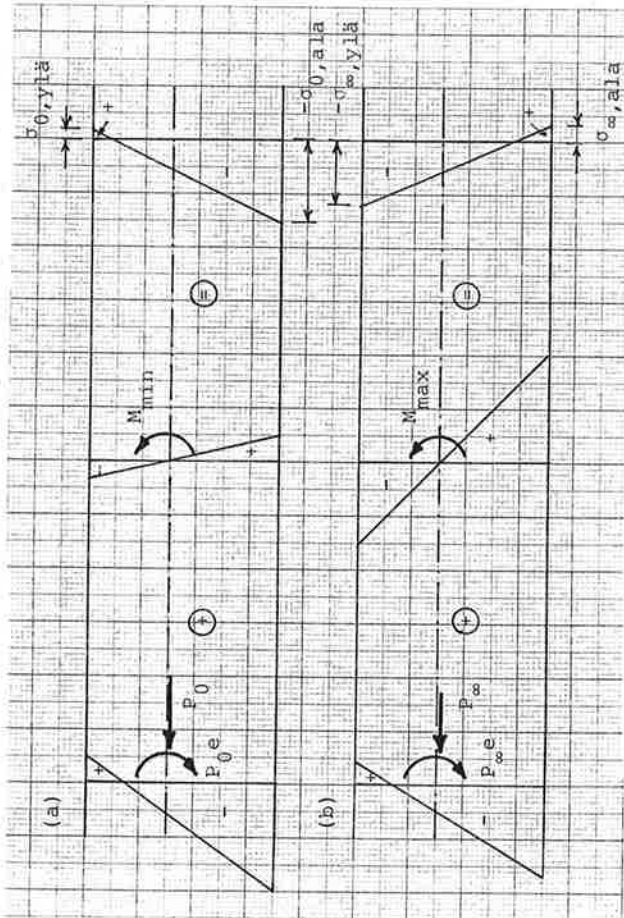
ja momentista M_{\max} aiheutuvaasta osuudesta

$$\sigma_{cM_\infty} = \frac{M_{\max}}{I} y. \quad (6.38)$$

Yläpinnan jännitys ei saa alittaa betonin sallittua puristusjännitystä lopputilassa ja alapinnan jännitys ei saa ylittää betonin sal-

littua vetojännitystä lopputillassa. Epäyhtälöin ilmaistuina esitetyt mitoitusehdot ovat

$$\begin{aligned} \sigma_{\infty, \text{ylä}} &\geq \sigma_{c\infty, \text{sall}} \\ \sigma_{\infty, \text{ala}} &\leq \sigma_{t\infty, \text{sall}} \end{aligned} \quad (6.39)$$



Kuva 6.3: Jännealkin poikkileikkauksen jännitysjakautuman muodostuminen (a) alkutila ja (b) lopputila.

Ehdot (6.35) ja (6.39) yhdessä muodostavat neljän epäyhtälön ryhmän

$$\sigma_{0, \text{ylä}} = -\frac{P_0}{A} - \frac{P_0 e}{W_{\text{ylä}}} + \frac{M_{\text{min}}}{W_{\text{ylä}}} \leq \sigma_{t0, \text{sall}}' \quad (6.40a)$$

$$\sigma_{0, \text{ala}} = -\frac{P_0}{A} - \frac{P_0 e}{W_{\text{ala}}} + \frac{M_{\text{min}}}{W_{\text{ala}}} \geq \sigma_{c0, \text{sall}}' \quad (6.40b)$$

$$\sigma_{\infty, \text{ylä}} = -\frac{P_{\infty}}{A} - \frac{P_{\infty} e}{W_{\text{ylä}}} + \frac{M_{\text{max}}}{W_{\text{ylä}}} \geq \sigma_{c\infty, \text{sall}}' \quad (6.40c)$$

$$\sigma_{\infty, \text{ala}} = -\frac{P_{\infty}}{A} - \frac{P_{\infty} e}{W_{\text{ala}}} + \frac{M_{\text{max}}}{W_{\text{ala}}} \leq \sigma_{t\infty, \text{sall}}' \quad (6.40d)$$

joiden tulee kaikkien olla voimassa. Niitä kutsutaan jännitysepäyhtälöiksi.

6.32 Apusuureita: Sydänkuivion ylä- ja alareunan y-koordinaatit

Sydänkuviolla tarkoitetaan sitä epäkeskisesti puristettua palkin poikkipinnan osaa, jonka sisäpuolella puristusvoima aiheuttaa koko poikkipintaan puristusta. Yksiakselisesti taivutettua jännealkin tapauksessa meidän tarvitsee tuntea vain sydänkuivion ylä- ja alareunan y-koordinaatit $k_{\text{ylä}}$ ja k_{ala} . Sydänkuivion alareunan y-koordinaatin k_{ala} määrittämiseksi saadaan ehto

$$\sigma_{\text{ylä}} = -\frac{P}{A} - \frac{Pk_{\text{ala}}}{W_{\text{ylä}}} = 0, \quad (6.41)$$

josta seuraa jälkimmäinen yhtälöistä

$$k_{\text{ylä}} = -\frac{W_{\text{ala}}}{A},$$

$$(6.42)$$

$$k_{\text{ala}} = -\frac{W_{\text{ylä}}}{A}.$$

edellinen saadaan vastaavanlaisella tarkastelulla. Suureita $k_{\text{ylä}}$ (<0) ja k_{ala} (>0) käytetään seuraavassa lähinnä lyhennysmerkintöinä.

6.33 Jännevoiman ja epäkeskisyyden määrittäminen poikkileikkauksessa: Magnelin kuvio

Jännitysepäyhtälöt (6.40) voidaan helposti saattaa muotoon

$$\text{I: } e \leq k_{\text{ala}} - (\sigma_{t0, \text{sall}} - M_{\text{min}}) \frac{1}{P_0}, \quad (6.43a)$$

$$\text{II: } e \leq k_{\text{ylä}} - (\sigma_{c0, \text{sall}} - M_{\text{min}}) \frac{1}{P_0}, \quad (6.43b)$$

$$\text{III: } e \geq k_{\text{ala}} - (\sigma_{c\infty, \text{sall}} - M_{\text{max}}) \frac{1}{P_{\infty}}, \quad (6.43c)$$

$$\text{IV: } e \geq k_{\text{ylä}} - (\sigma_{t\infty, \text{sall}} - M_{\text{max}}) \frac{1}{P_{\infty}}. \quad (6.43d)$$

Ottamalla vielä huomioon yhteys

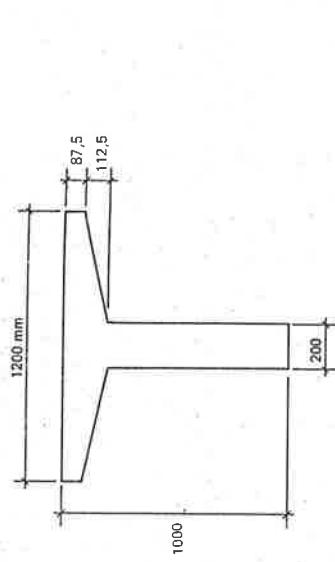
$$P_{\infty} = \eta P_0, \quad (6.44)$$

ne saadaan muotoon

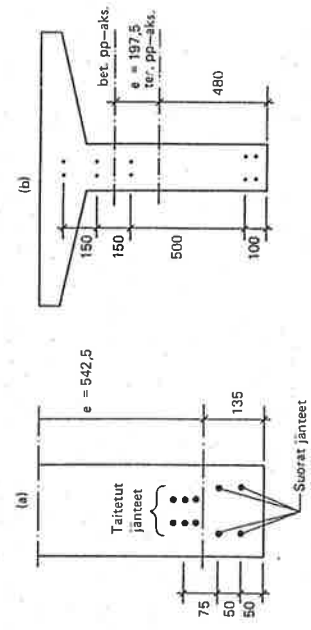
$$\text{I: } e \leq k_{\text{ala}} - (\sigma_{t0, \text{sall}} - M_{\text{min}}) \frac{1}{P_0}, \quad (6.45a)$$

Esimerkki 6.1:

Tarkastellaan tartuntajännepalkkia, jonka poikkileikkaus on kuvan 6.5 mukainen ja jänneväli on $L=18\text{m}$. Betonin lujuusluokka on K45. Oman painon lisäksi esiintyy muu pysyvä kuorma $g_2=0,6\text{kN/m}$ ja käyttökuorma $q=5,0\text{kN/m}$. Jännityshäviöiksi on otaksuttu 17% ja jänteen pinta-ala tateskiön etäisyyden palkin alareunasta tulee olla vähintään 100mm. (a) Piirrä Magnelin kuvio koskien palkin keskikohtaa. (b) Määritä alustavasti, käyttäen epäkeskisyyttä e_{mp} tarvittava jänteen pinta-ala, kun punosten laatu on St 1600/1800 ja valitse sitten tarvittava punosten määrä, kun käytetään ϕ_7 12,5 punoksia. (c) Määritä mahdollisimman pieni jännevoima, jos lopulliseksi jänteiden lukumääräksi on otettu 10 kappaletta ja niiden sijoittelu keskipoikkileikkauksessa on kuvan 6.6a mukainen. (d) Tarkista, että betonin jännitykset alkutilassa, tuella eivät ylitä, kun jänteet tuella on sijoiteltu kuvan 6.6b mukaisesti.



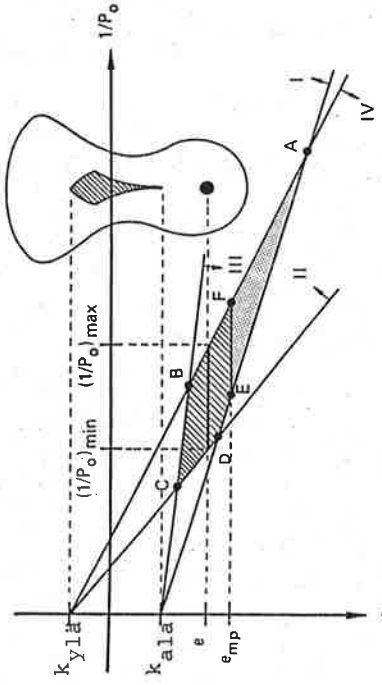
Kuva 6.5: Esimerkkipoikkileikkaus.



Kuva 6.6: Esimerkkipalkin lopullinen jänteiden sijoittelu (a) palkin keskellä ja (b) tuella.

- II: $e_{k_{ylä}} = \frac{1}{\eta} (\sigma_{c0} - \text{sall} W_{ala} - M_{min}) \frac{1}{P_0}$, (6.45b)
- III: $e_{k_{ala}} = \frac{1}{\eta} (\sigma_{c0} - \text{sall} W_{ylä} - M_{max}) \frac{1}{P_0}$, (6.45c)
- IV: $e_{k_{ylä}} = \frac{1}{\eta} (\sigma_{t0} - \text{sall} W_{ala} - M_{max}) \frac{1}{P_0}$. (6.45d)

Epäyhtälöt (6.45) voidaan esittää erittäin havainnollisesti ns. Magnelin diagrammin (kuva 6.4) avulla. Jos jännepalkin poikkileikkauksen geometria on tunnettu ja jännityshäviöt (η) arvioitu etukäteen, jää yhtälöihin (6.45) kaksi tuntematonta P_0 ja e . Jos vastaavat yhtälöt piirrettäisiin (P_0, e)-koordinaatistoon, saataisiin joukko hyperbelejä. Jos yhtälöt sensijaan piirretään ($1/P_0, e$)-koordinaatistoon, saadaan neljä suoraa kuvan 6.4 mukaisesti. Kun epäyhtälömerkkit otetaan lisäksi huomioon (vrt. suoriin liittyvät nuolet), saadaan neljän suoran rajoittama alue ABCD, jonka reuna- ja sisäpisteet vastaavat hyväksyttäviä ($1/P_0, e$)-yhdistelmiä.



Kuva 6.4 Magnelin diagrammi.

Kuvaan 6.4 on merkitty myös epäkeskisyyden käytännöllinen maksimiarvo e_{mp} , jonka määrää jänneterästen mahtuminen poikkileikkaukseen riittävin betonipeittein. Näin ollen alue BCDEF tulee käytännössä kysymykseen. Teoreettisesti kärki A merkitsee edullisinta yhdistelmää (P_0, min, e_{max}), mutta käytännössä sitä vastaa kärki F. Kun kuvaan 6.4 piirretään tarkasteltava poikkileikkaus oikeassa mittakaavassa ja siten, että pintakeskiöakseli z yhtyy $1/P_0$ -akseliin, havainnollisuus on entistä parempi. Kuvassa kiinteää e -arvoa vastaa suurin ja pienin valittavissa oleva P_0 -arvo.

Ratkaisu:

Betoni:

$K45 \rightarrow C=37\text{N/mm}^2$,

$f_{ctk}=0,2K^2/3=2,53\text{N/mm}^2$.

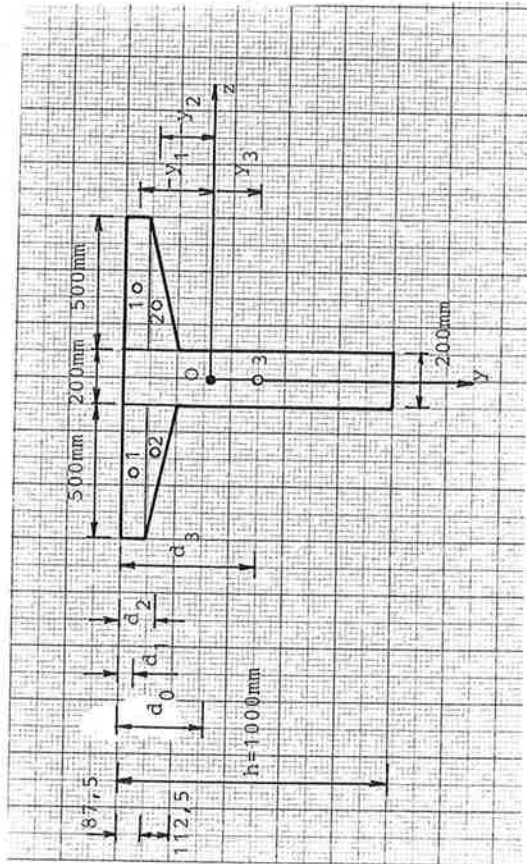
Sallitut jännitykset:

$\sigma_{c0, sall} = -0,6C = -22,2\text{N/mm}^2$,

$\sigma_{c\infty, sall} = -0,5C = -18,5\text{N/mm}^2$,

$\sigma_{t0, sall} = f_{ctk} = 1,7f_{ctk} = 4,30\text{N/mm}^2$,

$\sigma_{t\infty, sall} = 0$.



Kuva 6.7: Poikkileikkaussuureiden määrittäminen.

Poikkileikkaussuureet (kuva 6.7):

$A_1 = b_1 h_1 = 1000 \cdot 87,5 = 87500\text{mm}^2$,

$A_2 = \frac{1}{2} b_2 h_2 = \frac{1}{2} 1000 \cdot 112,5 = 56250\text{mm}^2$,

$A_3 = b_3 h_3 = 200 \cdot 1000 = 200000\text{mm}^2$,

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 343750\text{mm}^2$,

$d_1 = 87,5/2 = 43,75\text{mm}$,

$d_2 = 87,5 + 112,5/3 = 125\text{mm}$,

$d_3 = 1000/2 = 500\text{mm}$,

$d_0 = \frac{A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3}{A} = 322,5\text{mm}$,

$Y_1 = d_1 - d_0 = -278,5\text{mm}$,

$Y_2 = d_2 - d_0 = -197,5\text{mm}$,

$Y_3 = d_3 - d_0 = 177,5\text{mm}$,

$Y_{ylä} = -d_0 = -322,5\text{mm}$,

$Y_{ala} = h - d_0 = 677,5\text{mm}$,

$I_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} = 56 \cdot 10^6\text{mm}^4$,

$I_2 = \frac{b_2 h_2^3}{36} = 40 \cdot 10^6\text{mm}^4$,

$I_3 = \frac{b_3 h_3^3}{12} = 16667 \cdot 10^6\text{mm}^4$,

$I = I_1 + Y_1^2 A_1 + I_2 + Y_2^2 A_2 + I_3 + Y_3^2 A_3 = 32056 \cdot 10^6\text{mm}^4$,

$W_{ylä} = I/Y_{ylä} = -99,40 \cdot 10^6\text{mm}^3$,

$W_{ala} = I/Y_{ala} = 47,32 \cdot 10^6\text{mm}^3$,

$K_{ylä} = -W_{ala}/A = -137,7\text{mm}$,

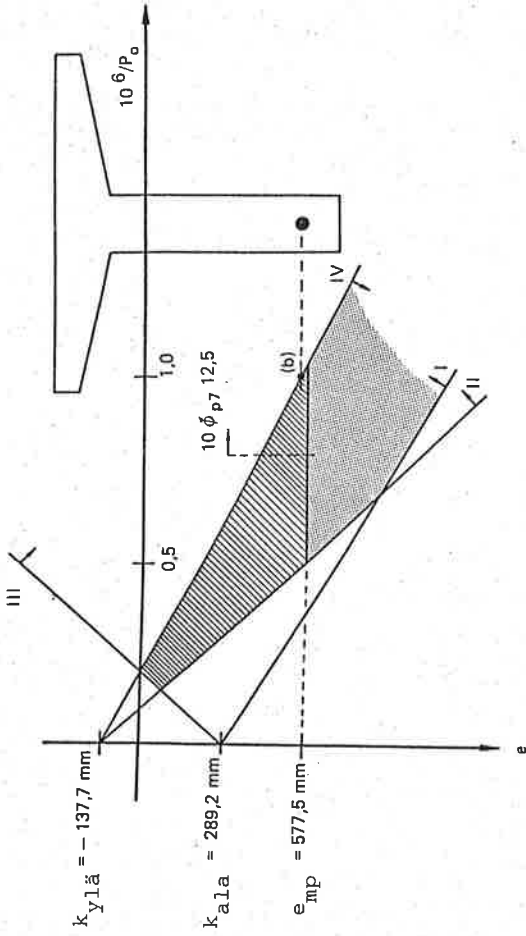
$K_{ala} = -W_{ylä}/A = 289,2\text{mm}$.

Taivutusmomentit:

$g_1 \approx \gamma_C \cdot \lambda = 25 \cdot 0,343750 = 8,59\text{kN/m}$,

$M_{\min} = \frac{g_1 L^2}{8} = \frac{8,59 \cdot 18^2}{8} = 347,9\text{kNm}$,

$M_{\max} = \frac{(g_1 + g_2 + q) L^2}{8} = \frac{(8,59 + 0,6 + 5,0) 18^2}{8} = 574,7\text{kNm}$.



Kuva 6.8: Esimerkkiprobleeman Magnelin kuvio.

Magnelin epäyhtälöt:

$$\text{I: } e \leq k_{\text{ala}} - (\sigma_{t0}, \text{sall}^W_{\text{ylä}} - M_{\text{min}}) \frac{1}{P_0} \approx 289,2 + 775,3 \left(\frac{10^6}{P_0} \right),$$

$$\text{II: } e \leq k_{\text{ylä}} - (\sigma_{c0}, \text{sall}^W_{\text{ala}} - M_{\text{min}}) \frac{1}{P_0} \approx -137,7 + 1398 \left(\frac{10^6}{P_0} \right),$$

$$\text{III: } e \leq k_{\text{ala}} - \frac{1}{\eta} (\sigma_{c0}, \text{sall}^W_{\text{ylä}} - M_{\text{max}}) \frac{1}{P_0} \approx 289,2 - 1523 \left(\frac{10^6}{P_0} \right),$$

$$\text{IV: } e \leq k_{\text{ylä}} - \frac{1}{\eta} (\sigma_{t0}, \text{sall}^W_{\text{ala}} - M_{\text{max}}) \frac{1}{P_0} \approx -137,7 - 692,4 \left(\frac{10^6}{P_0} \right).$$

(a) Magnelin kuvio on esitetty kuvassa 6.8.

(b) Tarvittava jänteen pinta-ala ja punosten määrä:

$e_{\text{mp}} = y_{\text{ala}} - 100 \text{ mm} = 577,5 \text{ mm}$. Optimipiste on suoran $e = e_{\text{mp}}$ ja suoran IV leikkauspiste. Saadaan

$$577,5 = -137,7 + 692,4 \left(\frac{10^6}{P_0} \right) \Rightarrow P_0 = \frac{692,4 \cdot 10^6}{577,5 + 137,5} = 968,5 \text{ kN}.$$

Jänteen sallittu jännitys alkutiliassa (kaava 2.15):

$$\sigma_{p0}, \text{sall} = \begin{cases} 0,75f_{\text{puk}} = 0,75 \cdot 1800 \\ 0,85f_{p0}, 2k = 0,85 \cdot 1600 \end{cases} = 1350 \text{ N/mm}^2.$$

Tarvittava jänteen pinta-ala:

$$A_{p,\text{min}} = P_0 / \sigma_{p0} = 968,5 \cdot 10^3 / 1350 = 717,4 \text{ mm}^2.$$

Tarvittava punosten lukumäärä:

$$n = A_{p,\text{min}} / 93 \text{ mm}^2 = 7,7 \approx 8 \text{ kpl}.$$

(c) Pienin jännevoima lopullisella punosten (10kpl) sijoittelulla:

$e = y_{\text{ala}} - 135 \text{ mm} = 542,5 \text{ mm}$. Jännevoima P_0 saadaan yhtälöstä IV ko. e:n arvolla, ts.

$$542,5 = -137,7 + 692,4 \left(\frac{10^6}{P_0} \right) \Rightarrow P_0 = \frac{692,4 \cdot 10^6}{542,5 + 137,5} = 1018,2 \text{ kN}.$$

Vastaava lopputilan jännevoima on $P_{\infty} = \eta P_0 = 0,83 \cdot 1018,2 = 845,1 \text{ kN}$.

(d) Betonin jännitysten tarkistus tuella alkutiliassa:

Tuella $M_{\text{min}} = 0$ ja kuvan 6.6b perusteella $e = y_{\text{ala}} - 480 \text{ mm} = 197,5 \text{ mm}$.

Saadaan

$$\sigma_{0,\text{ylä}} = -\frac{P_0}{A} - \frac{M_{\text{min}}}{W_{\text{ylä}}} + \frac{P_0 e}{W_{\text{ylä}}} = -\frac{1018,2}{343,75} - \frac{1018,2 \cdot 197,5}{-99,40 \cdot 10^3} = -0,94 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{0,\text{ala}} = -\frac{P_0}{A} - \frac{M_{\text{min}}}{W_{\text{ala}}} + \frac{P_0 e}{W_{\text{ala}}} = -\frac{1018,2}{343,75} - \frac{1018,2 \cdot 197,5}{47,32 \cdot 10^3} = -7,21 \text{ N/mm}^2$$

Nähdään, että

$\sigma_{0,\text{ylä}} < \sigma_{t0}, \text{sall}$ ja $\sigma_{0,\text{ala}} > \sigma_{c0}, \text{sall}$

mikä onkin odotettua, koska jänteen epäkeskisyyks e on tuella paljon pienempi kuin kentässä.

6.34 Poikkileikkauksen määrittäminen: Guyonin taivutusvastusten lausekkeet

Jännitysepäyhtälöt (6.43a) ja (6.43c) saadaan helposti, käyttäen lisäksi yhteyttä (6.44), muotoon

$$\eta (\sigma_{t0}, \text{sall}^W_{\text{ylä}} - M_{\text{min}}) \leq P_{\infty} (k_{\text{ala}} - e)$$

ja

$$P_{\infty}(k_{\text{ala}} \cdot e) \leq \sigma_{\text{C}\infty, \text{sall}}^W \text{ylä}^M \text{max} \quad (6.46b)$$

Niistä saadaan nyt

$$\eta(\sigma_{\text{t}0, \text{sall}}^W \text{ylä}^M \text{min}) \leq \sigma_{\text{C}\infty, \text{sall}}^W \text{ylä}^M \text{max} \quad (6.47)$$

ja edelleen yläreunan taivutusvastukselle lauseke

$$W_{\text{ylä}} \leq \frac{M_{\text{max}} - \eta M_{\text{min}}}{\sigma_{\text{C}\infty, \text{sall}} - \eta \sigma_{\text{t}0, \text{sall}}} \quad (<0) \quad (6.48a)$$

Vastaavasti saadaan jännityspähtälöistä (6.43b) ja (6.43d) lähtien alareunan taivutusvastukselle lauseke

$$W_{\text{ala}} \geq \frac{M_{\text{max}} - \eta M_{\text{min}}}{\sigma_{\text{t}\infty, \text{sall}} - \eta \sigma_{\text{c}0, \text{sall}}} \quad (>0) \quad (6.48b)$$

Yhtälöt (6.48) kutsutaan Guyonin taivutusvastusten lausekkeiksi. Niitä voidaan käyttää hyväksi jännepalkin poikkileikkausta valittaessa.

Esimerkki 6.2:

Tarkastellaan vastakkaisilta reunoiltaan vapaasti tuettua jännelaat-
taa, jonka jänneväli on $l=12\text{m}$, betonin lujuusluokka on K40, jänni-
tyshäviöt ovat 17% ja jänteen pintakeskiön etäisyyden laatan alapi-
nasta tulee olla vähintään 75mm. Jänteiden otaksutaan kaartuvan poik-
kipinnan pintakeskiöakselille tuilla. Oman painon g lisäksi esiintyy
hyötykuorma $q=25\text{kN/m}^2$. Määritä tarvittava laatan paksuus ja jänne-
voima lopputilassa.

Ratkaisu:

Sallitut jännitykset:

$$\sigma_{\text{c}0, \text{sall}} = -0,6 \cdot 32 = -19,2 \text{N/mm}^2,$$

$$\sigma_{\text{c}\infty, \text{sall}} = -0,5 \cdot 32 = -16,0 \text{N/mm}^2,$$

$$\sigma_{\text{t}0, \text{sall}} = 1,7 \cdot 0,2 \cdot 40^2/3 = 3,98 \text{N/mm}^2,$$

$$\sigma_{\text{t}\infty, \text{sall}} = 0.$$

Jännityshäviökerroin on $\eta=0,83$. Otaksutaan laatan paksuudelle alus-
tavasti $h=450\text{mm}$, jolloin $g=0,45 \cdot 25=11,25\text{kN/m}^2$. Nyt on

$$M_{\text{min}} = M_g = gL^2/8 = 11,25 \cdot 12^2/8 = 202,5 \text{kNm/m},$$

$$M_{\text{max}} = M_{g+q} = (g+q)L^2/8 = 36,25 \cdot 12^2/8 = 652,5 \text{kNm/m}.$$

Saadaan

$$W_{\text{ylä}} \leq \frac{M_{\text{max}} - \eta M_{\text{min}}}{\sigma_{\text{C}\infty, \text{sall}} - \eta \sigma_{\text{t}0, \text{sall}}} = \frac{652500 - 0,83 \cdot 202500}{-16,0 - 0,83 \cdot 3,98} = -25095 \text{mm}^3/\text{m},$$

$$W_{\text{ala}} \geq \frac{M_{\text{max}} - \eta M_{\text{min}}}{\sigma_{\text{t}\infty, \text{sall}} - \eta \sigma_{\text{c}0, \text{sall}}} = \frac{652500 - 0,83 \cdot 202500}{0 - 0,83 \cdot (-19,2)} = 30398 \text{mm}^3/\text{m},$$

Laatan paksuudelle saadaan nyt

$$\frac{h^2}{6} \geq 30398 \text{mm}^3 \Rightarrow h \geq 427 \text{mm}. \text{ Valitaan } h=430 \text{mm}.$$

Korjataan omapaino ja taivutusmomentit paksuutta vastaaviksi:
 $g=0,430 \cdot 25=10,75\text{kN/m}^2$,

$$M_{\text{min}} = M_g = gL^2/8 = 10,75 \cdot 12^2/8 = 193,5 \text{kNm/m},$$

$$M_{\text{max}} = M_{g+q} = (g+q)L^2/8 = 36,25 \cdot 12^2/8 = 643,5 \text{kNm/m}.$$

Taivutusvastukset ja sydänkuvio:

$$-W_{\text{ylä}} = W_{\text{ala}} = 1000 \text{mm} \cdot h^2/6 = 30,817 \cdot 10^6 \text{mm}^3/\text{m}.$$

$$-k_{\text{ylä}} = k_{\text{ala}} = h/6 = 71,7 \text{mm}.$$

Epäkeskisyyks:

$$e = h/2 - 75 \text{mm} = 140 \text{mm}.$$

Magnelin epähtälöt:

$$\text{I: } e \leq k_{\text{ala}} - (\sigma_{\text{t}0, \text{sall}}^W \text{ylä}^M \text{min}) \frac{1}{P_0} \Rightarrow 140 \leq 71,7 + 316,2 \left(\frac{10^6}{P_0} \right),$$

$$\text{II: } e \leq k_{\text{ylä}} - (\sigma_{\text{c}0, \text{sall}}^W \text{ala}^M \text{min}) \frac{1}{P_0} \Rightarrow 140 \leq -71,7 + 785,2 \left(\frac{10^6}{P_0} \right),$$

$$\text{III: } e \leq k_{\text{ala}} - \frac{1}{\eta} (\sigma_{\text{C}\infty, \text{sall}}^W \text{ylä}^M \text{max}) \frac{1}{P_0} \Rightarrow 140 \leq 71,7 + 181,2 \left(\frac{10^6}{P_0} \right),$$

$$\text{IV: } e \leq k_{\text{ylä}} - \frac{1}{\eta} (\sigma_{\text{t}\infty, \text{sall}}^W \text{ala}^M \text{max}) \frac{1}{P_0} \Rightarrow 140 \leq -71,7 + 775,3 \left(\frac{10^6}{P_0} \right).$$

Epähtälöistä seuraa P_0 lle

$$P_0 \geq 4629 \text{kN/m}, P_0 \geq 3709 \text{kN/m}, P_0 \leq 2653 \text{kN/m}, P_0 \leq 3662 \text{kN/m},$$

eli

3662kN/m = $P_0 \leq 3709 \text{ kN/m}$,
 joten (koska $P_\infty = 0, 83 P_0$) jännevoimalle saadaan lopputilassa
 $3039 \text{ kN/m} = P_\infty \leq 3078 \text{ kN/m}$.

6.35 Apusuureita: Rajasydämen ylä- ja alareunan y-koordinaatit

Rajasydämellä tarkoitetaan sitä kuormittamattoman ($M=0$) jännepalkin poikkileikkauksen osaa, jonka sisäpuolella sijaitessaan jänne ei aiheuta sallittujen jännitysten ylityksiä alku- eikä lopputilassa. Vksakselisesti taivutetun jännepalkin tapauksessa meidän tarvitsee tuntea vain rajasydämen ylä- ja alareunan y-koordinaatit $k'_{ylä}$ ja k'_{ala} . Alkutilassa saadaan kaksi ehtoa

$$\sigma_0, ylä = - \frac{P_0}{A} - \frac{P_0 e}{W_{ylä}} = - \sigma_{t0, sall} \quad (6.49a)$$

ja

$$\sigma_0, ala = - \frac{P_0}{A} - \frac{P_0 e}{W_{ala}} = - \sigma_{c0, sall} \quad (6.49b)$$

joista seuraa jänteen epäkeskisyydelle e kaksi arvoa

$$e_1 = k'_{ala} \left(1 - \frac{\sigma_{t0, sall}}{\sigma_{x0}} \right) \quad (6.50a)$$

ja

$$e_2 = k'_{ylä} \left(1 - \frac{\sigma_{c0, sall}}{\sigma_{x0}} \right), \quad (6.50b)$$

joissa on käytetty lyhennysmerkintää

$$\sigma_{x0} = - \frac{P_0}{A}. \quad (6.51)$$

Rajasydämen alareunan y-koordinaatti on näistä pienempi, ts.

$$k'_{ala} = \min(e_1, e_2). \quad (6.52)$$

Vastaavanlaisella tarkastelulla lopputilassa saadaan rajasydämen yläreunan y-koordinaatin $k'_{ylä}$ lauseke. Tulokset molemmille lopullisissa muodoissaan ovat

$$k'_{ylä} = \max \left[k'_{ala} \left(1 - \frac{\sigma_{c0, sall}}{\sigma_{x0}} \right), k'_{ylä} \left(1 - \frac{\sigma_{t0, sall}}{\sigma_{x0}} \right) \right], \quad (6.53a)$$

$$k'_{ala} = \min \left[k'_{ala} \left(1 - \frac{\sigma_{t0, sall}}{\sigma_{x0}} \right), k'_{ylä} \left(1 - \frac{\sigma_{c0, sall}}{\sigma_{x0}} \right) \right], \quad (6.53b)$$

missä

$$\sigma_{x0} = - \frac{P_0}{A},$$

(6.54a)

$$\sigma_{x0} = - \frac{P_\infty}{A} = - \frac{\eta P_0}{A}.$$

(6.54b)

6.36 Jänteen sijoittaminen pitkin palkkia: rajavyöhykke

Kaavat (6.43) voidaan saattaa muotoon

$$e \leq k'_{ala} \left(1 - \frac{\sigma_{t0, sall}}{\sigma_{x0}} \right) + \frac{M_{min}}{P_0}, \quad (6.55a)$$

(6.55b)

$$e \leq k'_{ylä} \left(1 - \frac{\sigma_{c0, sall}}{\sigma_{x0}} \right) + \frac{M_{min}}{P_0},$$

(6.55c)

$$e \leq k'_{ala} \left(1 - \frac{\sigma_{c0, sall}}{\sigma_{x0}} \right) + \frac{M_{max}}{P_\infty},$$

(6.55d)

$$e \leq k'_{ylä} \left(1 - \frac{\sigma_{t0, sall}}{\sigma_{x0}} \right) + \frac{M_{max}}{P_\infty}.$$

Nämä voidaan yhdistää tulokseksi

(6.56)

$$e_{ylä} \leq e_{ala}'$$

missä

(6.57a)

$$e_{ylä} = k'_{ylä} + \frac{M_{max}}{P_\infty}$$

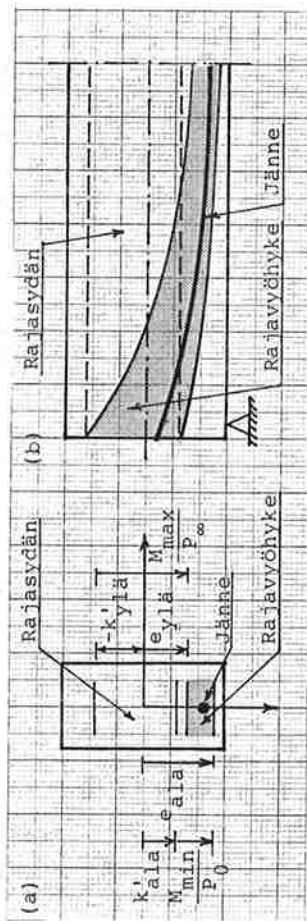
ja

(6.57b)

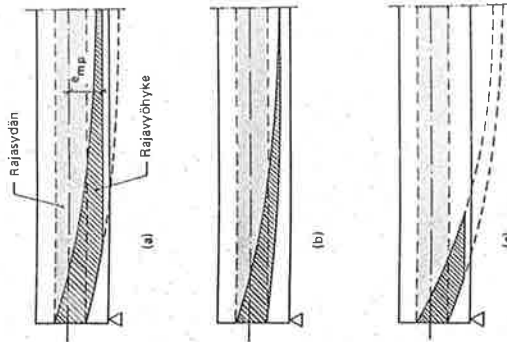
$$e_{ala} = k'_{ala} + \frac{M_{min}}{P_0}.$$

Kaava (6.56) määrittelee jännepalkin ns. rajavyöhykkeen, jonka sällä sijaitessaan jänne ei aiheuta sallittujen jännitysten ylityksiä alku- eikä lopputilassa. $e_{ylä}$ ja e_{ala} ovat rajavyöhykkeen ylä- ja alareunan y-koordinaatit. Niiden määrittäminen tarkasteiltavassa poikkileikkauksessa tapahtuu käyttäen kaavoja (6.53) ja (6.57). Kuva

6.8a esittää rajavyöhykkeen määrittämiseen liittyviä suureita poikkileikkauksessa. Määrittämällä rajavyöhykkeen ylä- ja alareunan y-koordinaatit useassa poikkileikkauksessa pitkin palkin pituutta voidaan määrittää koko palkin rajavyöhyke (kuva 6.8b). Jänteiden sijoittaminen pitkin palkkia voidaan helposti suorittaa huolehtimalla siitä, että jänneterästen pintakeskiö sijoittuu jokaisessa poikkileikkauksessa rajavyöhykkeen sisäpuolelle, ts. epäyhtälöt (6.56) ovat voimassa. Kuvassa 6.9 on vielä esitetty tyyppillisiä rajavyöhykkeen muotoja.



Kuva 6.9: Rajavyöhykkeen määrittämiseen liittyviä suureita.



Kuva 6.10: Tyyppillisiä rajavyöhykkeen muotoja: (a) yleisin mitoitus-tapaus, (b) optimimitoitus ja (c) riittämätön poikkileikkauks.

Esimerkki 6.3:

Tarkastellaan esimerkin 6.1 tartuntajännepalkkia. Sijoitetaan jänteet pitkin palkkia, kun seuraavat yksityiskohdat otetaan huomioon. Jänteiden sijoittelu palkin keskikohdassa $x=9\text{m}$ ja tuella $x=0\text{m}$ on esitetty kuvassa 6.6. Neljä jännettä viedään suorana läpi palkin ja kuusi jännettä taitetaan kohdista, joiden paikat määräytyvät rajavyöhykkeen mukaan. Symmetrian vuoksi palkin vasemman puoliskon $0\text{m} \leq x \leq 9\text{m}$ tarkastelu riittää.

Ratkaisu:

Lähtötiedot koottuina:

$$P_0 = 1018 \text{ kN},$$

$$P = 845 \text{ kN},$$

$$e = 542,5 \text{ mm},$$

$$A = 343750 \text{ mm}^2,$$

$$k_{\text{ylä}} = -137,7 \text{ mm},$$

$$k_{\text{ala}} = 289,2 \text{ mm},$$

$$\sigma_{\text{c0, sall}} = -22,2 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{\text{c}\infty, \text{ sall}} = -18,5 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{\text{t0, sall}} = 4,30 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{\text{t}\infty, \text{ sall}} = 0,$$

$$M_{\text{min}} = 347,9 \text{ kNm},$$

$$M_{\text{max}} = 574,7 \text{ kNm},$$

$$g_1 = 8,59 \text{ kN/m},$$

$$w = 14,19 \text{ kN/m}.$$

Lasketaan apusuureet σ_{x0} ja $\sigma_{x\infty}$:

$$\sigma_{x0} = -\frac{P_0}{A} = -2,96 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{x\infty} = -\frac{P_{\infty}}{A} = -2,46 \text{ N/mm}^2$$

Lasketaan rajajäsymänten ylä- ja alareunan koordinaatit $k'_{ylä}$ ja k'_{ala} :

$$k'_{ylä} = \max \left[k_{ala} \left(1 - \frac{\sigma_{c0, sall}}{\sigma_{x\infty}} \right), k_{ylä} \left(1 - \frac{\sigma_{t0, sall}}{\sigma_{x\infty}} \right) \right]$$

$$= \max(-1886 \text{ mm}, -137,7 \text{ mm}) = -137,7 \text{ mm}$$

$$k'_{ala} = \min \left[k_{ala} \left(1 - \frac{\sigma_{t0, sall}}{\sigma_{x0}} \right), k_{ylä} \left(1 - \frac{\sigma_{c0, sall}}{\sigma_{x0}} \right) \right]$$

$$= \min(709,3 \text{ mm}, 895,1 \text{ mm}) = 709,3 \text{ mm}$$

Muodostetaan minimi ja maksimi taivutusmomenttien $M_{\min}(x)$ ja $M_{\max}(x)$ lausekkeet:

$$M_{\min} = \frac{1}{2} g_1 Lx - g_1 x \frac{x}{2} = \frac{g_1}{2} x(L-x) = 4,295x(18-x)$$

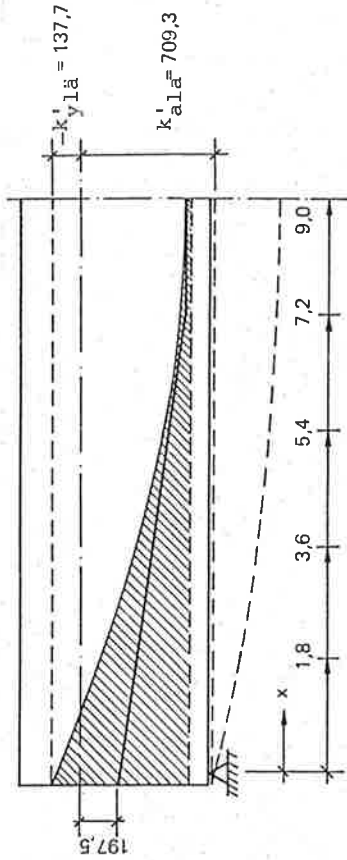
$$M_{\max} = \frac{w}{2} x(L-x) = 7,095x(18-x)$$

Rajavyöhykkeen määrittäminen suoritetaan nyt pisteissä $x=0, 1,8, 3,6, 5,4, 7,2$ ja $9,0$ m ja laskelma on koottu taulukkoon 6.2.

Taulukko 6.2: Rajavyöhykkeen määrittäminen ja lopullisen jänteen epäkeskisyyden $e(x)$ valinta.

x [m]	0	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0
M_{\min} [kNm]	0	125,2	222,7	292,2	334,0	347,9
M_{\max} [kNm]	0	206,9	367,8	482,7	551,7	574,7
M_{\min}/P_0 [kNm]	0	123,0	218,8	287,0	328,1	341,7
M_{\max}/P_{∞} [kNm]	0	244,9	435,3	571,2	652,9	680,1
$e_{ylä} = k'_{ylä} + M_{\max}/P_{\infty}$	-137,7	107,2	297,6	433,5	515,2	542,4
$e_{ala} = k'_{ala} + M_{\min}/P_0$	709,3	832,3	928,1	996,3	1037,4	1051,0
e (valittu) [mm]	197,5	283,8	370,0	456,3	542,5	542,5

Kuvassa 6.11 on esitetty palkin rajavyöhyke. Kuvaan on myös piirretty rajavyöhykettä hyväksi käyttäen valittu lopullinen jänteen pinta-keskiöakseli. Se on välillä $0 \leq x \leq 7,2$ m suora ja kalteva siten, että epäkeskisyydet kohdissa $x=0$ m ja $x=7,2$ m ovat $e=197,5$ mm ja $e=542,5$ mm. Palkin keskiosassa jänteen pintakeskiöakseli on vaakasuora.



Kuva 6.11: Esimerkin palkin rajavyöhykkeen määrittäminen.

6.4 Kuormituksen tasapainottaminen

Ajattelutapa, jota voidaan hyödyntää jännitettyjen rakenteiden alustavassa suunnittelussa, on ns. kuormituksen tasapainottaminen. Se on alunperin esittänyt T.Y. Lin [2].

Rakenteen kuormituksen sanotaan olevan täysin tasapainotettu jänneterästen avulla, mikäli jänteen muoto $e(x)$ ja jännevoiman suuruus P on valittu siten, että rakenteen taipuma on nolla ja betonissa valitsee tasainen puristusjäännitystilä $\sigma_c = -P/A$.

Rakenteen taipuma on nolla, mikäli sen käyrästymä on palkin jokaisessa pisteessä nolla, eli

$$\kappa = -\frac{Pe}{EI} + \frac{M}{EI} = 0, \quad (6.58)$$

josta seuraa jänteen epäkeskisyyden ja taivutusmomentin välille yhteys

$$e(x) = \frac{1}{P} M(x) \quad (6.59)$$

Yhteys (6.59) merkitsee sitä, että jänneprofiili $e(x)$ saadaan momenttipinnasta $M(x)$ kertomalla se jännevoiman käänteisarvolla $1/P$.

Käyttämällä hyväksi yhteyttä (6.59) betonin jännityksen lauseke (6.21) yksinkertaistuu muotoon

$$\sigma_c = -\frac{P}{A}, \quad (6.60)$$

mikä merkitsee sitä, että tasapainoituksuormalla jännepalkissa valitsee tasainen puristusjännitystila.

Käytännössä jännevoiman P ja jänteen epäkeskisyyden $e(x)$ määrittäminen tapahtuu siten, että etsitään taivutusmomentin $M(x)$ ääriarvot M_1, \dots, M_n . Kaavan (6.59) perusteella vastaavat jänteen epäkeskisyydet ovat tällöin

$$e_i = \frac{M_i}{P}, \quad i=1, \dots, n. \quad (6.61)$$

Epäkeskisyyksiä rajoittaa rakenteen poikkipinnan mitat ja jänteiden tarvittava suojapaksuus. Merkitään näitä epäkeskisyyksiä e_i rajoittavia arvoja \bar{e}_i :lla. Rajoittavat ehdot ovat

$$e_i = \begin{cases} \frac{M_i}{P} \geq \bar{e}_i, & \text{jos } e_i \leq 0 \\ \frac{M_i}{P} - \bar{e}_i, & \text{jos } e_i \geq 0 \end{cases}, \quad i=1, \dots, n. \quad (6.62)$$

Kertomalla yhtälöt (6.62) puolittain P/\bar{e}_i :lla, saadaan ehdot

$$P \geq \frac{M_i}{\bar{e}_i}, \quad i=1, \dots, n, \quad (6.63)$$

joten jännevoimalle saadaan tulos

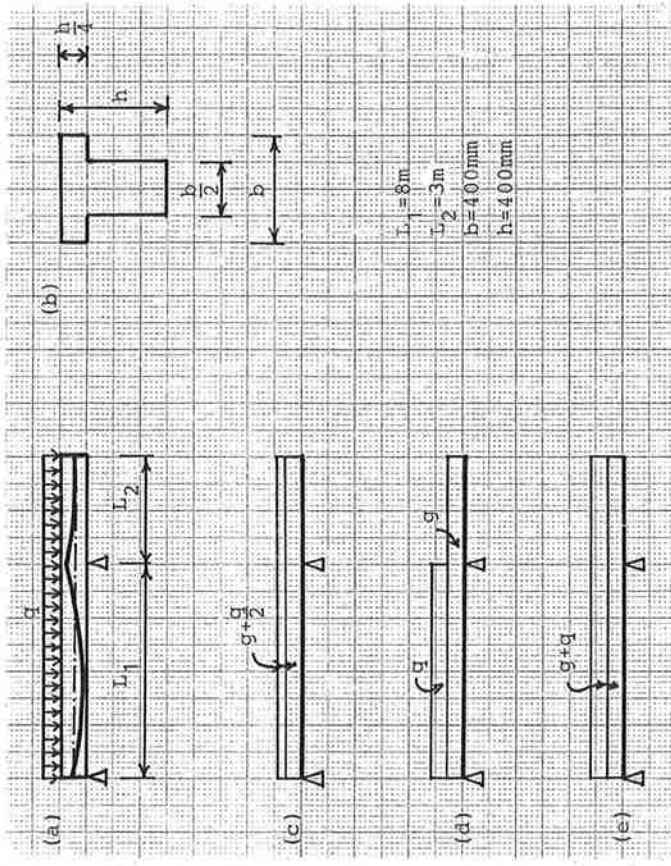
$$P = \max\left(\frac{M_i}{\bar{e}_i}\right). \quad (6.64)$$

Kun jännevoima tunnetaan, saadaan jänteen epäkeskisyyden kaavasta (6.59).

Esimerkki 6.4:

Kuvan 6.12a ankkurijännepalkin pysyvä kuorma on oma paino $g=2,5 \text{ kN/m}$ ja muuttuva kuorma on $q=5 \text{ kN/m}$. Palkin poikkileikkaus on kuvan 6.12b mukainen. Määritä aluksi tasapainottamalla jännevoiman P suuruus ja jänteen epäkeskisyyden e arvot l_m :n väleihin pitkin palkin pituutta, kun tasapainottaminen tapahtuu omalle painolle ja puolikkaalle muuttuvasta kuormasta (vrt. kuva 6.12c) ja jänteen pintakeskiön etäisyys palkin pinnasta tulee olla vähintään 50 mm . Piirrä myös kuva jänteesestä. Selvitä sitten palkin taivutusmomentin suurin ja pienin arvo, kun kysymykseen tulevat kuormitusasennot ovat kuvien 6.12d ja e mu-

kaisat. Määritä lopulta suurinta ja pienintä taivutusmomenttia vastaavat poikkileikkauksen reunajännitykset.



Kuva 6.12: (a) ankkurijännepalkki, (b) poikkileikkaus, (c) tasapainottamiskuormitus, (d) kuormitusasento kenttämomentille ja (e) kuormitusasento tukimomentille.

Ratkaisu:

Poikkileikkauksarvot (kuva 6.13):

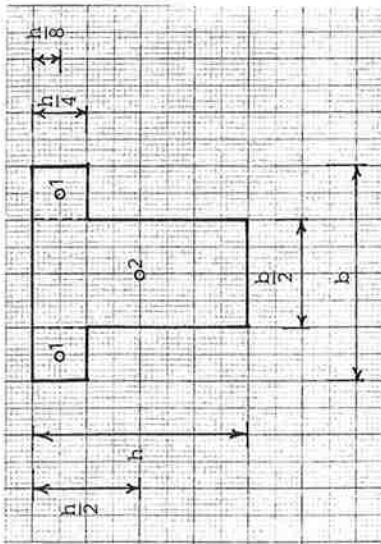
$$A_1 = \frac{1}{8} bh = 0,02 \text{ m}^2, \quad A_2 = \frac{1}{2} bh = 0,08 \text{ m}^2, \quad A = A_1 + A_2 = \frac{5}{8} bh = 0,1 \text{ m}^2,$$

$$d_1 = \frac{h}{8}, \quad d_2 = \frac{h}{2}, \quad d_0 = \frac{A_1 d_1 + A_2 d_2}{A} = \frac{17}{40} h = 0,17 \text{ m},$$

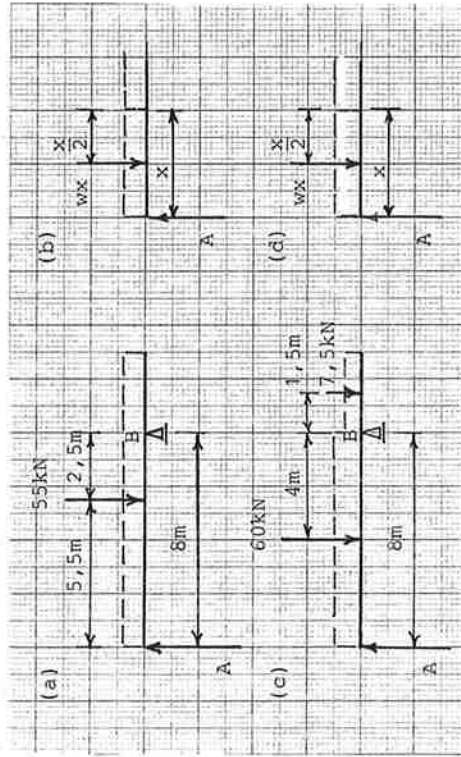
$$Y_1 = d_1 - d_0 = -\frac{3}{10} h, \quad Y_2 = d_2 - d_0 = \frac{3}{40} h,$$

$$I_1 = \frac{b/2(h/4)^3}{12} = \frac{bh^3}{1536},$$

$$I_2 = \frac{b/2h^3}{12} = \frac{bh^3}{24},$$



Kuva 6.13: Esimerkin 6.3 palkin poikkileikkaus.



Kuva 6.14: Taivutusmomenttien laskemiseen liittyviä kuvia.

$$I = I_1 + A_1 y_1^2 + I_2 + A_2 y_2^2 = \frac{433}{7680} b h^3 = 1,443 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$Y_{ylä} = -d_0 = -170 \text{ mm}, Y_{ala} = h - d_0 = 230 \text{ mm}.$$

$$W_{ylä} = \frac{I}{Y_{ylä}} = -8,490 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, W_{ala} = \frac{I}{Y_{ala}} = 6,275 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Epäkeskisyyksien raja-arvot:

$$\bar{e}_{ylä} = Y_{ylä} + 50 \text{ mm} = -120 \text{ mm}, \bar{e}_{ala} = Y_{ala} - 50 \text{ mm} = 180 \text{ mm}.$$

Tasapainottamiskuorma:

$$w = g + \frac{q}{2} = 5 \text{ kN/m}$$

Taivutusmomenttikuvio tasapainottamiskuormasta:

Väli $0 \leq x \leq L_1$:

• Tukireaktio A (kuva 6.14a):

$$A \cdot 8 \text{ m} - 55 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m} = 0 \Rightarrow A = 17,19 \text{ kN}$$

• Taivutusmomentti (kuva 6.14b):

$$M = Ax - wx \cdot \frac{x}{2} = 17,19x - 2,5x^2.$$

Väli $L_1 \leq x \leq L_2$:

• Taivutusmomentti:

$$M = -w \cdot x' \cdot \frac{x'}{2} = -2,5(x')^2, \text{ missä } x' = L_1 + L_2 - x = 11 \text{ m} - x.$$

Taivutusmomentin ääriarvot:

$$M' = 17,19 - 5x = 0 \Rightarrow x = 3,44 \text{ m} \Rightarrow M_{\max} = 29,5 \text{ kNm}.$$

$$M_{\min} = M(L_1) = -22,5 \text{ kNm}.$$

Jännevoima:

$$P = \max \left(\frac{M_{\max}}{e_{\text{ala}}}, \frac{M_{\min}}{e_{\text{ylä}}} \right) = \max(163,9 \text{ kN}, 187,5 \text{ kN}) = 187,5 \text{ kN}.$$

Jänneprofiilin lauseke:

Väli: $0 \leq x \leq L_1$:

$$e = M/P = (17,19x - 2,5x^2) / 187,5 = 0,09168x - 0,01333x^2.$$

Väli $L_1 \leq x \leq L_2$:

$$e = M/P = -2,5(x')^2 / 187,5 = -0,01333x'^2.$$

Taulukossa 6.3 on esitetty tasapainottamiskuormasta aiheutuva taivutusmomentti ja tuloksena saatu jänteen epäkeskisyyksien välein. Kuvasssa 6.15 on esitetty vastaavat kuvaajat.

Maksimi taivutusmomentti kuvan 6.12d kuormituksesta:

Väli $0 \leq x \leq L_1$:

• Tukireaktio A (kuva 6.14c):

$$A \cdot 8 \text{ m} - 60 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} + 7,5 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} = 0 \Rightarrow A = 28,59 \text{ kN}$$

• Taivutusmomentti (kuva 6.14b):

$$M = Ax - wx \cdot \frac{x}{2} = 28,59x - 3,75x^2.$$

• Maksimiarvo:

$$M' = 28,59 - 7,5x = 0 \Rightarrow x = 3,81 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 54,51 \text{ kNm}.$$

Taulukko 6.3: Tasapainottamiskuormasta aiheutuva taivutusmomentti ja jänteen epäkeskisyyden l_m :n väleihin.

x [m]	$M_{g+\frac{q}{2}}$ [kNm]	$e = \frac{M_{g+\frac{q}{2}}}{P}$ [mm]
0	0	0
1	14,7	78,3
2	24,7	130
3	29,1	155
4	28,8	153,3
5	23,4	125
6	13,1	70
7	-2,2	-11,7
8	-22,5	-120
9	-10,0	-53,3
10	-2,5	-13,3
11	0	0

Vastaava epäkeskisyyden:

$$e = 0,09168 \cdot 3,81 - 0,01333 \cdot 3,81^2 = 0,1558 \text{ m}$$

Minimi taivutusmomentti kuvan 6.12e kuormituksesta:

$$M_{\min} = -wL_2 \cdot L_2 / 2 = 7,5 \text{ kN/m} \cdot 3 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} / 2 = -33,75 \text{ kNm}$$

Vastaava epäkeskisyyden:

$$e = -0,120 \text{ m}$$

Maksimi taivutusmomenttia vastaavat reunajännitykset:

$$\sigma_{\text{ylä}} = -\frac{P}{A} - \frac{P e}{W_{\text{ylä}}} + \frac{M_{\max}}{W_{\text{ylä}}} = -1875 + 3441 - 6420 = -4855 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -4,855 \text{ MPa}$$

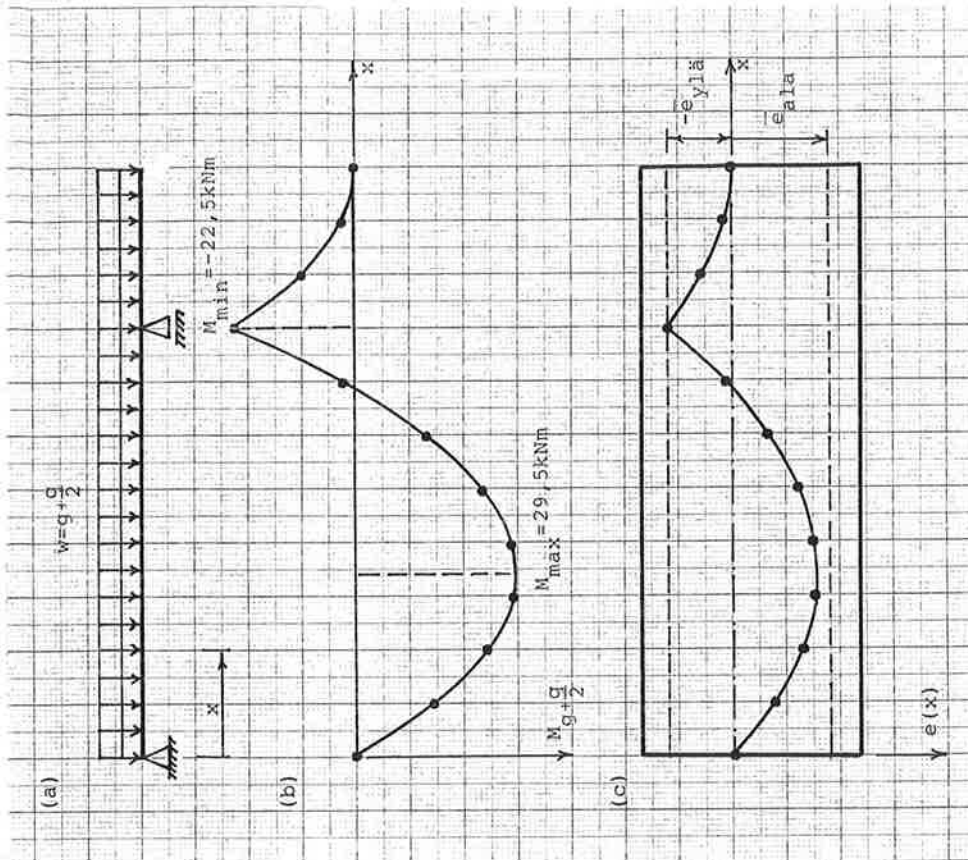
$$\sigma_{\text{ala}} = -\frac{P}{A} - \frac{P e}{W_{\text{ala}}} + \frac{M_{\max}}{W_{\text{ala}}} = -1875 - 4655 + 8687 = 2156 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 2,156 \text{ MPa}$$

Minimi taivutusmomenttia vastaavat reunajännitykset:

$$\sigma_{\text{ylä}} = -\frac{P}{A} - \frac{P e}{W_{\text{ylä}}} + \frac{M_{\min}}{W_{\text{ylä}}} = -1875 - 2650 - 3975 = -550 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -0,550 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{ala}} = -\frac{P}{A} - \frac{P e}{W_{\text{ala}}} + \frac{M_{\min}}{W_{\text{ala}}} = -1875 + 3586 - 5378 = -3668 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = -3,668 \text{ MPa}$$

Todetaan, että maksimi taivutusmomentin kohdalle saatiin vetojännitys $\sigma_{\text{ylä}} = 2,156 \text{ MPa}$. Koska tasapainottaminen suoritetaan yleensä lopputilassa ei vetoa sallita ($\sigma_{\text{tavo}} = 0$). Näin saatu tulos ei sisällällään ole tyydyttävä. Tilanne voitaisiin korjata joko lisäämällä jännevoimaa tai laskemalla jännettä kentässä alemmaksi (kuitenkin siten, että rajaepäkeskisyyden e_{ala} ei ylity).



Kuva 6.15: Tasapainottamiskuormasta aiheutuva taivutusmomenttikäviö ja jänneprofiili.

6.5 Samanarvoiset kuormitukset

Kun käytetään "voima jännteessä" tarkastelutapaa, voidaan jännitetyn rakenteen staattiset laskelmat suorittaa siten, että ajatellaan jänne poistetuksi ja korvatuksi kuormilla, joilla se vaikuttaa muuhun rakenteeseen. Näitä kuormia kutsutaan samanarvoisiksi kuormituksiksi. Lisäämällä ne rakenteeseen vaikuttaviin ulkoisiin kuormiin, voidaan raketeen käsittely palauttaa jännittämättömän rakenteen käsittelyksi. Näin rakenteen analysointi voidaan suorittaa tavanomaisiin rakenteiden mekaniikan menetelmin käyttäen tarvittaessa standardi valmisohjelmia.

Seuraavassa tarkastellaan kuinka samanarvoiset kuormitukset voidaan määrittää:

(a) Päättyänkukuri:

Päättyänkurin kanssa samanarvoinen kuormitus on kuvan 6.16 perusteella epäkeskeinen (epäkeskisyyden e) puristava vaakavoima $P \cos \alpha \approx P$ ja pystykuorma $P \sin \alpha \approx P \alpha$.

(b) Suora jänne:

Jänneen suoralle osalle ei muodostu samanarvoista kuormitusta (kuva 6.17).

(c) Kaareva jänne:

Jänneen kaarevalla osalla (kuva 6.18) samanarvoinen kuormitus on jatkautunut kuorma $p(x)$, jolle saadaan (kuva 6.20a) aluksi

$$p = \frac{P}{R}, \quad (6.65)$$

missä R on jänneen paikallinen kaarevuussäde. Kaarevuussäteeseen käänteisarvolla on (käyrien geometriasta tuttu) lauseke

$$\frac{1}{R} = -\frac{e'''}{[1+(e')^2]^{3/2}} \approx e'''(x), \quad (6.66)$$

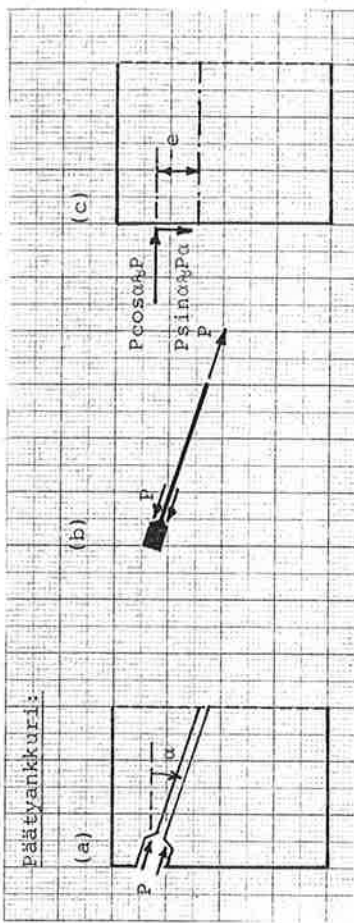
missä on otaksuttu, että $|e'| \ll 1$ joten

$$p(x) = -Pe'''(x). \quad (6.67)$$

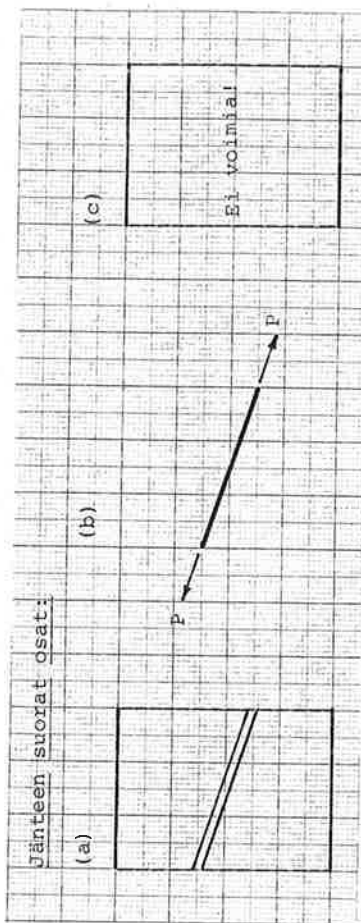
Koska jänneet pyritään muodostamaan paraabelin kaarista, johdetaan seuraavassa samanarvoinen kuormitus kuvan 6.21 mukaiselle paraabelin muotoiselle jänneen osalle välillä $x_1 \leq x \leq x_2$. Sen yhtälö on

$$e(x) = \frac{x_2^2 e_1 - x_1^2 e_2}{\ell^2} - \frac{4x_1 x_2 f}{\ell^2} + \left[\frac{e_2 - e_1}{\ell} + \frac{4(x_1 + x_2)f}{\ell^2} \right] x - \frac{4f}{\ell^2} x^2. \quad (6.68)$$

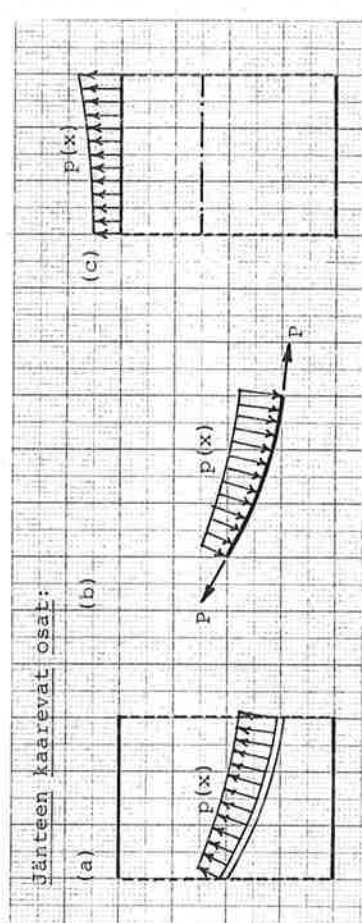
(Kaava (6.68) voidaan todeta oikeaksi sijoittamalla x :lle arvot x_1 ,



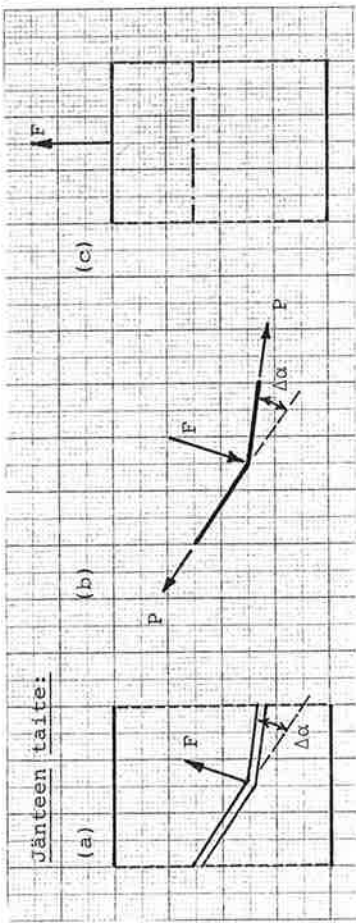
Kuva 6.16: Päättyänkukuri: (a) palkin betoniosa (b) jänne ja (c) samanarvoinen kuormitus.



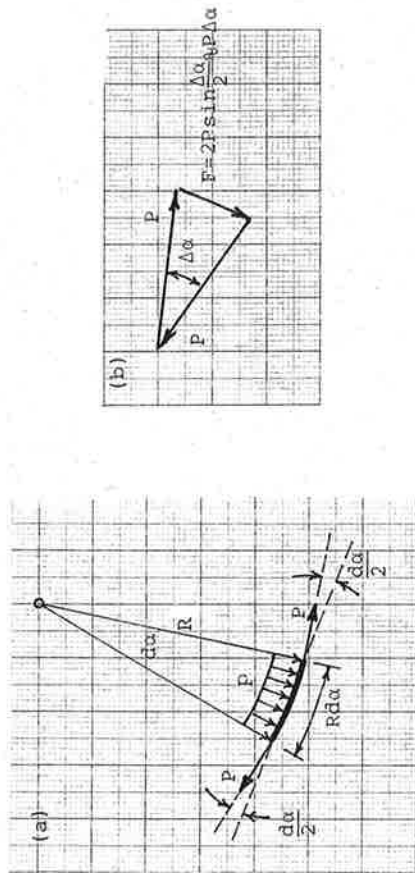
Kuva 6.17: Jänneen suora osa: (a) palkin betoniosa (b) jänne ja (c) samanarvoinen kuormitus.



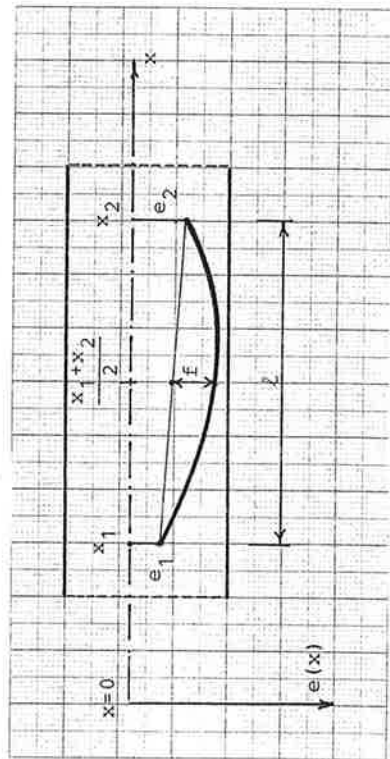
Kuva 6.18: Jänneen kaareva osa: (a) palkin betoniosa (b) jänne ja (c) samanarvoinen kuormitus.



Kuva 6.19: Jänteen taite: (a) palkin betoniosa (b) jänne ja (c) samanarvoinen kuormitus.



Kuva 6.20: Samanarvoisen kuormituksen määrittäminen: (a) kaareva jänne (b) jänteen taite.



Kuva 6.21: Paraabelin muotoinen jänne.

$(x_1+x_2)/2$ ja x_2 ja saamalla vastaavasti e:lle arvot e_1 , $(e_1+e_2)/2+f$ ja e_2 .) Derivoimalla saadaan helposti

$$e'(x) = \frac{e_2 - e_1}{l} + \frac{4(x_1 + x_2)f}{l^2} - \frac{8f}{l^2}x \quad (6.69)$$

ja edelleen

$$e''(x) = -\frac{8f}{l^2}. \quad (6.70)$$

Näin parabelin muotoista jänteen osaa vastaava samanarvoinen kuormitus on tasan jakautunut ja sillä on arvo

$$p = \frac{8Pf}{l^2}. \quad (6.71)$$

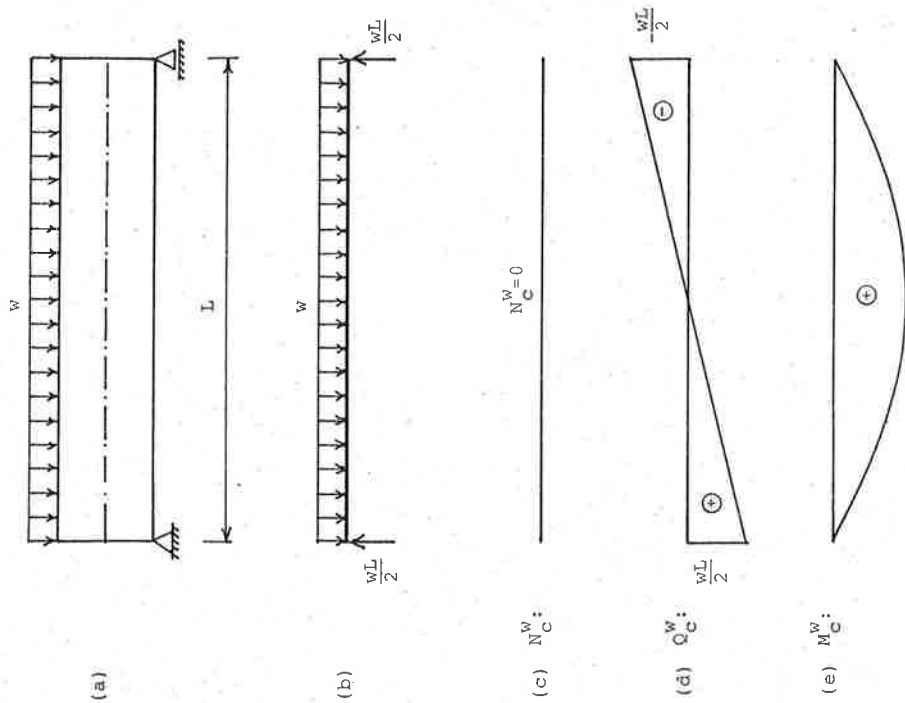
(d) Jänteen taite:

Vaikka jänteissä ei todellisuudessa voi esiintyä äkillisiä taitepisteitä (kulmia), voidaan lyhyt jänteen osa, jossa on pieni kaarevuussäde, korvata laskelmissa taitepisteellä. Taitetta vastaava samanarvoinen kuormitus on pistekuorma, jonka suuruus on $F = 2P \sin(\Delta\alpha/2) \approx P\Delta\alpha$, (kuva 6.20b) missä $\Delta\alpha$ on kaltevuuden α muutos taitepisteessä (kuva 6.19).

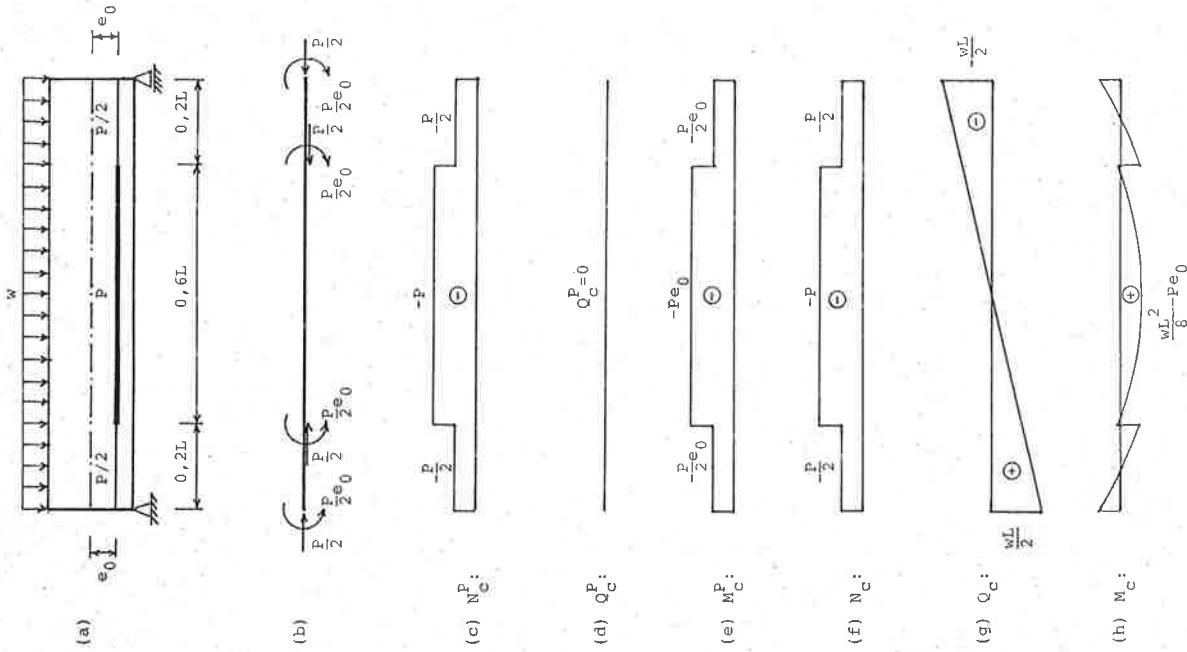
Tarkastellaan asiaa havainnollistavana yksinkertaisena esimerkkinä kaksitukista jännepalkkia, jonka pituus on L ja jota kuormittaa tasan jakautunut ulkoinen kuorma w . Kuva 6.22a esittää palkkia ilman jänteitä, kuva 6.22b sen viivamallia tukireaktioineen sekä kuvat 6.22c, d ja e ulkoisesta kuormasta w palkin betoniosaan aiheutuneiden jännitysresultanttien N_C^w , Q_C^w ja M_C^w jakautumia.

Kuvassa 6.23a palkki on varustettu suorilla jänteillä, joiden yhteenlaskettu jännevoima on P . (Joko kysymyksessä on tartuntajänne palkki, jonka joka toisen jänteen tartunta on poistettu etäisyydelle $0,2L$ tuilta, tai ankkurijännepalkki, jonka joka toinen punos on jännitetty vastakkaisista päistä ja jonka passiiviankurit sijaitsevat etäisyydellä $0,2L$ tuilta.) Kuva 6.23b esittää palkin betoniosan viivamallia, jossa jänne on korvattu samanarvoisilla kuormilla. Kuvat 6.23c, d ja e esittävät jännevoimasta P aiheutuvien palkin betoniosan jännitysresultanttien N_C^P , Q_C^P ja M_C^P jakautumia. Kuvat 6.23f, g ja h esittävät palkin betoniosaan vaikuttavia lopullisia jännitysresultantteja $N_C = N_C^w + N_C^P$, $Q_C = Q_C^w + Q_C^P$ ja $M_C = M_C^w + M_C^P$.

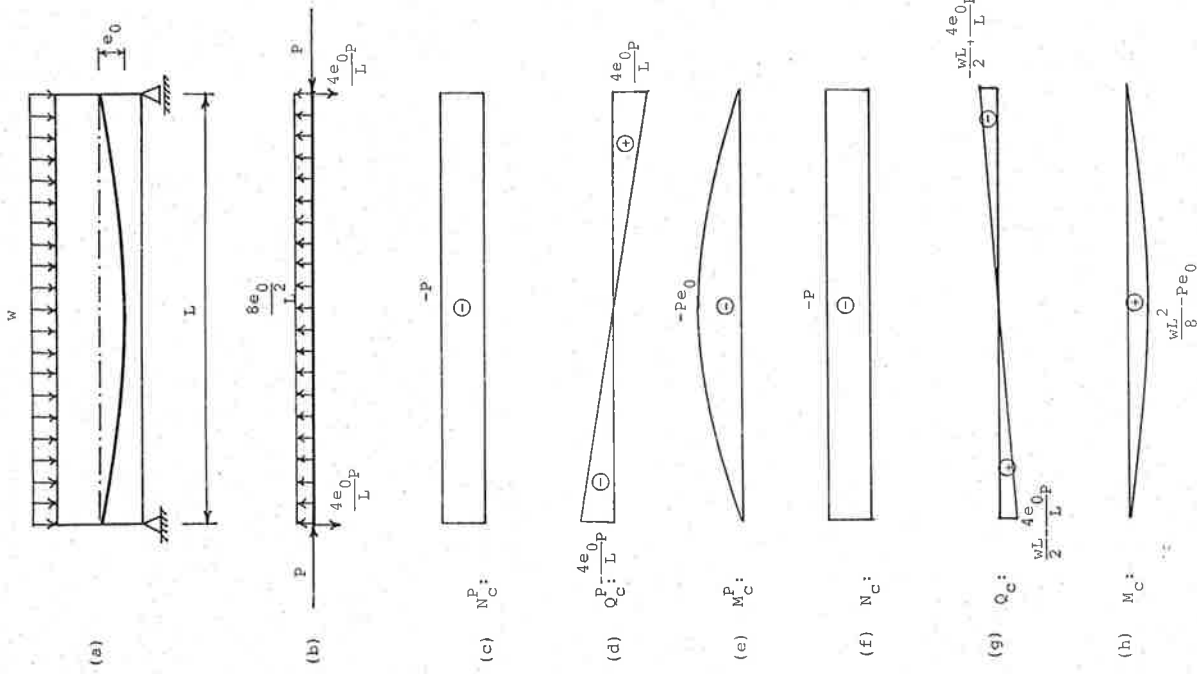
Kuvassa 6.24a palkki on varustettu taitetuilla jänteillä, joiden jännevoima on P . Kuva 6.24b esittää palkin betoniosan viivamallia, jossa jänne on korvattu samanarvoisilla kuormilla. Kuvat 6.24c, d ja e esittävät jännevoimasta P aiheutuvien palkin betoniosan jännitysresultanttien N_C^P , Q_C^P ja M_C^P jakautumia. Kuvat 6.24f, g ja h esittävät palkin betoniosaan vaikuttavien lopullisten jännitysresultantteja $N_C^W+N_C^P$, $Q_C^W+Q_C^P$ ja $M_C^W+M_C^P$.



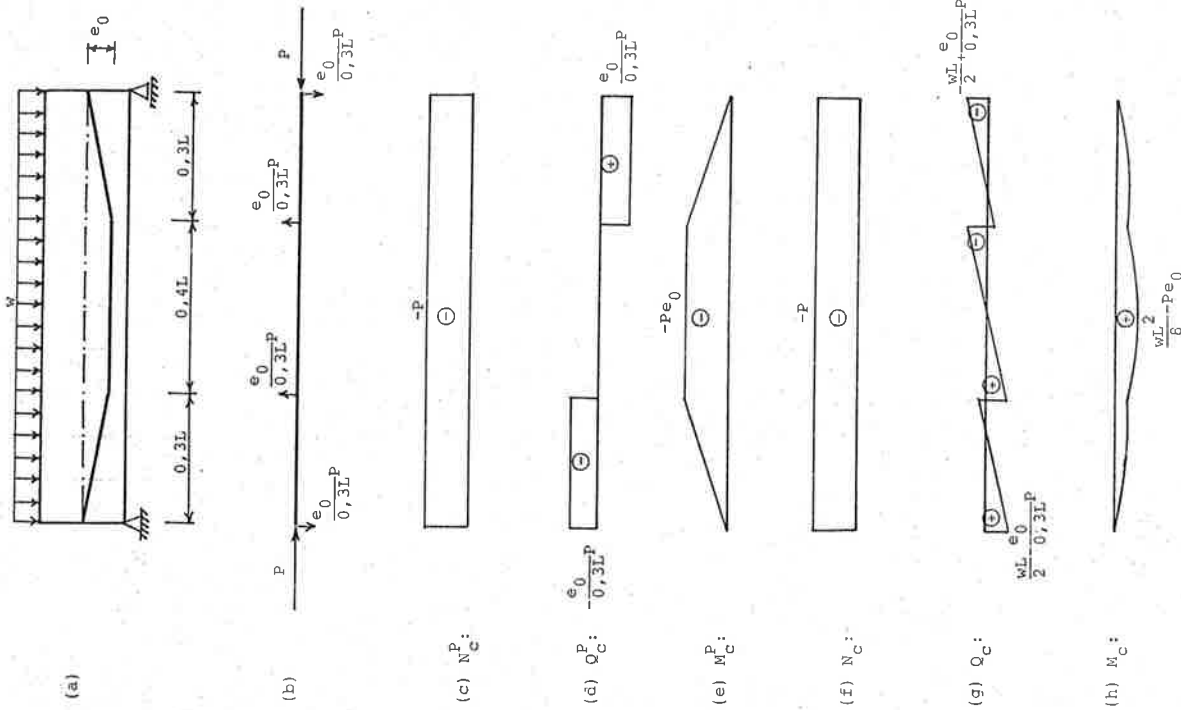
Kuva 6.22: Kaksitukinen jännepalkki: (a) sivukuva, (b) palkin betoniosan viivamalli ulkoisine kuormituksineen, (c), (d) ja (e) jännitysresultantit ulkoisesta kuormasta w .



Kuva 6.23: Kaksitukinen jännepalkki, jossa suorat jänteet: (a) sivukuva, (b) palkin betoniosan viivamalli samanarvoisine kuormituksineen, (c), (d) ja (e) jännitysresultantit jännevoimasta P , (f), (g) ja (h) jännitysresultantit ulkoisesta kuormasta ja jännevoimasta.



Kuva 6.25: Kaksitukinen jännepalkki, jossa paraabelin muotoiset jänteet: (a) sivukuva, (b) palkin betoniosan viivamalli samanarvoisine kuormituksineen, (c), (d) ja (e) jännitysresultantit jännevoimasta P, (f), (g) ja (h) jännitysresultantit ulkoisesta kuormasta ja jännevoimasta.



Kuva 6.24: Kaksitukinen jännepalkki, jossa taitetut jänteet: (a) sivukuva, (b) palkin betoniosan viivamalli samanarvoisine kuormituksineen, (c), (d) ja (e) jännitysresultantit jännevoimasta P, (f), (g) ja (h) jännitysresultantit ulkoisesta kuormasta ja jännevoimasta.

Kuvassa 6.25a palkki on varustettu paraabelin muotoisilla jänteillä, joiden jännevoima on P. Kuva 6.25b esittää palkin betoniosan viivamallia, jossa jänne on korvattu samanarvoisilla kuormilla. Kuvat 6.25c, d ja e esittävät jännevoimasta P aiheutuvien palkin betoniosan jännitysresultanttien N_C^P , Q_C^P ja M_C^P jakautumia. Kuvat 6.25f, g ja h esittävät palkin betoniosaan vaikuttavia lopullisia jännitysresultantteja $N_C = N_C^W + N_C^P$, $Q_C = Q_C^W + Q_C^P$ ja $M_C = M_C^W + M_C^P$.

Palkin betoniosan normaali-jännitys σ_C ja leikkausjännitys τ_C saadaan nyt kussakin edellä esitetystä tapauksesta jännitysresultanttien N_C , Q_C ja M_C avulla soveltamalla lujuusopista tuttuja kaavoja

$$\sigma_C = \frac{N_C}{A} + \frac{M_C Y}{I} \quad (6.73)$$

ja

$$\tau_C = \frac{Q_C S(Y)}{I b(Y)}. \quad (6.74)$$

Otaksutaan että palkki on suorakaide, jonka mitat ovat b ja h, jolloin saadaan helposti

$$A = bh, \quad I = \frac{bh^3}{12}, \quad S(Y) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - Y^2 \right). \quad (6.75)$$

Lausekkeet (6.73) ja (6.74) saavat nyt muodon

$$\sigma_C = \frac{N_C}{bh} + \frac{12M_C}{bh^3} Y \quad (6.76)$$

ja

$$\tau_C = \frac{6Q_C}{bh} \left(\frac{1}{4} - \frac{Y^2}{h^2} \right). \quad (6.77)$$

Kaavojen (6.76) ja (6.77) avulla käyttäen hyväksi jännitysresultanttikuvioita 6.23f, g ja h, 6.24f, g ja h tai 6.25f, g ja h voidaan nyt laskea betonin normaali-jännitys σ_C ja leikkausjännitys τ_C kunkin palkin halutuissa pisteissä.

7. JÄNNEPALKIN TAIVUTUSMURTO

7.1 Johdanto

Jännitettyjen rakenteiden taivutusmurtotarkastelut ovat paljolti saman tyyppisiä kuin jännittämättömissä betonirakenteissa. Tässä käsitellään asiaa kuitenkin melko perusteellisesti ja käytetään hieman tavanomaista fysikaalisempaa lähestymistapaa.

Suomen normeissa rakenteiden murtotarkastelut suoritetaan käyttäen lujuuksien laskenta-arvoja, jotka saadaan jakamalla vastaavat ominaislujuudet materiaalien osavarmuuskertoimilla. Jännebetonirakenteissa (rakenneluokka 1) betonin osavarmuuskerroin on $\gamma_c = 1,35$, betoniterästen $\gamma_s = 1,1$ ja jänneterästen $\gamma_p = 1,15$. Täten betonin puristuslujuuden laskenta-arvo f_{cd} , betoniterästen laskentalujuus f_{yd} sekä jänneteräksen laskentalujuus f_{pyd} saadaan kaavoista

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c \quad (7.1a)$$

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \quad (7.1b)$$

$$f_{pyd} = f_{pyk} / \gamma_p \quad (7.1c)$$

Laskelmissa tehdään seuraavat oletukset:

- Poikkileikkaustasot pysyvät tasoina muodonmuutosten tapahtuessa (Bernoullin otaksuma).
- Materiaalien lujuus- ja muodonmuutosominaisuudet ovat betoninormien kohtien 2.1.5.2 (betoni), 2.1.6.2 (betoniteräs) ja 2.1.6.3 (jännerauditus) mukaiset.
- Betonin vetolujuutta ei oteta huomioon.
- Betonin myötöpuristuma on $\epsilon_{cy} = 2\%$.
- Betonin puristuma poikkileikkauksen painopisteessä ei saa ylittää arvoa

$$\epsilon_c = (0,5 + \frac{\rho_c}{1600}) \% \leq 2\% \quad (7.2a)$$

- Betonin murtopuristuma poikkileikkauksen reunalla on

$$\epsilon_{cu} = (1,1 + \frac{\rho_c}{1000}) \% \leq 3,5\% \quad (7.2b)$$

- Betoniterästen murtovenymä on $\epsilon_u = 10\%$.
- Jänneterästen murtovenymälle käytetään arvoa $\epsilon_{pu} = \Delta\epsilon_p + 10\%$. (Koska tartunnallisissa jänteissä $\epsilon_{cp} = \epsilon_p - \Delta\epsilon_p$, nähdään, että jänteet murtuvat

tuvat, kun betonin venymällä jänteen kohdalla on arvo $\epsilon_{cpu} = 10\%$.)

Tässä yhteydessä käsitellään vain normaalilujuuksisia betoneja. Korkealujuuksisten betonien käsittely poikkeaa edellisistä lähinnä jännitys-muodonmuutoskäyrien sekä myötö- ja murtopuristumien suuruuksien osalta (Vrt. [6] Korkealujuuksisten betonien lisäohjeet).

7.2 Betonin jännitys-muodonmuutoskuvio

Murtotarkasteluissa on ehkä mukavinta käyttää aikaisemmasta poiketen betonille merkkisääntöä, jossa puristumat ja puristusjännitykset ovat positiivisia. Betonin jännitys-muodonmuotoriippuvuus esitetään nyt laskenta-lujuuden f_{cd} avulla. Se on funktio, jonka kaareva osa ($0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cy}$) on paraabelin muotoinen

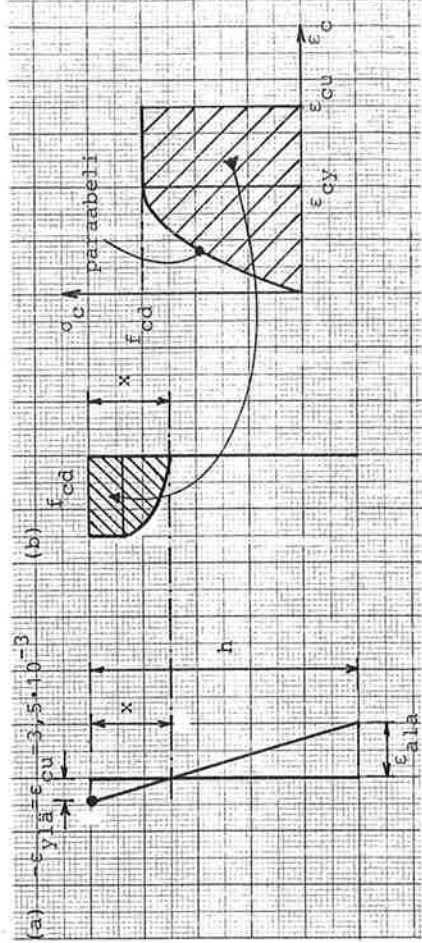
$$\sigma_c = \begin{cases} 0, & \text{kun } \epsilon_c \leq 0 \text{ (veto)} \\ f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right], & \text{kun } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cy} \\ f_{cd}, & \text{kun } \epsilon_{cy} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \end{cases} \quad (7.3)$$

missä siis normaalirunkoaineissa betonissa $\epsilon_{cy} = 2\%$ ja $\epsilon_{cu} = 3,5\%$.

7.3 Betonin jännitys-muodonmuutoskuvio poikkileikkauksessa

7.31 Normaalisti raudoitettu (tai ylliraudoitettu) poikkipinta

Murtorajatilassa normaalisti raudoitettun poikkipinnan betoni murtuu pu-



Kuva 7.1: Normaalisti raudoitettun poikkileikkauksen (a) venymäkuvio (b) betonin jännityskuvion muodostuminen

ristuspuolelta, mikä merkitsee sitä, että positiivisen momentin tapauksessa betonin yläpinnan puristumalla $\epsilon_{ylä}$ on arvo $\epsilon_{cu} = 3,5\%$. Poikkipinnan venymäkuvio on kuvan 7.1a mukainen ja betonin jännityskuvio on kuvan 7.1b mukainen.

Taulukossa 7.1 on esitetty suhteen σ_c/f_{cd} arvot kaarevan osan $0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cy}$ viiden tasapitkän välin keskipisteessä. Niitä voidaan käyttää hyväksi, jos poikkileikkauksen puristusalue on muodoltaan monimutkainen ja sitä approksimoidaan ohutkerrosmallilla.

Taulukko 7.1: Suhteen σ_c/f_{cd} arvot välin $0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cy} = 2\%$ viiden tasapitkän osan keskipisteissä.

$\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}}$	$\frac{\sigma_c}{f_{cd}}$
0,1	0,19
0,3	0,51
0,5	0,75
0,7	0,91
0,9	0,99

Monissa tapauksissa poikkileikkauksen puristusalue on suorakaiteen muotoinen. Tällöin on helppo määrittää integroimalla betonin jännityskuvion resultantti suuruus N_c ja sen etäisyys d_c poikkileikkauksen yläreunasta (kuva 7.2). Tulokset esitetään kaavoina

$$N_c = k_1 f_{cd} b x, \quad (7.4a)$$

ja

$$d_c = k_2 x. \quad (7.4b)$$

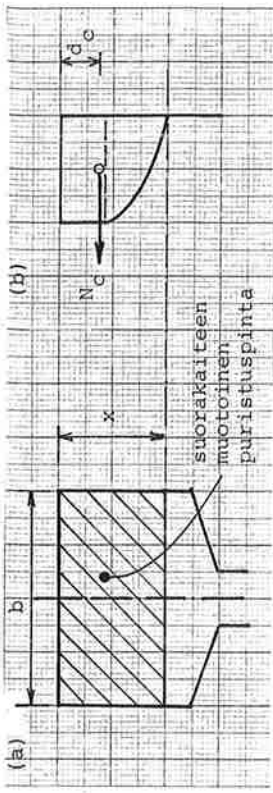
Kertoimeilla k_1 ja k_2 on normaalisti raudoitettu poikkileikkauksessa arvot

$$k_1 = \frac{17}{21} \approx 0,8095 \quad (7.5a)$$

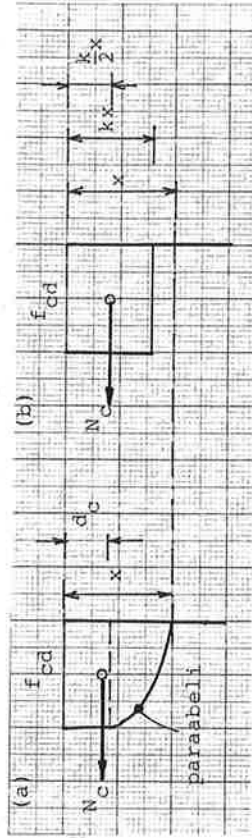
ja

$$k_2 = \frac{99}{238} \approx 0,4160. \quad (7.5b)$$

Betoninormeissa on myös esitetty yksinkertaistettu, suorakaiteen muotoinen betonin jännitysjakautuma, jota voidaan käyttää murtorajatuksena.



Kuva 7.2: Betonin jännityskuvion resultantti ja sen asema normaalisti raudoitettu poikkileikkauksessa.

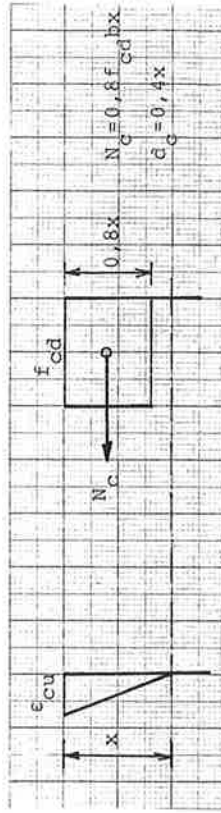


Kuva 7.3: Betonin jännityskuvion korvaaminen suorakaiteella, (a) alkuperäinen jännityskuvio (b) yksinkertaistettu jännityskuvio.

tilassa (ks. [6] kaava (2.25) ja kuva 2.9). Siinä alkuperäinen jännitysjakautuma korvataan suorakaiteen muotoisella jakautumalla, jonka intensiteetti on f_{cd} ja jolla on likimain sama resultantti ja sen vaikutuspiste. Merkitsemällä kuvien 7.3a ja 7.3b resultantit yhtäsuuriksi saadaan

$$k = k_1 = 0,8095 \approx 0,8 \quad (7.6)$$

Kuvassa 7.4 on esitetty normaalisti raudoitettu palkin venymäkuvio

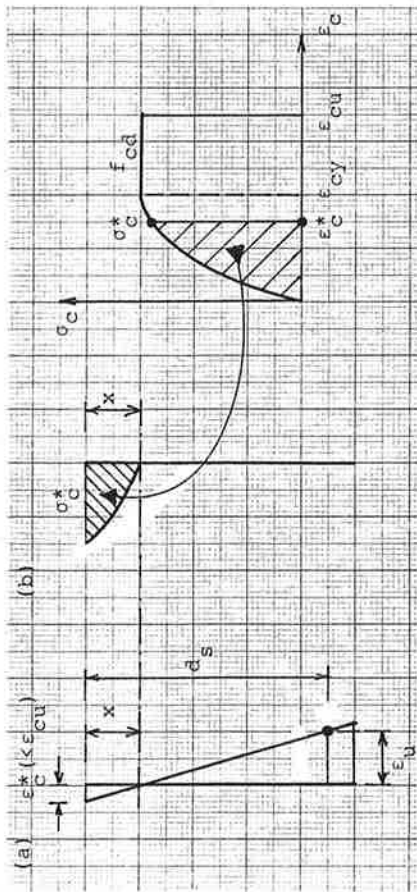


Kuva 7.4: Normaalisti raudoitettu palkin suorakaiteen muotoinen jännityskuvio.

ja ao. suorakaiteen muotoinen betonin jännityskuvio.

7.32 Aliraudoitettu poikkipinta

Aliraudoitettun poikkipinnan rajatilassa murtuminen tapahtuu terästen puolella ja venymäkuvio on kuvan 7.5a mukainen ja jännityskuvio muodostuu kuvan 7.5b mukaisesti.



Kuva 7.5: Aliraudoitettun poikkipinnan (a) venymäkuvio (b) jännityskuvion muodostuminen

Kaavojen (7.4) kertoimille k_1 ja k_2 voidaan nyt johtaa kaavat

$$k_1 = \begin{cases} \frac{1}{3} \left[3 \frac{\epsilon_c^*}{\epsilon_{cy}} - \left(\frac{\epsilon_c^*}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right] & \epsilon_c^* \leq \epsilon_{cy} = 2\% , \\ \frac{1}{3} \left(3 - \frac{\epsilon_{cy}}{\epsilon_c^*} \right) & \epsilon_{cy} \leq \epsilon_c^* \leq \epsilon_{cu} = 3,5\% \end{cases} \quad (7.7a)$$

ja

$$k_2 = \begin{cases} \frac{1}{12k_1} \left[4 \frac{\epsilon_c^*}{\epsilon_{cy}} - \left(\frac{\epsilon_c^*}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right] & \epsilon_c^* \leq \epsilon_{cy} = 2\% , \\ \frac{1}{12k_1} \left[6 - 4 \frac{\epsilon_{cy}}{\epsilon_c^*} + \left(\frac{\epsilon_{cy}}{\epsilon_c^*} \right)^2 \right] & \epsilon_{cy} \leq \epsilon_c^* \leq \epsilon_{cu} = 3,5\% . \end{cases} \quad (7.7b)$$

Kaavoissa (7.7) ϵ_c^* on betonin puristuspuolen reunajännitys.

Kun $\epsilon_{cy} \leq \epsilon_c^* \leq \epsilon_{cu}$ voidaan betonin jännityskuvio riittävällä tarkkuudella

la korvata suorakaideapproksimaatiolla (vrt. kuva 7.3). Vastaavaan tapaan kun kaavan (7.6) yhteydessä meneteltiin saadaan nyt

$$k = k_1 = \frac{1}{3} \left(3 - \frac{\epsilon_{cy}}{\epsilon_c^*} \right) = \frac{\epsilon_c^* - 1/3 \epsilon_{cy}}{\epsilon_c^*} = \frac{\epsilon_c^* - 0,6667\%}{\epsilon_c^*} \approx \frac{\epsilon_c^* - 0,7\%}{\epsilon_c^*} \quad (7.8)$$

eli

$$k = \frac{\epsilon_c^* - 0,7\%}{\epsilon_c^*} . \quad (7.9)$$

Tämä kaava vastaa Betoninormien kaavaa (2.25) sillä erolla, että ϵ_{cu} :n paikalla on ϵ_c^* .

Kuvassa 7.6 on käyrät, joiden avulla kaavojen (7.4) kertoimet k_1 ja k_2 voidaan määrittää betonin reunapuristuman ϵ_c^* funktiona likimääräisesti aliraudoitettulle poikkileikkaukselle.

7.4 Poikkileikkauksen taivutuskapasiteetin määrittäminen

7.41 Normaaliavoiman ja taivutusmomentin lausekkeet

Jos betonin puristusjännitykset, betoniterästen jännitykset ja jännityksen jännitykset voidaan kukin esittää yhtenä osaresultanttina, normaaliavoiman ja taivutusmomentin lausekkeet ovat

$$N = -N_c + N_s + N_p \quad (7.10)$$

ja

$$M = -N_c (d_c - d_0) + N_s (d_s - d_0) + N_p (d_p - d_0) \\ = -N_c d_c + N_s d_s + N_p d_p - N d_0 , \quad (7.11)$$

missä d_0 on pintakeskiön etäisyys poikkileikkauksen yläreunasta ja N_c :n miinusmerkki aiheutuu siitä, että betonin puristus on positiivista. Jos kysymyksessä on puhtas taivutus ($N=0$), taivutusmomentti on voimapari ja se voidaan määrittää esimerkiksi momenttina poikkileikkauksen yläreunan suhteen, ts.

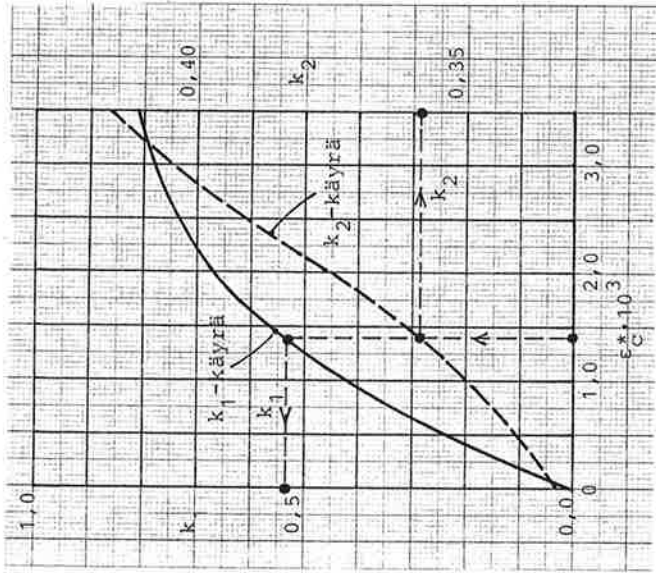
$$M = -N_c d_c + N_s d_s + N_p d_p . \quad (7.12)$$

Jos betonin puristusalue kuvataan ohutkerrosmallilla puhtaana taivutuksen kaavoja (7.10) ja (7.12) vastaavat lausekkeet ovat

$$N = -\sum_{ci} N_{ci} + N_s + N_p \quad (7.13)$$

ja

$$M = -\sum_{ci} N_{ci} d_{ci} + N_s d_s + N_p d_p . \quad (7.14)$$



Kuva 7.6: Suorakaiteen muotoiseen puristuspintaan liittyvät kertotimet k_1 ja k_2 betonin reunapuristuman ϵ_c^* funktiona.

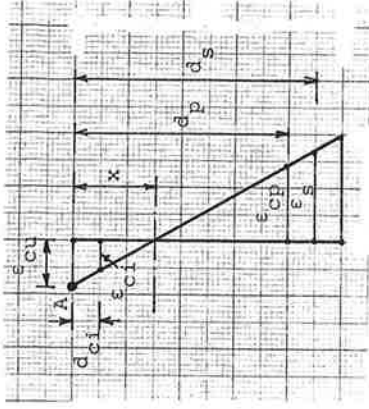
7.42 Taivutuskapasiteetin määrittäminen

Seuraavassa tarkastellaan tilannetta kentässä ($M > 0$). Tarkastelu tuella voidaan palauttaa tarkasteluksi kentässä vaikkapa ajatteleamalla poikkileikkaus käännetyksi ylösalaisin.

Aluksi otaksutaan poikkileikkauksen murtumistapa, ts. onko se normaalisti raudoitettu vai aliraudoitettu. Laskennan kulku on murtumistavasta riippuen pääpiirtein seuraava.

(i) Normaalisti raudoitettu tapaus:

Betoni murtuu ensimmäiseksi, jolloin yläreunan venymällä $\epsilon_{ylä}$ on arvo $\epsilon_{ylä} = -\epsilon_{cu} = -3,5\%$ ja venymäkuvio kulkee kuvan 7.7 pisteen A kautta. Vaihe 1: Määritetään neutraaliakselin asema x yrityksen ja erehdyksen menetelmällä tai analyttisesti siten, että normaaliavoima N saa ulkoista kuormitusta vastaavan arvon, joka puhtaan taivutuksen tapauksessa on $N=0$. Tietyllä x :n arvolla laskelma on seuraava (katso kuvaa 7.7):



Kuva 7.7: Normaalisti raudoitettun poikkileikkauksen venymäkuvio.

- (i) Mikäli puristusalue on suorakaiteen muotoinen määritetään betonin jännityskuvion resultantti N_c ja sen asema d_c .
- (ii) Mikäli puristusalue on monimutkaisempi käytetään sille ohutkerrosmallia. Määritetään ohutkerrosten pintakeskiöiden asemat d_{ci} . Määritetään betonin venymät ϵ_{ci} ohutkerrosten pintakeskiöiden kohdilla kaavalla

$$\epsilon_{ci} = \frac{x - d_{ci}}{x} \epsilon_{cu} \quad (7.15)$$

Määritetään betonin jännitykset σ_{ci} ohutkerroksissa kaavan (7.3) avulla sekä ohutkerrosten osaresultantit N_{ci} .

- Lasketaan betoniterästen venymä, betonin venymä janteen kohdalla ja janteen venymä kaavoilla

$$\epsilon_s = \frac{d_s - x}{x} \epsilon_{cu}' \quad (7.16)$$

$$\epsilon_{cp} = \frac{d_p - x}{x} \epsilon_{cu} \quad (7.17)$$

ja

$$\epsilon_p = \epsilon_{cp} + \Delta \epsilon_p \quad (7.18)$$

- Määritetään betoniterästen ja janteen jännitykset betoninormien jännitys-muodonmuutosriippuvuuksien (betoninormien kuvat 2.4 ja 2.5) avulla sekä osaresultantit N_s ja N_p .
- Lasketaan normaaliavoiman N arvo kaavalla (7.10) tai (7.13).

Vaihe 2: Tarkistetaan betoniterästen ja janteen venymät. Jos murto-

venymä $\epsilon_u = 10\%$ tai $\epsilon_{pu} = \Delta\epsilon_p + 10\%$ ylittyy, on kysymyksessä aliraudoitettu tapaus ja laskenta lopetetaan.

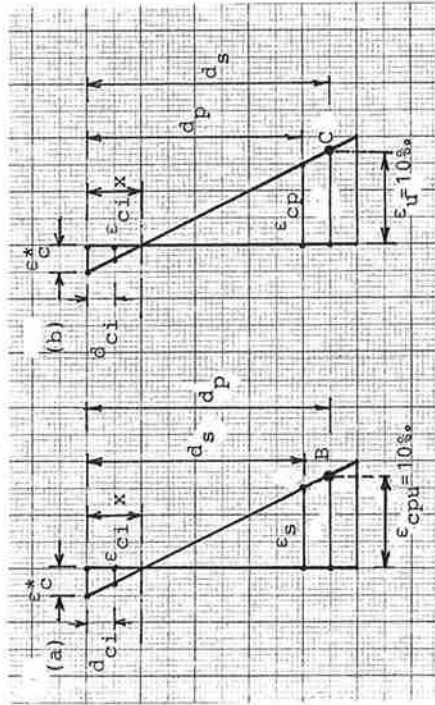
Vaihe 3: Lasketaan taivutuskapasiteetti M_u kaavalla (7.12) tai (7.14).

(iii) Aliraudoitettu tapaus:

Aliraudoitetussa poikkileikkauksessa taivutuskapasiteetti saavutetaan tavallisesti seuraavissa rajatiloissa:

(a) Jänneteräksset murtuvat ensin, jolloin betonin venymällä jänteen kohdalla ϵ_{cp} on arvo $\epsilon_{cpu} = \epsilon_{pu} - \Delta\epsilon_p = 10\%$ ja venymäkuvio kulkee kuvan 7.8a pisteen B kautta. Betoniteräksset myötävät samanaikaisesti.

(b) Betoniteräksset murtuvat ensin, jolloin terästen venymällä ϵ_s on arvo $\epsilon_u = 10\%$ ja venymäkuvio kulkee kuvan 7.8b pisteen C kautta. Jänteet myötävät samanaikaisesti.



Kuva 7.8: Aliraudoitetun poikkileikkauksen venymäkuvio, kun (a) jänneteräksset murtuvat ensin (b) betoniteräksset murtuvat ensin.

Vaihe 1: Määritetään neutraaliakselin asema x yrityksen ja erehdyksen menetelmällä siten, että normaaliavoima N saa ulkoista kuormitusta vastaavan arvon, joka puhtaasti taivutuksen taivutuksessa on $N=0$. Tietyn x :n arvolla laskelma on seuraava (katso kuvaa 7.8):

(i) Mikäli puristusalue on suorakaiteen muotoinen, määritetään ensin betonin reunapuristuma ϵ_c^* tapauksessa (a)

kaavalla

$$\epsilon_c^* = \frac{x}{d-x} \epsilon_{cpu} \quad (7.19a)$$

tai tapauksessa (b) kaavalla

$$\epsilon_c^* = \frac{x}{d_s-x} \epsilon_u \quad (7.19b)$$

Tämän avulla määritetään betonin jännityskuvion resultantti N_c ja sen asema d_c .

(ii) Mikäli puristusalue on monimutkaisempi käytetään sille ohutkerrosmallia. Määritetään ohutkerrosten pintakeskiöiden asemat d_{ci} . Määritetään betonin venymät ϵ_{ci} ohutkerrosten pintakeskiöiden kohdilla tapauksessa (a) kaavalla

$$\epsilon_{ci} = \frac{x-d_{ci}}{d-x} \epsilon_{cpu} \quad (7.20a)$$

tai tapauksessa (b) kaavalla

$$\epsilon_{ci} = \frac{x-d_{ci}}{d_s-x} \epsilon_u \quad (7.20b)$$

Määritetään betonin jännitykset σ_{ci} ohutkerroksissa kuvan (7.3) avulla sekä ohutkerrosten osaresultantit N_{ci} .

• Lasketaan tapauksessa (a) terästen venymä kaavalla

$$\epsilon_s = \frac{d_s-x}{d-x} \epsilon_{cpu} \quad (7.21a)$$

tai tapauksessa (b) betonin venymä jänteen kohdalla ja jänteen venymä kaavoilla

$$\epsilon_{cp} = \frac{d_p-x}{d_s-x} \epsilon_u \quad (7.21b)$$

ja

$$\epsilon_p = \epsilon_{cp} + \Delta\epsilon_p \quad (7.22)$$

• Määritetään terästen jännitykset betoninormien jännitysmuodonmuutosriippuvuuksien (betoninormien kuvat 2.4 ja 2.5) avulla sekä osaresultantit N_s ja N_p .

• Lasketaan normaaliavoiman N arvo kaavalla (7.10) tai (7.13).

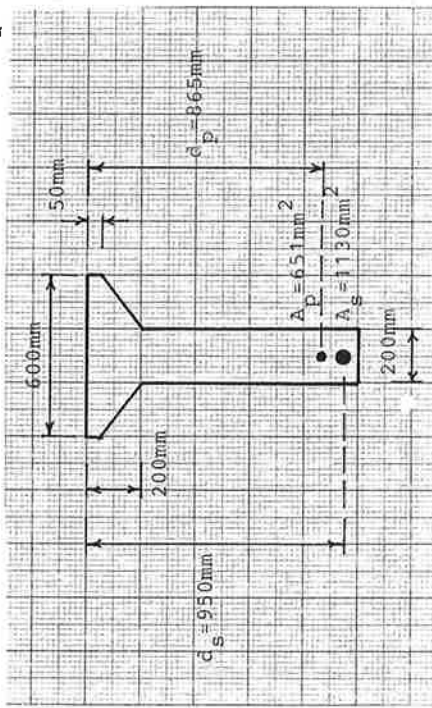
Vaihe 2: Määritetään betonin reunapuristuma sekä tapauksessa (a) betoniterästen venymä ja tapauksessa (b) jänteen venymä. Jos

betonin reunapuristuma ϵ_C^* ylittää murtopuristuman $\epsilon_{cu} = 3,5\%$ on kysymyksessä normaaliiraidoitettu tapaus ja laskenta lo-petetaan. Jos tapauksessa (b) jänne ei myöhdä ts. $\epsilon_p < \epsilon_2 = f_{pyk} / E_p + 2\%$ (ks. betoninormit kuva 2.5) voi olla aiheellista tutkia vielä tapaus, jossa betoniteräksiset ovat murtuneet ja jänne on murtumaisillaan ts. tapaus (a) ilman betoniteräksiä.

Vaihe 3: Lasketaan taivutuskapasiteetti M_u kaavalla (7.12) tai (7.14).

Esimerkki 7.1:

Jännepalkin poikkileikkaus on kuvan 7.9 mukainen. Betonin lujuusluokka on K45, jänteinä on 7 ϕ_7 , 12,5 (St 1600/1800), joiden yhteensä lakattu pinta-ala on $A_p = 651 \text{ mm}^2$, sekä betoniteräksinä 10 ϕ 12 (A400H), joiden pinta-ala on $A_s = 1130 \text{ mm}^2$. Punokset jännitettiin voimalla $P_{alusta} = 685 \text{ kN}$. Laske taivutuskapasiteetti M_u .



Kuva 7.9 Jännepalkin poikkileikkaus.

Ratkaisu:

Yleistä:

Betoni K45:

$$f_{ck} = 0,7 \text{ kN/mm}^2, f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = 31,5 / 1,35 = 23,33 \text{ N/mm}^2$$

Jänneteräksiset 7 ϕ_7 12,5:

$$A_p = 7 \cdot 93 = 651 \text{ mm}^2,$$

$$f_{pyk} = 1600 \text{ N/mm}^2, f_{pyd} = f_{pyk} / \gamma_p = 1600 / 1,15 = 1391 \text{ N/mm}^2$$

Betoniteräksiset 10 ϕ 12 (A400H):

$$A_s = 10 \cdot 113 = 1130 \text{ mm}^2,$$

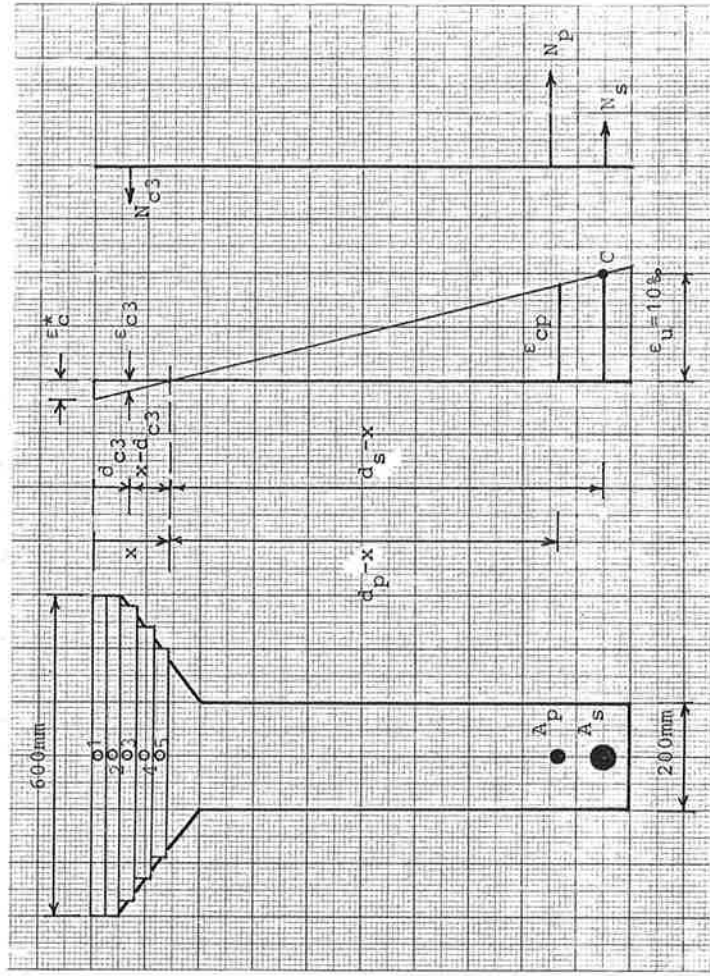
$$f_{yk} = 400 \text{ N/mm}^2, f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 400 / 1,1 = 363,6 \text{ N/mm}^2$$

Jännittämisvenymäero:

$$\Delta \epsilon_p = \frac{P_{alusta}}{E_p A_p} = \frac{685 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 651} = 5,26\%$$

Neutraaliakselin aseman määrittäminen:

Otaksutaan, että kysymyksessä on aliraidoitettu tapaus ja että betoniteräksiset murtuvat ensin (venymäkuvio kulkee kuvan 7.10 pisteen C kautta). Otaksutaan edelleen, että jänteet myötävät samanaikaisesti.



Kuva 7.10: Laskelmaan liittyvä kuva: (a) betonin puristusalueen ohutkerrosmalli (b) venymäkuvio (c) osaresultantit N_{C3} , N_p ja N_s .

Ohutkerrosmalli (kuva 7.10):

$$b_1 = b_2 = 600 \text{ mm}, b_3 = 600 - (x-50)/6/150 \cdot 400, b_4 = 600 - (x-50)/2/150 \cdot 400,$$

$$b_5 = 600 - 5(x-50)/6/150 \cdot 400,$$

$$h_1 = h_2 = 25 \text{ mm}, h_3 = h_4 = h_5 = (x-50)/3,$$

$$d_{c1} = 12,5 \text{ mm}, d_{c2} = 37,5 \text{ mm}, d_{c3} = 50 + (x-50)/6, d_{c4} = 50 + (x-50)/2,$$

$$d_{c5} = 50 + 5(x-50)/6,$$

$$A_{ci} = b_i \cdot h_i \quad i=1, \dots, 5$$

Betonin venymät:

$$\epsilon_{ci} = \frac{x-d_{ci}}{d_s - x} \epsilon_u = \frac{x-d_{ci}}{950-x} 10\% \quad i=1, \dots, 5$$

Betonin jännitykset:

$$\sigma_{ci} = \begin{cases} f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_{ci}}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right], & \text{kun } 0 \leq \epsilon_{ci} \leq \epsilon_{cy} (=2\%) \\ f_{cd}, & \text{kun } \epsilon_{cy} \leq \epsilon_{ci} \leq \epsilon_{cu} (=3,5\%) \end{cases} \quad i=1, \dots, 5$$

Betonin osaresultantit:

$$N_{ci} = \sigma_{ci} A_{ci} \quad i=1, \dots, 5$$

Jänteen resultantti:

$$N_p = f_{pyd} A_p = 1391 \cdot 651 = 905,5 \text{ kN}$$

(Jänteen oletettiin myötävään: $\sigma_p = f_{pyd}$)

Betoniterästen resultantti:

$$N_s = f_{yd} A_s = 363,6 \cdot 1130 = 410,9 \text{ kN}$$

Normaaliavoima:

$$N = -\sum_{ci} N_{ci} + N_p + N_s = -\sum_{ci} N_{ci} + 1316,4 \text{ kN}$$

Ohjelmoimalla lausekkeet esimerkiksi taskulaskimelle, voidaan yrityksen erehdyksen menetelmällä etsiä normaaliavoiman arvoa $N \approx 0$ vastaava neutraaliakselin aseman x arvo. Laskelma on suoritettu taulukossa 7.2 ja tulos on $x=156,25 \text{ mm}$.

Betonin puristuman tarkistus:

$$\epsilon_c^* = \frac{x}{d_s - x} \epsilon_u = \frac{x}{950-x} 10\% = 1,97\% < \epsilon_{cu} = 3,5\% \quad \text{OK.}$$

Taulukko 7.2: Neutraaliakselin aseman x hakeminen esimerkissä.

x [mm]	N [kN]
150	72,03
160	-42,11
156	2,88
157	-8,46
156,25	0,04

Jänteen venymän tarkistus:

$$\epsilon_{cp} = \frac{d_p - x}{d_s - x} \epsilon_u = \frac{865 - x}{950 - x} 10\% = 8,93\% < \epsilon_{cpu} = 10\% \quad \text{OK.}$$

(Tämän voi todeta myös suoraan kuvan 7.10 perusteella.)

Taiivutuskapasiteetin lasku:

Neutraaliakselin aseman arvolla $x=156,25 \text{ mm}$ saadaan

$$N_{c1} = 346,8 \text{ kN}, N_{c2} = 327,7 \text{ kN}, N_{c3} = 367,4 \text{ kN}, N_{c4} = 211,1 \text{ kN}, N_{c5} = 63,3 \text{ kN.}$$

ja

$$d_{c1} = 12,5 \text{ mm}, d_{c2} = 37,5 \text{ mm}, d_{c3} = 67,7 \text{ mm}, d_{c4} = 103,1 \text{ mm}, d_{c5} = 138,5 \text{ mm.}$$

Nyt saadaan taiivutuskapasiteetille tulos

$$M_u = -\sum_{ci} N_{ci} d_{ci} + N_p d_p + N_s d_s = 1101,6 \text{ kNm.}$$

2. ESI- JA JÄLKIJÄNNITTÄMISEN TEKNOLOGIA

2.8 Jälkijännitettyjen jänneiden profiilit

Paraabeli, jonka alin piste on origossa:

- yhtälö

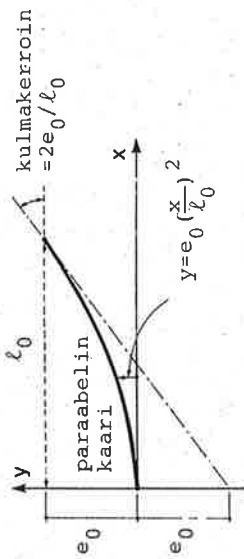
$$y = e_0 \left(\frac{x}{l_0} \right)^2$$

- kulmakerroin kaaren päässä $x = l_0$

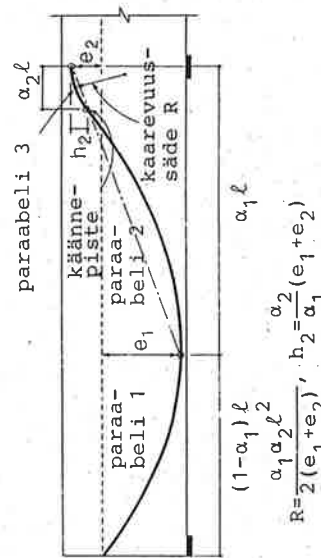
$$k = 2 \frac{e_0}{l_0}$$

- kaarevuussäde origossa

$$R = \frac{l_0^2}{2e_0}$$



(a) paraabelinkaaren geometriaa



(b) paraabelinkaarista muodostuva jänne

Paraabelinkaarista muodostuva jänne:

- paraabelien 2 ja 3 yhteensopivuus

$$\frac{e_1 + e_2}{\alpha_1 l} = \frac{h_2}{\alpha_2 l} \Rightarrow h_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (e_1 + e_2) \quad (2.5)$$

- paraabelien 2 ja 3 yhteinen kulmakerroin käännepesteeissä

$$k = \frac{2(e_1 + e_2)}{\alpha_1 l} \quad (2.6)$$

- jänteen kaarevuussäde tuen yläpuolella

$$R = \frac{(\alpha_2 l)^2}{2h_2} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 l^2}{2(e_1 + e_2)} \quad (2.7)$$

- kaarevuussäteen R minimiarvot

- monipunosjätteet: $75d$
- yksipunosjätteet (ϕ_7 12,5 ja ϕ_7 15,2): 2,50m

2.9 Jälkijännittämisen yhteydessä syntyvät häviöt

Kitkahäviö:

- jännevoima välillä AB

$$P_B = P_A e^{-\mu(\alpha + \beta s)} \quad (2.11)$$

- likikaava

$$\Delta P \approx -P_A \mu(\alpha + \beta s), \text{ kun } \mu(\alpha + \beta s) \leq 0,2. \quad (2.13)$$

- kitkakerroin: $\mu = 0,15 \dots 0,3$

- aaltaisuusluku: $\beta = 0,01/m \dots 0,02/m$

Jänteen sallitut jännitykset:

- jännittämishetkellä

$$\sigma_{p0, \max} = \begin{cases} 0,80f_{\text{puk}} \\ 0,90f_{p0,2k} \end{cases} \quad (2.14)$$

- heti jännittämisen jälkeen

$$\sigma_{p0} = \begin{cases} 0,75f_{\text{puk}} \\ 0,85f_{p0,2k} \end{cases} \quad (2.15)$$

Jänteen pituuden muutos (välillä AB):

Kuva 2.18: Paraabelin muotoisten jänneiden geometriaa.

$$\Delta = \frac{P_{\text{kesk}} \ell}{E_p A_p}$$

missä

$$P_{\text{kesk}} = \frac{1}{\ell} \int_A^B P ds$$

Ankkurointihäviö:

- ankkurointisiirtymä
- jännevoiman muutos
- ankkurointisiirtymän vaikutuspituus

$$\Delta P = 2p \ell_a$$

$$\ell_a = \sqrt{\frac{\Delta A A E}{p}}$$

3. MATERIAALIOMINAISUUDET

3.1 Betonin materiaaliominaisuudet

3.1.1 Lujusluokitus

Taulukko 3.1: Lujusluokitusta vastaavat kuutio- ja lieriölujuudet [MPa].

Lujusluokka	K30	K35	K40	K45	K50	K55	K60	K70	K80	K90	K100
Kuutio särmä 150mm	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100
Lieriö $\phi 150\text{mm} \times 300\text{mm}$	23	27,5	32	37	42	47	52	62	71	80	90

3.1.2 Betonin lujus- ja muodonmuutosominaisuudet

- puristuslujuuden ominaisarvo [MPa]
 - $f_{ck} = 0,7K$. (3.1)
- vetolujuuden ominaisarvo [MPa]
 - $f_{ctk} = 0,2K^{2/3}$. (3.2)
- kimmomoduuli [MPa]
 - $E_c = 5000\sqrt{K}$. (3.3)
- myötöpuristuma
 - $\epsilon_{cy} = 2\text{‰}$. (3.4)
- murtopuristuma
 - $\epsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$. (3.5)

3.1.3 Betonin yksiakselinen jännitys-muodonmuutosriippuvuus

- puristusjännityksen σ_c ja puristuman $\epsilon_{c\sigma}$ riippuvuus

$$\sigma_c = f_{ck} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_{c\sigma}}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right]$$

tai

$$\sigma_c = f_{ck} \left[2 \frac{\epsilon_{c\sigma}}{\epsilon_{cy}} - \left(\frac{\epsilon_{c\sigma}}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right].$$

- alktangenttimoduuli

$$E_{ct} = 2 \frac{f_{ck}}{\epsilon_{cy}} = 700K. \quad (3.7)$$

- vetomurtolujuus vedetyissä rakenteissa f_{ctk} .
- vetomurtolujuus taivutetuissa rakenteissa $f_{ctk} = 1,7 f_{ctk}$.
- Betoninormien jännitys-muodonmuutoskäyrän kaareva osa

$$\sigma_c = f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right]. \quad (3.10)$$

- Jännitys-muodonmuutoskäyrän kaareva osa korkealujuuksisille betoneille

$$\sigma_c = f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cy}} \right)^\alpha \right], \quad (3.11)$$

missä

$$\alpha = 2 - \frac{K-60}{100}. \quad (3.12)$$

3.16 Betonin viruminen

CEB 1978 malli:

- ajanhetkeen t liittyvä virumaluku

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\epsilon_{cc}(t, t_0)}{\epsilon_{ce28}}, \quad (3.13)$$

missä

$$\epsilon_{ce28} = \frac{\sigma_{c0}}{E_{c28}}. \quad (3.14)$$

- betonin virumisvenymä

$$\epsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_{c0}}{E_{c28}} \varphi(t, t_0). \quad (3.15)$$

- betonin kimmoisen alkuvenymä

$$\epsilon_{ce}(t_0) = \frac{\sigma_{c0}}{E_c(t_0)}. \quad (3.16)$$

- betonin vakio jännityksestä σ_{c0} aiheutuva kokonaisvenymä

$$\epsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \sigma_{c0} \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right]. \quad (3.17)$$

- betonin kimmoduuli ajan hetkellä t_0

$$E_c(t_0) = \frac{E_{c28}}{\beta_i(t_0)}, \quad (3.18)$$

missä

$$\beta_i(t_0) = 0,875 \left(\frac{t_0^{+47}}{t_0} \right)^{\frac{1}{7,35}}. \quad (3.19)$$

- virumaluvun kaava

$$\varphi(t, t_0) = \beta_a(t_0) + \varphi_d \beta_d(t-t_0) + \varphi_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)], \quad (3.20)$$

missä

$$\beta_a(t_0) = 0,8 \left[1 - \left(\frac{t_0}{t_0^{+47}} \right)^{\frac{1}{2,45}} \right].$$

Taulukko 3.3:

Ympäristö-olosuhteet	Suhteellinen kosteus R.H.	Viruma φ_{f1}	Kerroin		Kerroin λ
			Kutistuma ϵ_{s1}	Kerroin	
1	2	3	4	5	5
Vesi		0,8	+0,00010		30
Hyvin kosteat ilmasto-olot	90%	1,0	-0,00013		5
Ulkosalla yleensä	70%	2,0	-0,00032		1,5
Hyvin kuivat ilmasto-olot	40%	3,0	-0,00052		1

- kerroin $\varphi_d = 0,4$

- kerroin $\varphi_f = \varphi_{f1} \varphi_{f2}$, missä

$$\varphi_{f1} = 4,45 - 0,035 \cdot R.H., \quad (3.21)$$

$$\varphi_{f2} = \exp(4,4 \cdot 10^{-5} \cdot h_0 - \frac{0,357}{h_0} - \ln(\frac{h_0^{0,1667}}{2,6})), \quad (3.22)$$

- funktio β_d

$$\beta_d(t-t_0) = \left(\frac{t-t_0}{t-t_0^{+328}} \right)^{\frac{1}{4,2}}. \quad (3.23)$$

- funktio β_f

$$\beta_f(t) = \left[\frac{t}{t + K_1(h_0)} \right]^{K_2(h_0)}, \quad (3.24)$$

missä

$$K_1(h_0) = \exp \left[\frac{5,02}{h_0} + \ln \left(6,95 h_0^{1,25} \right) \right], \quad (3.25)$$

$$K_2(h_0) = \exp \left[0,00144 h_0 - \frac{1,1}{h_0} - \ln \left(1,005 h_0^{0,2954} \right) \right]. \quad (3.26)$$

• tehollinen paksuus

$$h_0 = \lambda \frac{2A}{u}.$$

(3.27)

• lämpötilakorjaus

$$t = \frac{\alpha}{30} \sum [(T_i + 10) \Delta t_i], \quad (3.28)$$

missä $\alpha=1$ normaalisti tai hitaasti kovettuville sementteille, $\alpha=2$ nopeasti kovettuville sementteille ja $\alpha=3$ nopeasti kovettuville korkealujuuksisille sementteille

• betonin jännityksestä aiheutuva kokonaisvenymä

$$\epsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \sigma_{c0} \Phi(t, t_0). \quad (3.29)$$

• virumafunktio

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_C(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{C28}} = \frac{\beta_1(t_0) + \varphi(t, t_0)}{E_{C28}}. \quad (3.30)$$

• hyppäyksen ajasta riippuvasta jännityksestä aiheutuva venymä

$$\epsilon_{c\sigma}(t) = \Phi(t, t_0) \sigma_{c0} + \sum \Phi(t, t_i) \Delta \sigma_{ci}. \quad (3.33)$$

• jatkuvasti ajasta riippuvasta jännityksestä aiheutuva venymä

$$\epsilon_{c\sigma}(t) = \Phi(t, t_0) \sigma_{c0} + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) d\sigma_c(\tau). \quad (3.36)$$

• muuttuvan kimmomoduulin keskijännitysmenetelmä

$$\epsilon_{c\sigma}(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_C(t_0)} + \frac{\sigma_c(t) + \sigma_c(t_0)}{2E_{C28}} \varphi(t, t_0) + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)}{2} \left[\frac{1}{E_C(t)} + \frac{1}{E_C(t_0)} \right]. \quad (3.39)$$

• vakio kimmomoduulin keskijännitysmenetelmä

$$\epsilon_{c\sigma}(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_{C28}} + \frac{\sigma_c(t) + \sigma_c(t_0)}{2E_{C28}} \varphi(t, t_0) \quad (3.40)$$

• tehollisen kimmomoduulin menetelmä

$$\epsilon_{c\sigma}(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_{CC}(t)}, \quad (3.41)$$

missä

$$E_{CC}(t) = \frac{E_{C28}}{1 + \varphi(t, t_0)}. \quad (3.42)$$

Betoninormit:

• betonin virumisvenymä lopputilassa (betoninormit)

$$\epsilon_{CC} = \phi \epsilon_c, \quad (3.43)$$

missä

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_C}. \quad (3.44)$$

ja $E_C = E_{C28}$.

• betonin jännityksestä aiheutuva kokonaisvenymä

$$\epsilon_{c\sigma} = \epsilon_c + \epsilon_{CC} = (1 + \phi) \frac{\sigma_c}{E_C}, \quad (3.45)$$

eli

$$\epsilon_{c\sigma} = \frac{\sigma_c}{E_{CC}}, \quad (3.46)$$

missä

$$E_{CC} = \frac{E_C}{1 + \phi}. \quad (3.47)$$

• jos betonin lyhytaikainen jännitys-muodonmuutos riippuvuus on

$$\epsilon_{c\sigma} = f(\sigma_c) \quad (3.48)$$

on vastaava pitkäaikainen riippuvuus

$$\epsilon_{c\sigma} = (1 + \phi) f(\sigma_c). \quad (3.50)$$

3.17 Betonin kutistuminen

CEB 1978 malli:

• betonin kutistuma aikavälillä t_0 -t

$$\epsilon_s(t, t_0) = \epsilon_{s0} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)], \quad (3.51)$$

• peruskutistumakerroin $\epsilon_{s0} = \epsilon_{s1} \epsilon_{s2}$

- kerroin ϵ_{s1}

$$\epsilon_{s1} = (0,000775 \cdot R.H.^3 - 0,1565 \cdot R.H.^2 + 11,0325 \cdot R.H. - 303,25) \cdot 10^{-5}. \quad (3.52)$$

- kerroin ϵ_{s2}

$$\epsilon_{s2} = \exp \left[0,00174 h_0 - \frac{0,32}{h_0} - \ln \left(\frac{h_0^{0,251}}{1,9} \right) \right]. \quad (3.53)$$

- funktio β_s

$$\beta_s(t) = \left[\frac{t}{t + K_3(h_0)} \right]^{K_4(h_0)}, \quad (3.55)$$

missä

$$K_3(h_0) = 11,8 h_0 + 16 \quad (3.56)$$

ja

$$K_4(h_0) = \exp \left[-0,00257 h_0 + \frac{0,32}{h_0} + \ln(0,22 h_0^{0,4}) \right]. \quad (3.57)$$

4. AKSIAALISESTI KUORMITETTUIJEN RAKENTEIDEN TOIMINTA

4.2 Yhteensopivuusyhtälöt

Betonin venymä:

$$\epsilon_c = \frac{\Delta}{L} \quad (4.1)$$

Betoniterästen venymä:

$$\epsilon_s = \epsilon_c \quad (4.2)$$

Jänteen venymä:

$$\epsilon_p = \epsilon_c + \Delta \epsilon_p \quad (4.3)$$

Venymäero $\Delta \epsilon_p$:

- esijännitys $\Delta \epsilon_p = \epsilon_c - \epsilon_{p, \text{palusta}} \quad (4.4)$
- jälkijännitys $\Delta \epsilon_p = \epsilon_{pi} - \epsilon_{ci} \quad (4.5)$

4.3 Normaaliivoima.

Määrittelykaava:

$$N = \int \sigma dA \quad (4.6)$$

Normaalivoiman ja jännitysten yhteys:

$$N = A_c \sigma_c + A_s \sigma_s + A_p \sigma_p. \quad (4.7)$$

4.5 Virumisen, kutistumisen, relaksaation ja lämpötilanmuutoksen huomiominen.

Kokonaisvenymät:

- betoni $\epsilon_c = \epsilon_{cs} + \epsilon_{cs} + \epsilon_{cAT} \quad (4.8)$
- betoniteräksset $\epsilon_s = \epsilon_{so} + \epsilon_{sAT} \quad (4.9)$
- jänneteräksset $\epsilon_p = \epsilon_{po} + \epsilon_{pAT} \quad (4.10)$

4.8 Halkeilemattoman sauvan lineaarisesti kimmoinen vaste.

Hooken laki:

- betoni
- betoniteräs
- jänneteräs

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c$$

(4.26)

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s$$

(4.27)

$$\sigma_p = E_p \epsilon_p$$

(4.28)

Lyhytaikainen kuormitus:

- normaaliavoiman ja venymän yhteys

$$N = E_c A_c \epsilon_c + N_0$$

(4.21)

tai

$$\epsilon_c = \frac{N - N_0}{E_c A_c}$$

(4.22)

- alkunormaaliavoima

$$N_0 = E_p A_p \Delta \epsilon_p$$

(4.18)

- muunnettu pinta-ala

$$A_1 = A_c + \alpha A_s + \alpha A_p$$

(4.19)

- kimmomodulisuhteet

$$\alpha_s = \frac{E_s}{E_c}, \quad \alpha_p = \frac{E_p}{E_c}$$

(4.20)

Pitkäaikainen kuormitus:

- alkunormaaliavoima

$$N_0 = E_c A_c \Delta \epsilon_c - (E_c A_c \epsilon_c + E_c A_s \epsilon_s + E_c A_p \epsilon_p) \Delta t$$

(4.29)

4.9 Betonin vetojännitykset halkeilun jälkeen

Betonin keskimääräisen jännityksen ja jännityksestä aiheutuvan venymän yhteys raudoituksen vaikutusalueella:

$$\sigma_c = \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctk}}{1 + \sqrt{500 \epsilon_c \sigma_c}} \quad (4.30)$$

- raudoituksen tartuntaominaisuudet huomiioon ottava kerroin $\alpha_1 = 1,0$ kuviopinta- ja harjatangot
- $\alpha_1 = 0,7$ sileät tangot, langat ja tartunnalliset punokset
- $\alpha_1 = 0$ tartunnattomat jänteet

- kuormituksen luonteen huomiioon ottava kerroin $\alpha_2 = 1,0$ lyhytaikainen muuttumaton kuormitus
- $\alpha_2 = 0,7$ pitkäaikaiskuorma ja/tai toistuva kuorma

4.10 Halkeaman leveys ja halkeilyväli

Halkeaman ominaisleveys:

$$w_k = \epsilon_c \sigma_s s_r \quad (4.32)$$

Halkeilyväli:

$$s_r = 3,5c + k_w \frac{\phi}{\rho_r} \quad (4.33)$$

- kerroin ρ_r

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{ce}} \quad (4.34)$$

- kerroin k_w

$k_w = 0,085$ (A400H, A400HW, A500H, A500HW, A600H, B500K)

$k_w = 0,13$ (punos tai vastaava)

$k_w = 0,14$ (kuviopintainen tanko)

$k_w = 0,17$ (sileäpintainen tanko)

(Jos rakenteeseen vaikuttaa vetävä normaaliavoima, korotetaan kerrointa k_w kertoimella

$$\alpha = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1}$$

missä ϵ_1 ja ϵ_2 ovat venymät pinta-alan A_{ce} reunoilla.)

5. TAIVUTUKSEN ALAISTEN RAKENTEIDEN TOIMINTA

5.2 Yhteensopivuusyhtälöt

Betonin venymä:

$$\epsilon_c = \epsilon + \kappa y. \quad (5.1)$$

Betoniterästen venymä:

$$\epsilon_s = \epsilon + \kappa y. \quad (5.2)$$

Jänneterästen venymä:

$$\epsilon_p = \epsilon + \Delta \epsilon + \kappa y + \Delta \epsilon_p. \quad (5.3)$$

5.3 Jännitysresultanttien määrittelykaavat

Normaalivoima N:

$$N = \int_{A_c} \sigma_c dA + \int_{A_s} \sigma_s dA + \int_{A_p} \sigma_p dA. \quad (5.4)$$

Taiivutusmomentti M:

$$M = \int_{A_c} \sigma_c y dA + \int_{A_s} \sigma_s y dA + \int_{A_p} \sigma_p y dA. \quad (5.5)$$

5.5 Vetojännitykset betonissa

- katso kohta 4.9 tai yksinkertaistettu kaava

$$\sigma_{ct} = 0,5 \alpha_1 \alpha_2 f_{ctk}. \quad (5.6)$$

5.6 Jännitysresultanttien määrittäminen - ohutkerrosmalli

Normaalivoima ja taivutusmomentti:

$$N = N_c + N_{ct} + N_p + N_s, \quad (5.7)$$

$$M = N_c (d_c - d_0) + N_{ct} (d_{ct} - d_0) + N_p (d_p - d_0) + N_s (d_s - d_0). \quad (5.8)$$

- ohutkerrosmalli ja useita jänne- ja betoniteräsryhmiä

$$N = \sum N_{ci} + \sum N_{cti} + \sum N_{pi} + \sum N_{si}, \quad (5.10)$$

$$M = \sum N_{ci} (d_{ci} - d_0) + \sum N_{cti} (d_{cti} - d_0) + \sum N_{pi} (d_{pi} - d_0) + \sum N_{si} (d_{si} - d_0). \quad (5.11)$$

5.7 Momentti-käyritymä yhteys suorakaidepoikkipinnalle

Betonin puristusjännitysten resultantti ja sen asema suorakaiteen muotoisessa puristusalueessa:

$$N_c = -k_1 f_{ck} b x, \quad (5.13)$$

$$d_c = k_2 x,$$

missä

$$k_1 = \frac{\epsilon_c^*}{-\epsilon_{cy}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\epsilon_c^*}{-\epsilon_{cy}} \right)^2, \quad k_2 = \frac{4 - \frac{\epsilon_c^*}{-\epsilon_{cy}}}{12 - 4 \frac{\epsilon_c^*}{-\epsilon_{cy}}}, \quad (5.14)$$

ja ϵ_c^* on betonin reunan venymä (<0).

Taulukko 5.1: Betonin puristusjännitysten resultantin määrittämiseen tarvittavat kertoimet k_1 ja k_2 palkin poikkipinnan suorakaiteen muotoisessa puristusalueessa.

$\frac{\epsilon_c^*}{-\epsilon_{cy}}$	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
k_1	0,229	0,417	0,563	0,667	0,729	0,75	0,729	0,667
k_2	0,341	0,35	0,361	0,375	0,393	0,417	0,45	0,5

5.10 Lineaaraisesti kimmoinen halkeilematon vaste

Betonin venymä:

$$\epsilon_c = \epsilon + \kappa y, \quad (5.15)$$

Betoniteräksen venymä:

$$\epsilon_s = \epsilon + \kappa y, \quad (5.16)$$

Jänneen venymä:

$$\epsilon_p = \epsilon + \kappa y + \Delta \epsilon_p. \quad (5.17)$$

Betonin, betoniterästen ja jänneen kokonaisvenymät:

$$\epsilon_c = \epsilon_{c0} + \epsilon_{c0},$$

$$\epsilon_s = \epsilon_{s0} + \epsilon_{s0},$$

$$\epsilon_p = \epsilon_{p0} + \epsilon_{p0}. \quad (5.18)$$

Alkuvienymät:

$$\begin{aligned} \epsilon_{c0} &= \epsilon_{cs} + \epsilon_{cAt} \\ \epsilon_{s0} &= \epsilon_{sAt} \\ \epsilon_{p0} &= \epsilon_{pAt} \end{aligned}$$

Jännitysten ja venymien yhteydet:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= E_c \epsilon_{cs} \\ \sigma_s &= E_s \epsilon_{ss} \\ \sigma_p &= E_p \epsilon_{ps} \end{aligned}$$

Normaalivoima N ja taivutusmomentti M:

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_c} \sigma_c dA + \int_{A_s} \sigma_s dA + \int_{A_p} \sigma_p dA, \\ M &= \int_{A_c} \sigma_c y dA + \int_{A_s} \sigma_s y dA + \int_{A_p} \sigma_p y dA, \end{aligned}$$

Muunnettu pinta-ala, muunnettu staattinen momentti ja muunnettu jäyhysmomentti:

$$\begin{aligned} A_i &= A_c + \alpha_s A_s + \alpha_p A_p = A + (\alpha_s - 1) A_s + (\alpha_p - 1) A_p, \\ S_i &= S_c + \alpha_s S_s + \alpha_p S_p = S + (\alpha_s - 1) S_s + (\alpha_p - 1) S_p, \\ I_i &= I_c + \alpha_s I_s + \alpha_p I_p = I + (\alpha_s - 1) I_s + (\alpha_p - 1) I_p, \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} A_i &= A + (\alpha_s - 1) A_s + (\alpha_p - 1) A_p, \\ S_i &= S + (\alpha_s - 1) A_s Y_s + (\alpha_p - 1) A_p Y_p, \\ I_i &= I + A Y_0^2 + (\alpha_s - 1) A_s Y_s^2 + (\alpha_p - 1) A_p Y_p^2. \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} A_i &= A + \sum (\alpha_s - 1) A_{sj} + \sum (\alpha_p - 1) A_{pj}, \\ S_i &= S + \sum (\alpha_s - 1) A_{sj} Y_{sj} + \sum (\alpha_p - 1) A_{pj} Y_{pj}, \\ I_i &= I + A Y_0^2 + \sum (\alpha_s - 1) A_{sj} Y_{sj}^2 + \sum (\alpha_p - 1) A_{pj} Y_{pj}^2, \end{aligned}$$

missä

$$\alpha_s = \frac{E_s}{E_c}, \quad \alpha_p = \frac{E_p}{E_c}.$$

Huom! Kaavassa (5.31) I , I_c , I_s ja I_p ovat muuntamattoman-, betoni-, betoniteräs- ja jänneteräs-poikkipinnan jäyhysmomentit z-akselin suhteen koordinaatistossa, jonka origo on muunnatun poikkipinnan pintakeskiössä O_i . Kaavoissa (5.43) ja (5.46) I on muuntamattoman poikkipinnan jäyhysmomentti oman pintakeskiönsä kautta kulkevan akselin suhteen (ei siis sama kuin kaavassa (5.31)).

Alkuvienymät ja alkuvienymät:

$$N_0 = E_p \int_{A_p} \Delta \epsilon_p dA - E_c \int_{A_c} \epsilon_{c0} dA - E_s \int_{A_s} \epsilon_{s0} dA - E_p \int_{A_p} \epsilon_{p0} dA, \quad (5.33)$$

$$M_0 = E_p \int_{A_p} \Delta \epsilon_p y dA - E_c \int_{A_c} \epsilon_{c0} y dA - E_s \int_{A_s} \epsilon_{s0} y dA - E_p \int_{A_p} \epsilon_{p0} y dA, \quad (5.34)$$

tai

$$N_0 = E_c A_c \Delta \epsilon_c - E_c A_c \epsilon_{c0} - E_s A_s \epsilon_{s0} - E_p A_p \epsilon_{p0}, \quad (5.47)$$

$$M_0 = E_c A_c \Delta \epsilon_c y_c - E_c A_c \epsilon_{c0} y_c - E_s A_s \epsilon_{s0} y_s - E_p A_p \epsilon_{p0} y_p. \quad (5.48)$$

tai

$$N_0 = E_c \sum_{A_c} \Delta \epsilon_c p_{cj} - E_c \int_{A_c} \epsilon_{c0} dA - E_s \sum_{A_s} \epsilon_{sj} s_{0j} - E_p \sum_{A_p} \epsilon_{pj} p_{0j}, \quad (5.49)$$

$$M_0 = E_c \sum_{A_c} \Delta \epsilon_c p_{cj} y_{cj} - E_c \int_{A_c} \epsilon_{c0} y dA - E_s \sum_{A_s} \epsilon_{sj} s_{0j} y_{sj} - E_p \sum_{A_p} \epsilon_{pj} p_{0j} y_{pj}. \quad (5.50)$$

Normaalivoiman ja aksiaalisen venymän yhteydet:

$$N = E_c A_i \epsilon + N_0 \quad (5.37)$$

eli

$$\epsilon = \frac{N - N_0}{E_c A_i}. \quad (5.39)$$

Taivutusmomentin ja käyrityksen yhteydet:

$$M = E_c I_i \kappa + M_0, \quad (5.38)$$

eli

$$\kappa = \frac{M - M_0}{E_c I_i}. \quad (5.40)$$

5.12 Lineaarisesti kimmoisen halkeilemattoman jännepalkin kaavoja.

Aksiaalinen venymä ja käyrästymä:

$$\epsilon = -\frac{N_0}{E_C A_i} \quad (5.51)$$

$$\kappa = -\frac{M_0}{E_C I_i} + \frac{M}{E_C I_i} \quad (5.52)$$

• jännittämistä ja alkuvenymistä aiheutuva käyrästymä

$$\kappa^0 = -\frac{M_0}{E_C I_i} \quad (5.53)$$

• ulkoisesta kuormituksesta aiheutuva käyrästymä

$$\kappa^w = \frac{M}{E_C I_i} \quad (5.54)$$

Betonin jännitys:

$$\sigma_c = -\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{I_i} y + \frac{M}{I_i} y - E_C \epsilon_c^0 \quad (5.55)$$

• reunajännitykset

$$\sigma_{ylä} = -\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{W_{i,ylä}} + \frac{M}{W_{i,ylä}} - E_C \epsilon_c^0 \quad (5.56a)$$

$$\sigma_{ala} = -\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{W_{i,ala}} + \frac{M}{W_{i,ala}} - E_C \epsilon_c^0 \quad (5.56b)$$

• taivutusvastukset

$$W_{i,ylä} = \frac{I_i}{y_{ylä}} \quad (5.57a)$$

$$W_{i,ala} = \frac{I_i}{y_{ala}} \quad (5.57b)$$

• jännittämistä ja alkuvenymistä aiheutuvaan betonin jännitys

$$\sigma_c^0 = -\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{I_i} y - E_C \epsilon_c^0 \quad (5.58)$$

$$\sigma_{ylä}^0 = -\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{W_{i,ylä}} - E_C \epsilon_c^0 \quad (5.60a)$$

$$\sigma_{ala}^0 = -\frac{N_0}{A_i} - \frac{M_0}{W_{i,ala}} - E_C \epsilon_c^0 \quad (5.60b)$$

• ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvaan betonin jännitys

$$\sigma_c^w = \frac{M}{I_i} y \quad (5.59)$$

$$\sigma_{ylä}^w = \frac{M}{W_{i,ylä}} \quad (5.61a)$$

$$\sigma_{ala}^w = \frac{M}{W_{i,ala}} \quad (5.61b)$$

Betoniterästen jännitykset:

$$\sigma_s = \alpha_s \sigma_{cs} + E_s (\epsilon_{c0} - \epsilon_{s0}) \quad (5.63)$$

• jännittämistä ja alkuvenymistä aiheutuvaan jännitys

$$\sigma_s^0 = \alpha_s \sigma_{cs}^0 + E_s (\epsilon_{c0} - \epsilon_{s0}) \quad (5.64)$$

• ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvaan jännitys

$$\sigma_s^w = \alpha_s \sigma_{cs}^w \quad (5.65)$$

Jänneterästen jännitykset:

$$\sigma_p = \alpha_p \sigma_{cp} + E_p (\Delta \epsilon_p + \epsilon_{c0} - \epsilon_{p0}) \quad (5.67)$$

• jännittämistä ja alkuvenymistä aiheutuvaan jännitys

$$\sigma_p^0 = \alpha_p \sigma_{cp}^0 + E_p (\Delta \epsilon_p + \epsilon_{c0} - \epsilon_{p0}) \quad (5.68)$$

• ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvaan jännitys

$$\sigma_p^w = \alpha_p \sigma_{cp}^w \quad (5.69)$$

Taulukko 5.6: Eräiden jakautuneiden kuormitusten resultantteja ja resultanttien vaikutuspisteitä.

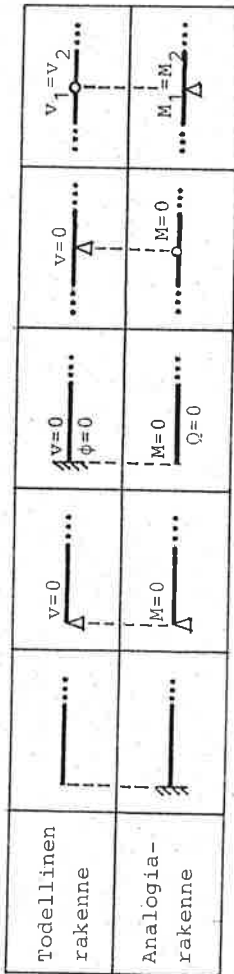
Suorakaide		$R = wl$ $e_1 = \frac{l}{2}$ $e_2 = \frac{l}{2}$
Kolmio		$R = \frac{1}{2} wl$ $e_1 = \frac{2}{3} l$ $e_2 = \frac{1}{3} l$
Puoli-suunnikas		$R = \frac{w_1 + w_2}{2} l$ $e_1 = \frac{w_1 + 2w_2}{3(w_1 + w_2)} l$ $e_2 = \frac{2w_1 + w_2}{3(w_1 + w_2)} l$
Paraabeli		$R = \frac{2}{3} wl$ $e_1 = \frac{1}{2} l$ $e_2 = \frac{1}{2} l$
		$R = \frac{1}{3} wl$ $e_1 = \frac{3}{4} l$ $e_2 = \frac{1}{4} l$
		$R = \frac{2}{3} wl$ $e_1 = \frac{5}{8} l$ $e_2 = \frac{3}{8} l$
Kuutio-paraabeli		$R = \frac{1}{4} wl$ $e_1 = \frac{4}{5} l$ $e_2 = \frac{1}{5} l$

Taulukko 5.7: Integraalin $\int \kappa \bar{M} dx$ arvoja yksikkövoimamenetelmää varten.

\bar{M} -pinta	κ -pinta	\bar{M}	\bar{M}_1	\bar{M}_2	\bar{M}_1	\bar{M}_2
		$l \kappa \bar{M}$	$\frac{l}{2} \kappa \bar{M}_1$	$\frac{l}{2} \kappa \bar{M}_2$	$\frac{l}{2} \kappa (\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$	
		$\frac{l}{2} \kappa_2 \bar{M}$	$\frac{l}{6} \kappa_2 \bar{M}_1$	$\frac{l}{3} \kappa_2 \bar{M}_2$	$\frac{l}{6} \kappa_2 (\bar{M}_1 + 2\bar{M}_2)$	
		$\frac{l}{2} \kappa_1 \bar{M}$	$\frac{l}{3} \kappa_1 \bar{M}_1$	$\frac{l}{6} \kappa_1 \bar{M}_2$	$\frac{l}{6} \kappa_1 (2\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$	
		$\frac{l}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) \bar{M}$	$\frac{l}{6} (2\kappa_1 + \kappa_2) \bar{M}_1$	$\frac{l}{6} (\kappa_1 + 2\kappa_2) \bar{M}_2$	$\frac{l}{6} [\kappa_1 (2\bar{M}_1 + \bar{M}_2) + \kappa_2 (\bar{M}_1 + 2\bar{M}_2)]$	
		$\frac{2l}{3} \kappa_3 \bar{M}$	$\frac{l}{3} \kappa_3 \bar{M}_1$	$\frac{l}{3} \kappa_3 \bar{M}_2$	$\frac{l}{3} \kappa_3 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$	
		$\frac{2l}{3} \kappa_2 \bar{M}$	$\frac{l}{4} \kappa_2 \bar{M}_1$	$\frac{5l}{12} \kappa_2 \bar{M}_2$	$\frac{l}{12} \kappa_2 (3\bar{M}_1 + 5\bar{M}_2)$	
		$\frac{2l}{3} \kappa_1 \bar{M}$	$\frac{5l}{12} \kappa_1 \bar{M}_1$	$\frac{l}{4} \kappa_1 \bar{M}_2$	$\frac{l}{12} \kappa_1 (5\bar{M}_1 + 3\bar{M}_2)$	
		$\frac{l}{3} \kappa_2 \bar{M}$	$\frac{l}{12} \kappa_2 \bar{M}_1$	$\frac{l}{4} \kappa_2 \bar{M}_2$	$\frac{l}{12} \kappa_2 (\bar{M}_1 + 3\bar{M}_2)$	
		$\frac{l}{3} \kappa_1 \bar{M}$	$\frac{l}{4} \kappa_1 \bar{M}_1$	$\frac{l}{12} \kappa_1 \bar{M}_2$	$\frac{l}{12} \kappa_1 (3\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$	

5.13 Taipumien ja korotuksen laskeminen.

Mohrin menetelmä:



Kuva 5.22: Tuennat Mohrin menetelmässä.

Yksikkövoimamenetelmä:

$$\delta = \int_L \kappa \bar{M} dx. \quad (5.77)$$

6. JÄNNEBETONIRAKENTEIDEN SUUNNITTELUSTA

6.1 Tarkastelutavat suunnittelussa

6.11 "Venymähteensopivuus" tarkastelutapa

$\Delta \epsilon_p = \text{vakio.}$

Tärkeimmät kaavat kohdissa 5.1.0-5.1.2.

Betonin jännitys (alkutila):

$$\sigma_c = -\frac{P_0}{A_i} - \frac{P_0 e}{I_i} y + \frac{M}{I_i} y. \quad (6.1)$$

(6.9)

Reunajännitykset (alkutila):

$$\sigma_{ylä} = -\frac{P_0}{A_i} - \frac{P_0 e}{W_{i,ylä}} + \frac{M}{W_{i,ylä}}$$

(6.10a)

$$\sigma_{ala} = -\frac{P_0}{A_i} - \frac{P_0 e}{W_{i,ala}} + \frac{M}{W_{i,ala}}$$

(6.10b)

Betonin jännitys betoniterästen kohdalla (alkutila):

$$\sigma_{cs} = -\frac{P_0}{A_i} - \frac{P_0 e}{I_i} y_s + \frac{M}{I_i} y_s.$$

(6.11)

Betoniterästen jännitys (alkutila):

$$\sigma_s = \alpha_s \sigma_{cs}.$$

(6.12)

Betonin jännitys jänteen kohdalla (alkutila):

$$\sigma_{cp} = -\frac{P_0}{A_i} - \frac{P_0 e^2}{I_i} + \frac{M_e}{I_i}.$$

(6.13)

Jänteen jännitys (alkutila):

$$\sigma_p = \alpha_p \sigma_{cp} + \sigma_{p0}$$

(6.14)

missä

$$\sigma_{p0} = E_p \Delta \epsilon_p = P_0 / A_p.$$

6.12 "Voima jänteessä" tarkastelutapa

Palkin akselin venymän ja käyrästymä:

$$\epsilon = -\frac{P}{E_c A}, \quad \kappa = -\frac{P e}{E_c I} + \frac{M}{E_c I} \quad (6.20)$$

Betonin jännitys:

$$\sigma_c = -\frac{P}{A} - \frac{P e}{I} y + \frac{M}{I} y \quad (6.21)$$

Betonin reunajännitykset:

$$\sigma_{ylä} = -\frac{P}{A} - \frac{P e}{W_{ylä}} + \frac{M}{W_{ylä}}, \quad (6.22a)$$

$$\sigma_{ala} = -\frac{P}{A} - \frac{P e}{W_{ala}} + \frac{M}{W_{ala}} \quad (6.22b)$$

Taivutusvastukset:

$$W_{ylä} = \frac{I}{y_{ylä}}, \quad (6.23a)$$

$$W_{ala} = \frac{I}{y_{ala}} \quad (6.23b)$$

Jännityshäviökerroin:

$$\eta = \frac{P_{\infty}}{P_0} \quad (6.24)$$

Häviöprosentti:

$$\frac{P_0 - P_{\infty}}{P_0} \cdot 100\% = (1 - \eta) \cdot 100\% \quad (6.25)$$

Jännevoima alkutilassa ja lopputilassa:

$$P = P_0, \quad (6.26a)$$

$$P = P_{\infty} = \eta P_0 \quad (6.26b)$$

Tehollinen kimmomoduuli lopputilassa:

$$E_{cc} = \frac{E_c}{1 + \phi} \quad (6.27)$$

6.2 Betonin sallitut jännitykset

Sallitut puristusjännitykset alku- ja lopputilassa:

$$\sigma_{c0, sall} = -0,6c, \quad (6.28)$$

$$\sigma_{c\infty, sall} = -0,5c, \quad (6.29)$$

Sallitut vetojännitykset alku- ja lopputilassa:

$$\sigma_{t0, sall} = f_{ctk} = 1,7f_{ctk}, \quad (6.30)$$

$$\sigma_{t\infty, sall} = 0, \quad (6.31)$$

Taulukko 6.1: Lujusluokitusta vastaavat kuutio- ja lieriölujuudet (MPa).

Lujusluokka	K30	K35	K40	K45	K50	K55	K60	K70	K80	K90	K100
Kuutio särmä 150mm	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100
Lieriö $\phi 150\text{mm} \times 300\text{mm}$	23	27,5	32	37	42	47	52	62	71	80	90

6.3 Alustavan suunnittelun menetelmiä

6.31 Jännitysepäyhtälöt

(6.24)

$$I: \quad \sigma_{0, ylä} = -\frac{P_0}{A} - \frac{P_0 e}{W_{ylä}} + \frac{M_{\min}}{W_{ylä}} \leq \sigma_{t0, sall}, \quad (6.40a)$$

(6.25)

$$II: \quad \sigma_{0, ala} = -\frac{P_0}{A} - \frac{P_0 e}{W_{ala}} + \frac{M_{\min}}{W_{ala}} \geq \sigma_{c0, sall}, \quad (6.40b)$$

(6.26a)

$$III: \quad \sigma_{\infty, ylä} = -\frac{P_{\infty}}{A} - \frac{P_{\infty} e}{W_{ylä}} + \frac{M_{\max}}{W_{ylä}} \geq \sigma_{c\infty, sall}, \quad (6.40c)$$

(6.26b)

$$IV: \quad \sigma_{\infty, ala} = -\frac{P_{\infty}}{A} - \frac{P_{\infty} e}{W_{ala}} + \frac{M_{\max}}{W_{ala}} \leq \sigma_{t\infty, sall}. \quad (6.40d)$$

(6.27)

6.32 Apusuureita: Sydänkuivion ylä- ja alareunan y-koordinaatit

$$k_{ylä} = -\frac{W_{ala}}{A}, \quad (6.42)$$

$$k_{ala} = -\frac{W_{ylä}}{A}.$$

6.33 Jännevoiman ja epäkeskisyyden määrittäminen poikkileikkaukses-

sa: Magnelin kuvio

$$I: e \leq k_{\text{ala}} - (\sigma_{t0, \text{sall}}^W \cdot k_{\text{ylä}} - M_{\text{min}}^W) \frac{1}{P_0}, \quad (6.45a)$$

$$II: e \leq k_{\text{ylä}} - (\sigma_{c0, \text{sall}}^W \cdot k_{\text{ala}} - M_{\text{min}}^W) \frac{1}{P_0}, \quad (6.45b)$$

$$III: e \geq k_{\text{ala}} - \frac{1}{\eta} (\sigma_{c0, \text{sall}}^W \cdot k_{\text{ylä}} - M_{\text{max}}^W) \frac{1}{P_0}, \quad (6.45c)$$

$$IV: e \geq k_{\text{ylä}} - \frac{1}{\eta} (\sigma_{t0, \text{sall}}^W \cdot k_{\text{ala}} - M_{\text{max}}^W) \frac{1}{P_0}. \quad (6.45d)$$

6.34 Poikkileikkauksen määrittäminen: Guyonin taivutusvastusten lausekkeet

$$W_{\text{ylä}} \leq \frac{M_{\text{max}} - \eta M_{\text{min}}}{\sigma_{c0, \text{sall}} - \eta \sigma_{t0, \text{sall}}} \quad (<0), \quad (6.48a)$$

$$W_{\text{ala}} \geq \frac{M_{\text{max}} - \eta M_{\text{min}}}{\sigma_{t0, \text{sall}} - \eta \sigma_{c0, \text{sall}}} \quad (>0). \quad (6.48b)$$

6.35 Apusuureita: Rajasydämen ylä- ja alareunan y-koordinaatit

$$k'_{\text{ylä}} = \max \left[k_{\text{ala}} \left(1 - \frac{\sigma_{c0, \text{sall}}}{\sigma_{x0}} \right), k_{\text{ylä}} \left(1 - \frac{\sigma_{t0, \text{sall}}}{\sigma_{x0}} \right) \right], \quad (6.53a)$$

$$k'_{\text{ala}} = \min \left[k_{\text{ala}} \left(1 - \frac{\sigma_{t0, \text{sall}}}{\sigma_{x0}} \right), k_{\text{ylä}} \left(1 - \frac{\sigma_{c0, \text{sall}}}{\sigma_{x0}} \right) \right], \quad (6.53b)$$

missä

$$\sigma_{x0} = -\frac{P_0}{A},$$

$$\sigma_{x0} = -\frac{P_0}{A} - \frac{\eta P_0}{A}.$$

6.36 Jänteen sijoittaminen pitkin palkkia: rajavyöhykke

$$e_{\text{ylä}} \leq e_{\text{ala}}, \quad (6.56)$$

missä

$$e_{\text{ylä}} = k'_{\text{ylä}} + \frac{M_{\text{max}}}{P_0} \quad (6.57a)$$

ja

$$e_{\text{ala}} = k'_{\text{ala}} + \frac{M_{\text{min}}}{P_0}. \quad (6.57b)$$

6.4 Kuormituksen tasapainottaminen

Jänteen epäkeskisyyks:

$$e(x) = \frac{1}{P} M(x) \quad (6.59)$$

Jännevoima:

$$P = \max \left(\frac{M_i}{e_i} \right). \quad (6.64)$$

6.5 Samanarvoiset kuormitukset

Päätyvankkuri:

Vaakavoima $P \cos \alpha \approx P$ ja pystyvoima $P \sin \alpha \approx P \alpha$, jonka epäkeskisyyks on e.

Suora jänne:

Ei samanarvoista kuormitusta.

Kaareva jänne:

$$p(x) = -Pe''(x). \quad (6.67)$$

• paraabelin kaari

$$p = \frac{8Pf}{l^2}. \quad (6.71)$$

Jänteen taite:

Pystyvoima $F = 2P \sin(\Delta \alpha / 2) \approx F \Delta \alpha$.

7. JÄNNEPALKIN TAIVUTUSMURTO

7.1 Johdanto

Materiaalien osavarmuuskertoimet:

(rakenneluokka 1)

- betoni $\gamma_C = 1,35$
- betoniteräksiset $\gamma_S = 1,1$
- jänneteräksiset $\gamma_P = 1,15$

Lujuuksien laskenta-arvot:

- betonin puristuslujuuden laskenta-arvo

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_C$$

- betoniterästen laskentalujuus

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_S$$

- jänneteräksen laskentalujuus

$$f_{pyd} = f_{pyk} / \gamma_P$$

Laskelmissa tehtäviä oletuksia:

(Normaalilujuuksiset betonit, tiheys $\rho_C = 2400 \text{ kg/m}^3$.)

- Betonin myötöpuristuma $\epsilon_{cy} = 2\%$.
- Betonin puristuma poikkileikkauksen painopisteessä $\epsilon_C \leq 2\%$.
- Betonin murtopuristuma $\epsilon_{cu} = 3,5\%$.
- Betoniterästen murtovenymä on $\epsilon_u = 10\%$.
- Jänneterästen murtovenymä $\epsilon_{pu} = \Delta \epsilon_p + 10\%$ ($\Delta \epsilon_{cpu} = 10\%$).

7.2 Betonin jännitys-muodonmuutoskuvio

Betonin jännitys-muodonmuuttoriiippuvuus:

(Puristumat ja puristusjämnitykset positiivisiä.)

$$\sigma_C = \begin{cases} 0, & \text{kun } \epsilon_C \leq 0 \text{ (veto)} \\ f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_C}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right], & \text{kun } 0 \leq \epsilon_C \leq \epsilon_{cy} \\ f_{cd}, & \text{kun } \epsilon_{cy} \leq \epsilon_C \leq \epsilon_{cu} \end{cases}$$

Taulukko 7.1: Suhteen σ_C / f_{cd} arvot välin $0 \leq \epsilon_C \leq \epsilon_{cy} = 2\%$ viiden tasapitkän osan keskipisteissä.

$\frac{\epsilon_C}{\epsilon_{cy}}$	$\frac{\sigma_C}{f_{cd}}$
0,1	0,19
0,3	0,51
0,5	0,75
0,7	0,91
0,9	0,99

(7.1a)

(7.1b)

(7.1c)

7.2 Betonin jännitys-muodonmuutoskuvio poikkileikkauksessa

Betonin jännityskuvion resultanttin suuruus ja asema, kun poikkileikkauksen puristusalue on suorakaide:

$$N_C = k_1 f_{cd} b x, \quad (7.4a)$$

$$d_C = k_2 x. \quad (7.4b)$$

Kertoimet k_1 ja k_2 :

- normaaliraudoitus

$$k_1 = \frac{17}{21} \approx 0,8095, \quad (7.5a)$$

$$k_2 = \frac{99}{238} \approx 0,4160. \quad (7.5b)$$

- aliraudoitus (kuva 7.6)

$$k_1 = \begin{cases} \frac{1}{3} \left[3 \frac{\epsilon_C^*}{\epsilon_{cy}} - \left(\frac{\epsilon_C^*}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right] & \epsilon_C^* \leq \epsilon_{cy} = 2\%, \\ \frac{1}{3} \left(3 - \frac{\epsilon_{cy}}{\epsilon_C^*} \right) & \epsilon_{cy} \leq \epsilon_C^* \leq \epsilon_{cu} = 3,5\% \end{cases}$$

(7.7a)

ja

$$k_2 = \begin{cases} \frac{1}{12k_1} \left[4 \frac{\epsilon_C^*}{\epsilon_{cy}} - \left(\frac{\epsilon_C^*}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \right] & \epsilon_C^* \leq \epsilon_{cy} = 2\%, \\ \frac{1}{12k_1} \left[6 - 4 \frac{\epsilon_{cy}}{\epsilon_C^*} + \left(\frac{\epsilon_{cy}}{\epsilon_C^*} \right)^2 \right] & \epsilon_{cy} \leq \epsilon_C^* \leq \epsilon_{cu} = 3,5\% \end{cases} \quad (7.7b)$$

7.4 Poikkileikkauksen taivutuskapasiteetin määrittäminen

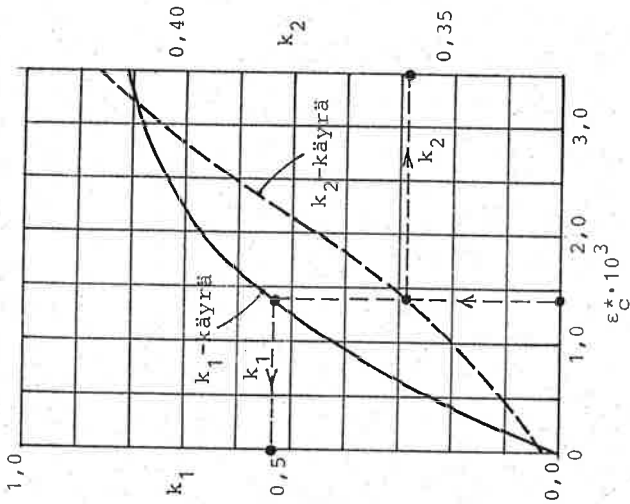
Normaalivoiman ja taivutusmomentin lausekkeet:

$$N = -N_c + N_s + N_p \quad (7.10)$$

$$M = -N_c d_c + N_s d_s + N_p d_p \quad (N=0) \quad (7.12)$$

$$N = -\sum c_i + N_s + N_p \quad (7.13)$$

$$M = -\sum N_i c_i d_i + N_s d_s + N_p d_p \quad (N=0) \quad (7.14)$$



Kuva 7.6: Suorakaiteen muotoiseen puristuspuuntaan liittyvät kertoimet k_1 ja k_2 betonin reunapuristuman ϵ_c^* funktiona.

Suorakaiteen muotoinen jännityskuvio:

$$N_c = k f_{cd} b x$$

$$d_c = \frac{k}{2} x$$

Kerroin k :

- normaaliaudoitus

$$k = 0,8$$

- alliraidoitus ($\epsilon_{cy} \leq \epsilon_{cu}$):

$$k = \frac{\epsilon_c^* - 0,7\%}{\epsilon_c^*} \quad (7.9)$$

8. STAATTISESTI MÄÄRÄÄMÄTTÖMÄT JÄNNEPALKIT

8.1 Yleistä

Pelkääntämällä jännevoiman P kuormittaman staattisesti määrätyn jännepalkin tukireaktiot ovat nollia. Pelkääntämällä jännevoiman kuormittaman lineaarisesti kimmoisesti käyttäytyvän palkin (betoniosan) normaali- ja leikkausjännitys aiheutuvat normaalivoimasta $N = -P$, taivutusmomentista $M = -Pe$ ja leikkausvoimasta $Q = M' = -Pe'$ (P otaksuttu vakioiksi), joiden avulla ne voidaan laskea tavantomaisilla kaavoilla

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \gamma, \quad (8.1)$$

ja

$$\tau = \frac{QS}{Ib}. \quad (8.2)$$

Palkin akselin venymä ja käristymä saadaan vastaavasti kaavoilla

$$\epsilon = \frac{N}{EA} \quad (8.3)$$

ja

$$\kappa = \frac{M}{EI}. \quad (8.4)$$

Staattisesti määrättyssä palkissa jännevoimasta aiheutuvat taipumat pääsevät vapaasti tapahtumaan, mutta staattisesti määräämättömässä palkissa tukiehdot rajoittavat niitä. Staattisesti määräämättömään jännitetyyn rakenteeseen syntyy näin tukireaktioita. Jos palkki on tuettu siten, että aksiaalinen liike pääsee tapahtumaan vapaasti, palkin normaalivoimalla on arvo $N = -P$, mutta taivutusmomenttiin M tulee tukireaktioista aiheutuva lisäys.

Staattisesti määräämättömien jännepalkkien yhteydessä pelkääntämällä jännevoimasta aiheutuvaa tukematoman (tai staattisesti määrätysti tuetun) palkin taivutusmomenttia $M_p = -Pe$ kutsutaan **primaarimomentiksi** ja jännevoiman aiheuttamista tukireaktioista aiheutuvaa taivutusmomentin lisäystä M_s kutsutaan **sekundaarimomentiksi**. Staattisesti määräämättömän jännepalkin jännevoimasta aiheutuva kokonaistaivutusmomentti on näin

$$M = M_p + M_s. \quad (8.5)$$

Sen avulla palkin normaalijännitys saadaan kaavasta (8.1) ja leikkausjännitys kaavasta (8.2), missä

$$Q = M' = -Pe' + M_s'. \quad (8.6)$$

Sijoittamalla staattisesti määräämättömän jännepalkin jänne sopivasti voidaan jännevoimasta aiheutuvat tukireaktiot saada häviämään, jolloin $M = M_p$. Näin muodostettua jänneprofiilia kutsutaan **sopusuhteiseksi** (concordant, zwängungsfrei) jänneeksi. Vastaavasti jänneprofiilia, joka ei ole sopusuhteinen kutsutaan **epäsopuhteiseksi** (nonconcordant, nichtzwängungsfrei) jänneeksi. Usein kannattaa staattisesti määräämättömän jännepalkin suunnittelun lähtökohdaksi ottaa sopusuhteinen jänne. Sellainen saadaan luonteavasti käyttäen tasapainoittamismenetelmää.

8.2 Staattisesti määräämättömän jännepalkin analysointi

Staattisesti määräämättömän jännepalkin analysointi on tarkoituksenmukaista suorittaa erikseen jännevoimalle ja erikseen omalle painolle ja hyötykuormalle. Kokonaistulos saadaan lopuksi yhteenlas-kuperiaatetta soveltamalla. Analysoinnissa käytetään tavanomaisia rakenteiden mekaniikan menetelmiä. Analysointiin omalle painolle ja hyötykuormalle ei tässä puututa. Jännevoiman käsittely eri analyysointimenetelmien yhteydessä sensijaan sisältää eräitä erityispiirteitä, joita tarkastellaan seuraavassa.

(a) Yksikkövoimamenetelmä

Jännevoimasta P aiheutuva staattisesti määrätyn jännepalkin pisteen i siirtymäsuure (taipuma tai kiertymä) δ_{i0} voidaan laskea yksikkövoimamenetelmällä käyttäen todellisenä siirtymätilana käyristymää

$$\kappa_0 = \frac{M_0}{EI}, \quad (8.7)$$

missä $M_0(x)$ on jännevoimasta aiheutuva staattisesti määrätyn perusmuodon taivutusmomentti. Sille pätee edellisen perusteella

$$M_0 = M_p = -Pe, \quad (8.8)$$

ja virtuaalisena voimatilana taivutusmomenttia $M_i(x)$, joka aiheutuu ykkösen suuruudesta (siirtymäsuuresta δ_{i0} vastaavasta) voimasuuresta (voima tai momentti). Siirtymäsuurelle δ_{i0} saadaan siis

$$\delta_{i0} = \int M_i \kappa_0 dx = \int \frac{M_i M_0}{EI} dx, \quad (8.9)$$

missä integrointi tapahtuu yli rakenteen sauvojen.

Pisteessä j vaikuttavasta ykkösen suuruista voimasuuresta $X_j = 1$ aiheutuvalle pisteen i siirtymäsuurelle saadaan vastaavasti

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} dx, \quad (8.10)$$

missä $M_j(x)$ on ko. voimasuuresta aiheutuva todellinen taivutusmomentti.

Tarkastellaan nyt staattisesti määräämättömää jännepalkkia, jonka staattisen määräämättömyyden ker-taluku on n ja staattisesti määräämättömiä suureita merkitään $X_j, j = 1, \dots, n$. Siirtymäsuure δ_i pisteessä i saadaan laskemalla yhteen jännevoimasta aiheutunut siirtymä δ_{i0} ja kutakin staattisesti määräämättömää suuretta X_j kohti tulo $X_j \delta_{ij}$, ts.

$$\delta_i = \delta_{i0} + \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j. \quad (8.11)$$

Vaatimalla, että kutakin staattisesti määräämättömää voimasuuretta vastaava siirtymäsuure δ_i häviää, saadaan yhtälöryhmä

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \delta_{i0} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (8.12)$$

staattisesti määräämättömien suureiden $X_j, j = 1, \dots, n$ laskemiseksi.

Kun yhtälöryhmä (8.12) on ratkaistu, ja staattisesti määrätty suureet X_i tunnetaan, saadaan lopullisen taivutusmomentti kaavalla

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^n M_i X_i, \quad (8.13)$$

lopullinen leikkausvoima kaavalla

$$Q = Q_0 + \sum_{i=1}^n Q_i X_i, \quad (8.14)$$

ja tukireaktio R tuella, joka toimii tukena myös staattisesti määrättylle perusmuodolle, kaavalla

$$R = R_0 + \sum_{i=1}^n R_i X_i = \sum_{i=1}^n R_i X_i. \quad (8.15)$$

Kaavoissa (8.13)-(8.15) alaindeksit 0 ja i viittaavat ulkoisen kuormituksen (tässä tapauksessa jännevoiman) ja pisteessä i vaikuttavan, yksösen voimasuureen aiheuttamiin staattisesti määrätyn perusmuodon suureisiin. Helposti nähdään, että sekundaarimomentille on voimassa

$$M_p = \sum_{i=1}^n M_i X_i. \quad (8.16)$$

(b) Kiertymämenetelmä ja momenttimenetelmä

Staattisesti määräämättömän jännepalkin analysointi kiertymämenetelmällä ja momenttimenetelmällä tapahtuu mukavimminkin siten, että jänteen vaikutus korvataan samanarvoisilla kuormituksilla. Näin ongelma saadaan muunnetuksi tavanomaiseksi rakenteiden mekaniikan tehtäväksi ja kaikki menetteliin liittyvät kaavat ja taulukot ovat käytettävissä.

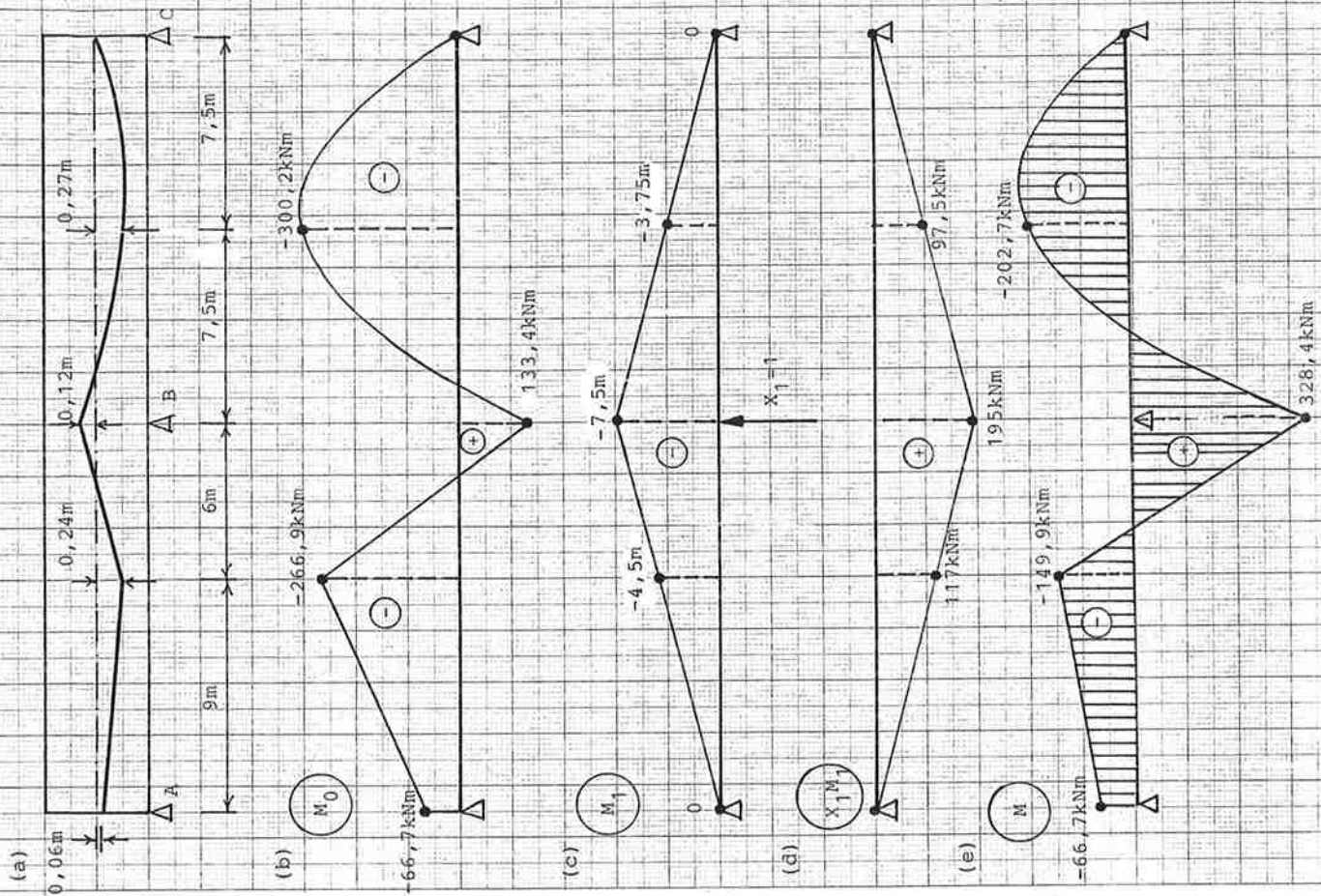
Jatkuvan, siirtymättömästi tuetun jännepalkin analysointi käsinlaskien tapahtuu mukavasti kiertymämenetelmään perustuvalla Crossin momentintasausmenetelmällä tai momenttimenetelmään perustuva kolmen momentin yhtiölä käyttäen.

Esimerkki 8.1: Määritetään kuvan 8.1a kaksiaukkoisen jännepalkin taivutusmomenttikuvio ja tukireaktiot jännevoimasta $P=1112\text{ kN}$ käyttäen (a) yksikkövoimamenetelmää, (b) kiertymämenetelmää ja (c) momenttimenetelmää.

(a) Yksikkövoimamenetelmä:

Valitaan keskirueen tukireaktio staattisesti määräämättömäksi suureeksi X_1 . Kuvassa 8.1b on esitetty jännevoiman aiheuttama staattisesti määrätyn perusmuodon momenttipinta $M_0(x)$ (primaarimomentti). Se on konstruoitu kaavan (8.8) ja kuvan 8.1a jänneprofiilin avulla. Kuvassa 8.1c on staattisesti määräämättömän suureen X_1 arvoa 1 vastaava staattisesti määrätyn perusmuodon momenttipinta $M_1(x)$. Staattisesti määräämättömän suureen X_1 arvo lasketaan seuraavassa. Siinä käytetään hyväksi taulukkoa 5.7.

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int M_0 M_1 dx \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^9 \text{m} (-66,7 - 2 \cdot 266,9) \text{ kNm} \cdot (-4,5 \text{ m}) + \int_0^6 \text{m} [-266,9 \text{ kNm} \cdot (-2 \cdot 4,5 \text{ m} - 7,5 \text{ m})] \right. \\ &\quad \left. + 133,4 \text{ kNm} \cdot (-4,5 \text{ m} - 2 \cdot 7,5 \text{ m}) \right\} \end{aligned}$$



Kuva 8.1: Jännepalkki (a) ja sen ratkaiseminen yksikkövoimamenetelmällä (b)-(e).

$$\begin{aligned} & + \frac{15m}{3} (-366,9 \text{ kNm}) \cdot (-7,5m) + \frac{15m}{3} 133,4 \text{ kNm} \cdot (-7,5m) \Big\} \\ & = \frac{14612,3 \text{ kNm}^3}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int M_1^2 dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{15m}{3} (7,5m)^2 = \frac{562,5m^2}{EI} \end{aligned}$$

$$\delta_1 \equiv \delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{14612,3 \text{ kNm}^3}{562,5m} = -26,0 \text{ kN}$$

Sekundaarinen momenttipinta $M_2(x) = X_1 M_1(x)$ on esitetty kuvassa 8.1d ja lopullinen momenttipinta $M(x) = M_0(x) + X_1 M_1(x)$ kuvassa 8.1e. Lopuksi lasketaan tukireaktiot A, B ja C. Saadaan

$$A = A_0 + A_1 X_1 = 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) (-26,0 \text{ kN}) = 13,0 \text{ kN}$$

$$B = X_1 = -26,0 \text{ kN}$$

$$C = C_0 + C_1 X_1 = 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) (-26,0 \text{ kN}) = 13,0 \text{ kN}$$

(b) Kiertymämenetelmä:

Kuvan 8.2a jännettä vastaava samanarvoinen kuormitus on konstruoitu kuvaa 8.2b käyttäen. Lopputulos on kuvassa 8.2c. Suoraan tuille siirtyviä kuormia ei tarvitse ottaa huomioon palkin analysissä ja ne on senvuoksi ympäröity suluilta kuvassa 8.2c.

Kiertymämenetelmän yhtälöt ovat

$$M_{ij} = a_{ij} \phi_{ij} + b_{ij} \psi_{ij} - c_{ij} \psi_{ji} + MK_{ij}$$

ja

$$M_{ji} = a_{ji}^0 \phi_{ij} - a_{ji}^0 \psi_{ij} + MK_{ji}^0$$

missä

$$\psi_{ij} = \frac{v_j - v_i}{l}$$

on sauvan päiden i ja j välinen ns. sauvaikiertymä. Kaava (b) soveltuu suavaan, jonka pää j on nivelty. Sauvavakiota a_{ij} , $b_{ij} = b_{ji}$ ja a_{ij}^0 sekä kuormitustermejä MK_{ij} ja MK_{ji}^0 on taulukoitu rakenteiden mekaniikan oppikirjoissa. Sauvavakiot c_{ij} saadaan näiden avulla kaavoista

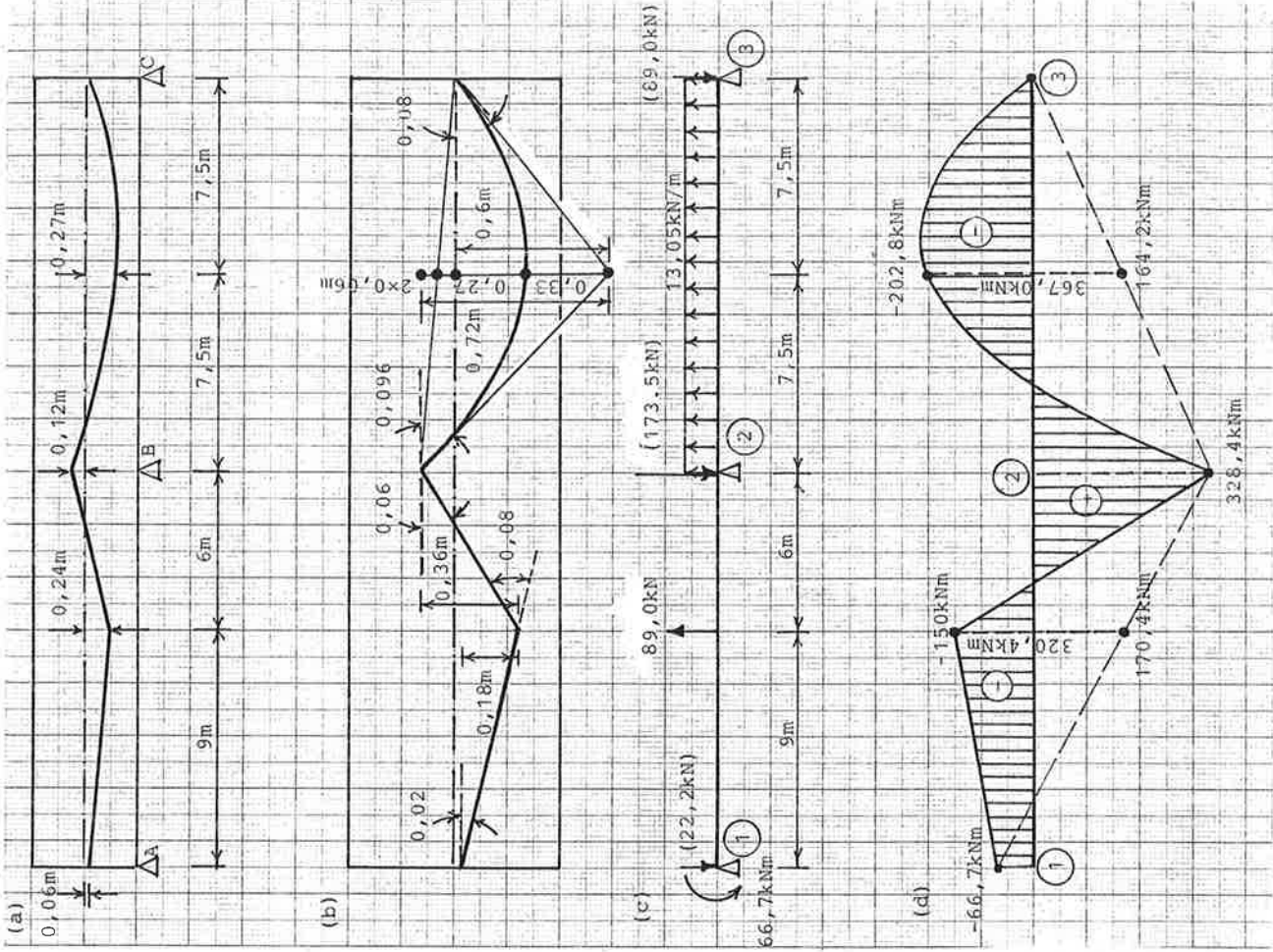
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Sauvavakiot tasajäykälle sauvalle ovat

$$a_{ij} = \frac{4EI}{l}, b_{ij} = \frac{2EI}{l}, c_{ij} = \frac{6EI}{l}, a_{ij}^0 = \frac{3EI}{l}$$

Kuormitustermit tasajäykälle sauvalle, jota kuormittaa pistekuorma F etäisyyksillä a ja b vasemmasta (i) ja oikeasta (j) päästä ovat

$$MK_{ij} = -\frac{Fab^2}{l^2}, MK_{ji} = \frac{Fa^2b}{l^2}, MK_{ij}^0 = -\frac{Fab}{2l^2}(b+l), MK_{ji}^0 = +\frac{Fab}{2l^2}(a+l) \quad (f)$$



Kuva 8.2: Jännepalkki (a) ja sen ratkaiseminen kiertymä- ja momenttimenetelmällä (b)-(d).

Kuormitustermit tasajäykälle saualle, jota kuormittaa pistemomentti M etäisyyksillä a ja b vasemmasta (i) ja oikeasta (j) päästä ovat

$$MK_y = \frac{Mb}{l} \left(2 - \frac{3b}{l}\right), MK_x = \frac{3a}{l} \left(2 - \frac{3a}{l}\right), MK_y^0 = \frac{M}{2} \left(1 - \frac{3b^2}{l^2}\right), MK_x^0 = \frac{M}{2} \left(1 - \frac{3a^2}{l^2}\right). \quad (g)$$

Kuormitustermit tasajäykälle saualle, jota kuormittaa tasainen kuorma q ovat

$$MK_y = -\frac{ql^2}{12}, MK_x = +\frac{ql^2}{12}, MK_y^0 = -\frac{ql^2}{8}, MK_x^0 = +\frac{ql^2}{8}. \quad (h)$$

Kolmas ja neljäs kaavoista (f), (g) ja (h) koskevat tapauksia, joissa vastaavasti palkin oikeassa (j) ja vasemmassa (i) päässä on nivele.

Kuvan 8.2c palkin sauvan 12 kuormitustermiksi MK_{21}^0 saadaan

$$MK_{21}^0 = \frac{-89,0 \text{ kN} \cdot 9 \text{ m} \cdot 6 \text{ m}}{2 \cdot (15 \text{ m})^2} + \frac{-66,7 \text{ kN}}{2} \left(1 - \frac{3 \cdot (9 \text{ m})^2}{(15 \text{ m})^2}\right) = -289,67 \text{ kNm}.$$

Lausekkeen jälkimmäinen termi huomioi nivelellisessä päässä 1 olevan ulkoisen momentin $-66,7 \text{ kNm}$. Sauvan 23 kuormitustermiksi MK_{23}^0 saadaan

$$MK_{23}^0 = -\frac{-13,05 \text{ kN/m} \cdot (15 \text{ m})^2}{8} = 367,03 \text{ kNm}.$$

Sauvanpäämomentille M_{21} saadaan

$$M_{21} = \frac{3EI}{l} \phi_{21} - 289,67 \text{ kNm}$$

ja sauvanpäämomentille M_{23} saadaan

$$M_{23} = \frac{3EI}{l} \phi_{23} + 367,03 \text{ kNm}.$$

Ottamalla nyt huomioon yhteensopivuus ja tasapainoyhtälöt

$$\phi_{21} = \phi_{23} = \phi_2, M_{21} + M_{23} = 0$$

saadaan

$$\frac{6EI}{l} \phi_2 - 77,36 \text{ kNm} \Rightarrow \phi_2 = 12,89 \frac{l}{EI}.$$

Tukimomentille M_2 saadaan lopulta

$$M_2 = M_{21} = \frac{3EI}{l} \left(-12,89 \frac{l}{EI}\right) - 289,63 = -328,4 \text{ kNm}.$$

Kuvassa 8.2d on esitetty lopullinen taivutusmomenttikuvio.

Tukireaktioille R_1 , R_2 ja R_3 saadaan lopuksi

$$R_1 = 22,2 \text{ kN} - \frac{6 \text{ m} \cdot 89,0 \text{ kN}}{15 \text{ m}} + \frac{(66,7 + 328,4) \text{ kNm}}{15 \text{ m}} = 13,0 \text{ kN},$$

$$R_2 = 173,5 \text{ kN} - \frac{9 \text{ m} \cdot 89,0 \text{ kN}}{15 \text{ m}} - \frac{13,05 \text{ kN/m} \cdot 15 \text{ m}}{2} - \frac{(66,7 + 328,4) \text{ kNm}}{2} - \frac{328,4 \text{ kNm}}{15 \text{ m}} = -26,0 \text{ kN},$$

$$R_3 = 89,0 \text{ kN} - \frac{13,05 \text{ kN/m} \cdot 15 \text{ m}}{2} + \frac{328,4 \text{ kNm}}{15 \text{ m}} = 13,0 \text{ kN}$$

(c) Momenttinenetelmä:

Momenttinenetelmän yhtälö on

(a)

$$\phi_{ij} = \alpha_{ij} M_{ij} - \beta_{ij} \phi_{ij} + \psi_{ij} + \alpha_{ij}^0$$

Sauvakotiota α_{ij} ja $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ sekä kuormitustermejä α_{ij}^0 on taulukoitu rakenteiden mekaniikan oppikirjoissa. Sauvakotiot tasajäykälle saualle ovat

$$\alpha_{ij} = \frac{l}{3EI}, \beta_{ij} = \frac{l}{6EI}. \quad (b)$$

Kuormitustermit tasajäykälle saualle, jota kuormittaa pistekuorma F etäisyyksillä a ja b vasemmasta (i) ja oikeasta (j) päästä ovat

$$\alpha_{ij}^0 = \frac{F \cdot ab}{6EI} (b + l), \alpha_{ji}^0 = -\frac{F \cdot ab}{6EI} (a + l). \quad (c)$$

Kuormitustermit tasajäykälle saualle, jota kuormittaa pistemomentti M etäisyyksillä a ja b vasemmasta (i) ja oikeasta (j) päästä ovat

$$\alpha_{ij}^0 = \frac{Ml}{6EI} \left(\frac{3b^2}{l^2} - 1\right), \alpha_{ji}^0 = \frac{Ml}{6EI} \left(\frac{3a^2}{l^2} - 1\right). \quad (d)$$

Kuormitustermit tasajäykälle saualle, jota kuormittaa tasainen kuorma q ovat

$$\alpha_{ij}^0 = \frac{ql^3}{24EI}, \alpha_{ji}^0 = -\frac{ql^3}{24EI}. \quad (e)$$

Kuvan 8.2c palkin, sauvan 12 kuormitustermiksi α_{21}^0 saadaan

$$\alpha_{21}^0 = -\frac{-89,0 \text{ kN} \cdot 9 \text{ m} \cdot 6 \text{ m}}{6 \cdot 15 \text{ m} EI} + \frac{1281,6 \text{ kNm}^2}{EI}.$$

Sauvan 23 kuormitustermiksi α_{23}^0 saadaan

$$\alpha_{23}^0 = -\frac{-13,05 \text{ kN/m} \cdot (15 \text{ m})^3}{24 EI} = \frac{1835,2 \text{ kNm}^2}{EI}.$$

Sauvanpääkiertymälle ϕ_{21} saadaan

$$\phi_{21} = \frac{15 \text{ m}}{3EI} M_{21} - \frac{15 \text{ m}}{6EI} (-66,7 \text{ kNm}) + \frac{1281,6 \text{ kNm}^2}{EI} = \frac{5 \text{ m}}{EI} M_{21} + \frac{1448,35 \text{ kNm}^2}{EI}$$

ja sauvanpäämomentille M_{23} saadaan

$$\phi_{23} = \frac{15 \text{ m}}{3EI} M_{23} - \frac{15 \text{ m}}{6EI} (0 \text{ kNm}) - \frac{1835,2 \text{ kNm}^2}{EI} = \frac{5 \text{ m}}{EI} M_{23} - \frac{1835,2 \text{ kNm}^2}{EI}$$

Ottamalla nyt huomioon tasapaino ja yhteensopivuusyhtälöt

$$-M_{21} = M_{23} = M_2, \phi_{21} = \phi_{23} = \phi_2$$

saadaan

$$\frac{10 \text{ m}}{EI} M_2 - \frac{3283,6 \text{ kNm}^2}{EI} \Rightarrow M_2 = 328,4 \text{ kNm}.$$

8.3 Jatkuvan jännepalkin jänneprofiilin siirtäminen

Jatkuvan jännepalkin suunnittelussa on apua jänneprofiilin ns. ”lineaarisesta” siirtösäännöstä. Sääntö antaa mahdollisuuden jänteen siirtämiseen siten, että momenttipinta ei muutu. Tämän seurauksena eivät myöskään betonin jännitykset muutu. Tämän siirtösäännön mukaan jännettä voidaan siirtää palkin sisäpuolelta, kun samalla huolehditaan siitä, että jänteen kaarevuudet ja taitekulmat kenties eivät muutu. Kuvassa 8.3a on esitetty kaksi jänneprofiilia 1 ja 2, joista jälkimmäinen on saatu lineaarisista

siirtosääntöä käyttäen. Kuvissa 8.3b ja c on esitetty näitä profileja vastaavat samanarvoiset kuormitukset. Nähdään, että vain suoraan tuille siirtyvät kuormat, jotka on kuvissa ympäröity suluilta, eroavat toisistaan. Tämän vuoksi samanarvoisten kuormitusten avulla määritetty momenttipinta (kuva 8.3d) on molemmilla profileilla sama.

Esimerkki 8.2: Määritetään kuvan 8.3b (tai c) jatkuvan jännepalkin taivutusmomenttikuvio käyttäen kolmen momentin yhtälöä.

Kolmen momentin yhtälö on

$$\beta_{(i-1)} M_{i-1} + (\alpha_{(i-1)} + \alpha_{i(i+1)}) M_i + \beta_{i(i+1)} M_{i+1} = \alpha_{i(i-1)}^0 - \alpha_{i(i+1)}^0, \quad (a)$$

missä M_i ovat tukien taivutusmomentin arvot. Sauvavakiot ja kuormitustermit on esitetty esimerkin 8.1 yhteydessä.

Sauvavakioiksi ja kuormitustermeiksi saadaan

$$\alpha_{ij}^0 = \frac{l}{3EI} = \frac{5\text{m}}{EI}, \quad \beta_{ij}^0 = \frac{l}{6EI} = \frac{2,5\text{m}}{EI}$$

ja

$$\alpha_{12}^0 = -\alpha_{21}^0 = \frac{-64,8\text{kN} \cdot (15\text{m})^2}{16EI} = -\frac{911,25\text{kNm}^2}{EI},$$

$$\alpha_{23}^0 = -\alpha_{32}^0 = \frac{-9,76\text{kN} \cdot (15\text{m})^3}{24EI} = -\frac{1372,5\text{kNm}^2}{EI}.$$

Aluksi saadaan kolmen momentin yhtälöiksi

$$\beta_{21} M_1 + (\alpha_{21} + \alpha_{23}) M_2 + \beta_{23} M_3 = \alpha_{21}^0 - \alpha_{23}^0,$$

$$\beta_{32} M_2 + (\alpha_{32} + \alpha_{34}) M_3 + \beta_{34} M_4 = \alpha_{32}^0 - \alpha_{34}^0.$$

Ottamalla huomioon, että $M_1 = 108\text{kNm}$ ja $M_4 = 0$, sekä sijoittamalla numeroarvot saadaan

$$2,5 \cdot 108\text{kNm} + 10 \cdot M_2 + 2,5 \cdot M_3 = (1372,5 + 911,25)\text{kNm}^2,$$

$$2,5 \cdot M_2 + 10 \cdot M_3 = 1372,5\text{kNm}$$

ja edelleen

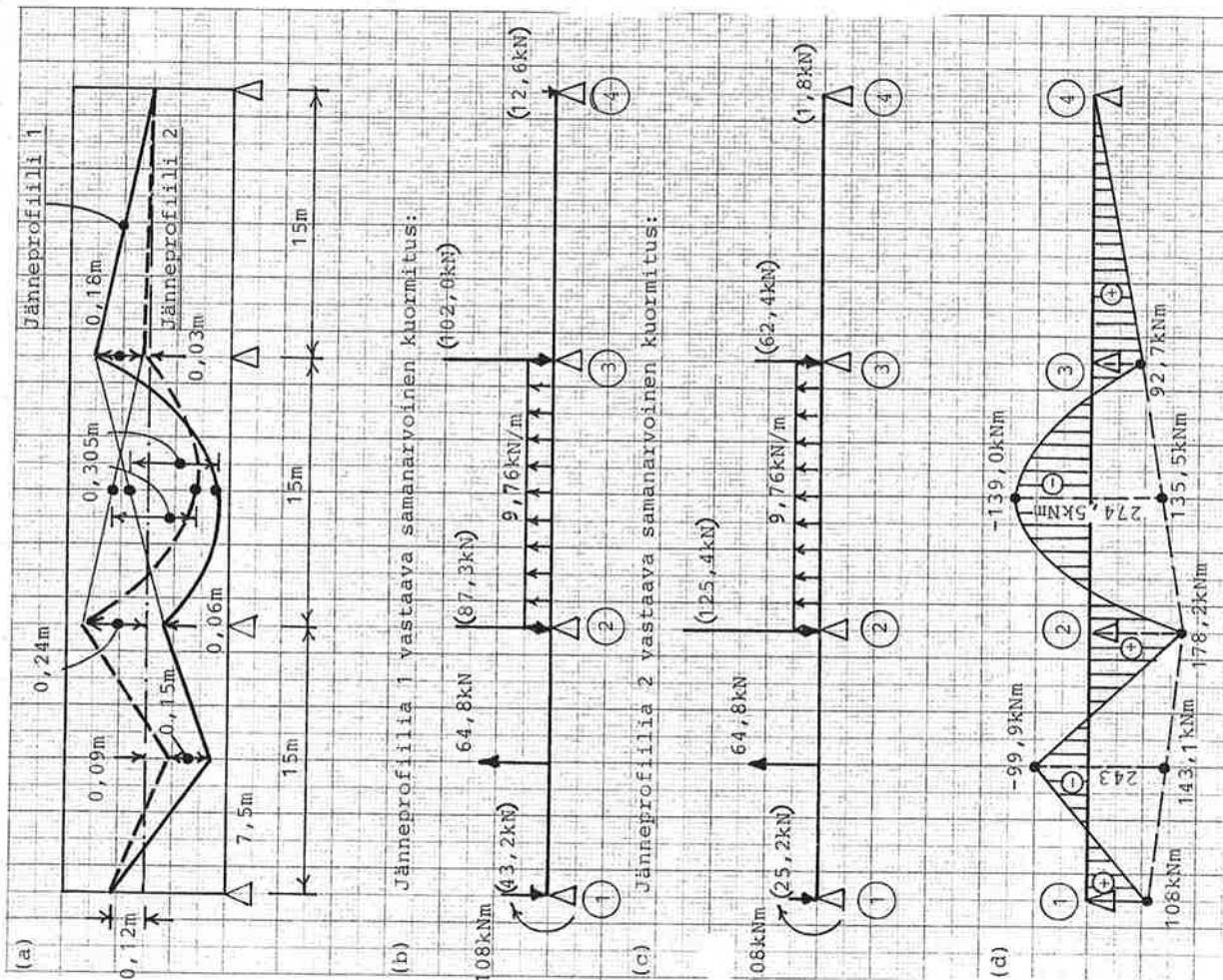
$$4M_2 + M_3 = 805,5\text{kNm}$$

$$M_2 + 4M_3 = 549\text{kNm}$$

ja lopulta

$$M_2 = 178,2\text{kNm}, \quad M_3 = 92,7\text{kNm}.$$

Taivutusmomenttikuvio on kuvassa 8.3d.



Kuva 8.3: Jatkuvan jännepalkin jänneprofiilin "lineaarinen" siirtäminen.

8. LEIKKAUS JA VÄÄNTÖ

8.1 Yleistä

Ulkoinen kuormitus aiheuttaa jännepalkin harvoin pelkkiä taivutusrasituksia. Niiden lisäksi voi esiintyä leikkaus- ja vääntörasituksia.

Yhdessä normaali-jännitysten kanssa leikkaus- ja vääntöjännitykset määrittävät pääveto- ja pääpuristusjännitykset. Jos laskennallinen päävetojännitys ylittää betonin vetolujuuden, muodostuu halkeama ja jos laskennallinen pääpuristusjännitys alittaa betonin puristuslujuuden, se murtuu.

Jos jännepalkissa ei synny halkeamia, ei myöskään periaatteessa tarvita leikkaus- ja/tai vääntöraudoitusta. Käytännössä kuitenkin betoninormit vaativat tietyn vähimmäisraudoituksen mm. palkeille, mutta esimerkiksi laatoille ja kuorille sitä ei yleensä vaadita. Halkeilemattoman jännepalkin pääjännityksiä tarkastellaan tässä kimmoteorian pohjalta soveltaen "voima jätteessä" tarkastelutapaa.

8.2 Halkeilemattoman kappaleen pääjännitykset

Pääjännityksellä ymmärretään sellaisen tason (yksikkönormaali $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$) normaali-jännitystä $\sigma_n = \sigma$, jossa ei esiinny leikkausjännitystä. Tällaisella pinnalla jännitysvektori $\vec{t} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k}$ on pinnan normaalin suuntainen, ts.

$$\vec{t} = \sigma \vec{n} = \sigma n_x \vec{i} + \sigma n_y \vec{j} + \sigma n_z \vec{k}, \quad (8.1)$$

eli matriisimuodossa

$$\{t\} = \sigma \{n\}, \quad (8.2)$$

missä

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}, \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}. \quad (8.3)$$

Toisaalta jännitysvektorin komponenttien ja jännityskomponenttien välillä on yhteydet

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ t_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\ t_z &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z, \end{aligned} \quad (8.4)$$

eli matriisimuodossa

$$\{t\} = [\sigma] \{n\}, \quad (8.5)$$

missä

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

Merkittävällä lausekkeiden (8.2) ja (8.5) oikeat puolet yhtäsuuriksi, saadaan

$$[\sigma] \{n\} = \sigma \{n\}, \quad (8.7)$$

eli

$$([\sigma] - \sigma [I]) \{n\} = \{0\}, \quad (8.8)$$

missä [I] on 3x3 yksikkömatriisi. Yhtälö (8.8) on homogeeninen yhtälöryhmä yksikkönormaalien komponenteille {n} (ts. n_x, n_y ja n_z). Jotta yhtälöryhmällä olisi ei-triviaali ratkaisu, tulee olla

$$\det([\sigma] - \sigma [I]) = 0. \quad (8.9)$$

Tämä on ominaisarvotehtävä, jonka ratkaisuna saadaan kolme pääjännitystä σ_1, σ_2 ja σ_3 . Kutakin pääjännitystä σ_i ($i=1,2,3$) vastaavan pinnan yksikkönormaalien komponentit $\{n\}_i$ saadaan tämän jälkeen yhtälöstä (8.8) sijoittamalla siihen σ :n paikalle σ_i . Koska kyseinen yhtälöryhmä on homogeeninen, tarvitaan lisäksi (yhteyteen $|\vec{n}|=1$ perustuvaa) yhtälöä

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (8.10)$$

8.3 Yhteen suuntaan taivutetun palkin pääjännitykset

Tarkastellaan ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvien normaali-voiman $N(x)$, leikkausvoiman $Q(x)$ ja taivutusmomentin $M(x)$ rasittamaa jännepalkin poikkileikkausta kohdassa x. Sen betoniosaa rasittaa (vrt. kohta 6.2) normaali-voima

$$N_C(x) = N(x) - P \quad (8.11)$$

ja taivutusmomentti

$$M_C(x) = M(x) - Pe(x), \quad (8.12)$$

missä $M(x)$ on ulkoisesta kuormituksesta aiheutuva taivutusmomentti. Koska jännepalkin betoniosalle pätee voimatasapainoyhtälö $Q_C(x) = M'(x)$ ja myös koko palkille pätee vastaava yhtälö $Q(x) = M'(x)$, saadaan jännepalkin betoniosaa rasittavalle leikkausvoimalle tulos

$$Q_C(x) = Q(x) - Pe'(x), \quad (8.13)$$

missä $Q(x)$ on ulkoisesta kuormituksesta aiheutuva leikkausvoima.

Voima jänteessä ajattelun mukaan jännepalkin betoniosaan syntyvä jännitystila voidaan määrittää jännitysresultanteista (8.11)-(8.13) tavanomaiseen tapaan. Toisin sanoen betonin normaali-jännitys on

$$\sigma_C(Y) = \frac{N_C}{A} + \frac{M_C}{I} Y \quad (8.14)$$

ja betonin leikkausjännitys on

$$\tau_C(Y) = \frac{Q_C S(Y)}{I b(Y)}. \quad (8.15)$$

Suureet A ja I ovat poikkipinnan pinta-ala ja jäyhyysmomentti sekä $S(Y)$ on tason y alapuoleisen poikkipinnan osan staattinen momentti pintakeskiön kautta kulkevan vaaka-akselin (z -akseli) suhteen. Laskelmissa voidaan käyttää täyttä poikkipintaa ja tarkemmissa laskelmissa todellista betonipoikkipintaa tai muunnettua poikkipintaa, jossa betoniterästen vaikutus on huomioitu.

Palkin jännitystila on nyt $\sigma_x = \sigma_C$, $\tau_{xy} = \tau_C$ ja $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ja jännitysmatriisiksi saadaan

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

Ominaisarvotehtävä (8.9) saa nyt muodon

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = 0, \quad (8.17)$$

eli

$$\sigma^3 - \sigma_x \sigma^2 - \tau_{xy}^2 \sigma = 0, \quad (8.18)$$

jonka juurina saadaan pääjännityksille

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (8.19a)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (8.19b)$$

ja $\sigma_3 = 0$. Pääjännitysten σ_i ($i=1,2$) suuntien määrittämiseksi saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -\sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

Sen ensimmäinen ja kolmas yhtälö ovat

$$(\sigma_x - \sigma_i)n_x + \tau_{xy}n_y = 0, \quad \sigma_i n_z = 0. \quad (8.21)$$

ja niistä seuraa

$$\frac{n_y}{n_x} = \frac{\sigma_i - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad n_z = 0. \quad (8.22)$$

Nähdään, että pääjännitykset σ_i ($i=1,2$) vaikuttavat x, y -tasossa ($n_z = 0$). Merkitsemällä pääjännityksen σ_i ja x -akselin välistä kulmaa α_i :llä saadaan $n_x = \cos \alpha_i$ ja $n_y = \sin \alpha_i$ ja kaavasta (8.22) seuraa

$$\tan \alpha_i = \frac{\sigma_i - \sigma_x}{\tau_{xy}} \quad (i=1 \text{ tai } 2) \quad (8.23)$$

ja pääjännitysten σ_1 ja σ_2 suuntakulmille saadaan siis kaavat

$$\alpha_1 = \arctan \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad \alpha_2 = \arctan \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \quad (8.24)$$

8.4 Taivutetun ja väännetyn palkin pääjännitykset

Tarkastellaan ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvien normaali-voiman $N(x)$, leikkausvoiman $Q(x)$, taivutusmomentin $M(x)$ ja vääntömomentin $T(x)$ rasittamaa jännepalkin poikkileikkausta kohdassa x . Sen betoniosaa rasittaa kaavojen (8.11)-(8.13) mukaiset normaali-voima N_C , leikkausvoima Q_C ja taivutusmomentti M_C . Lisäksi vaikuttaa vääntömomentti

$$T_C(x) = T(x). \quad (8.25)$$

Vääntömomentista T_C betonipoikkileikkaukseen aiheutuvat leikkausjännitykset $\tau_{xyz}(y,z)$ ja $\tau_{zxc}(y,z)$ voidaan määrittää Saint Venant'in vääntöteoriaan perustuen. Niiden määrittäminen ei kuitenkaan ole yhtä helppoa kuin (yksiakselisesta) taivutuksesta aiheutuvan normaali-jännityksen $\sigma_C(y)$ ja leikkausjännityksen $\tau_C(y)$.

Seuraavassa tarkastellaan Saint Venant'in vääntöteorian pohjalta lyhyesti, kuinka lineaarisesti kimmoisen sauvan poikkeileikkaukselle, joka on homogeeninen (leikkausmoduuli G =vakio) ja täysi (ei reikiä), voidaan määrittää vääntöjähyysmomentti I_t sekä vääntömomentista T poikkeileikkauksen pisteeseen (y, z) syntyvät leikkausjännitykset τ_{xy} ja τ_{xz} .

Saint Venant'in vääntöteoriassa otetaan lähtökohdaksi vasaemmasta päästä $x=0$ kiinnitetty ja oikeasta päästä $x=L$ vääntävällä momentilla T kuormitettu sauva. Sen siirtymille pisteessä (x, y, z) otaksutaan lausekkeet

$$u = \theta \psi(y, z), \quad v = -\theta xz, \quad w = \theta xy, \quad (8.26)$$

missä θ on vääntymä, jolla tarkoitetaan pituusyksikön vääntökulmaa, ja $\psi(y, z)$ on ns. käyrästymisfunktio. Siirtymäotaksu (8.26) merkitsee sitä, että kuormitettaessa poikkeileikkaus ei pysy tasona vaan käyristyy mutta poikkeileikkauksen projektiio y, z -tasossa kiertyy jäykän kappaleen tavoin. Sauvan muodonmuutoksille pisteessä (x, y, z) saadaan nyt

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (8.27a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right). \quad (8.27b)$$

Havaitaan siis, että vain liukumät γ_{xy} ja γ_{xz} ovat nollasta eroavia. Näitä vastaten esiintyy vain leikkausjännitykset τ_{xy} ja τ_{xz} . Niille saadaan Hooken lain perusteella

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right), \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right). \quad (8.28)$$

Kolmidimensioisen kappaleen x -akselin suuntainen tasapainoyhtälö

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (8.29)$$

saa (kun tilavuusvoiman f_x otaksutaan häviävän) muodon

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0. \quad (8.30)$$

Muut kaksi tasapainoyhtälöä osoittautuvat toteutuvan identtisesti. Kaavojen (8.28) avulla nähdään helposti, että

$$-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + 2G\theta = 0. \quad (8.31)$$

Traktiokomponenteille sauvan sivupinnalla ($n_x = 0$) saadaan kaavan (8.4)

perusteella

$$\tau_x = \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \quad \tau_y = 0, \quad \tau_z = 0. \quad (8.32)$$

Koska sauvan sivupinta on kuormittamaton tulee myös olla $\tau_x = 0$, josta seuraa yhtälö

$$n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} = 0. \quad (8.33)$$

Tasapainoyhtälö (8.30) ja yhteensopivuusyhtälö (8.31) muodostavat nyt ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöparin, jonka määrittelyalue on poikkipinta A . Yhtälö (8.33) on tämän osittaisdifferentiaaliyhtälöparin reunaehtoyhtälö, jonka tulee olla voimassa poikkipinnan reunalla s . Nämä yhtälöt muodostavat reuna-arvoprobleeman leikkausjännitysten $\tau_{xy}(y, z)$ ja $\tau_{xz}(y, z)$ määrittämiseksi.

Vääntötehtävään liittyvä reuna-arvoprobleema voidaan yksinkertaistaa ottamalla käyttöön uusi tuntematon ns. vääntöjännitysfunktio $\phi(y, z)$, jonka avulla leikkausjännitykset lausutaan kaavoilla

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (8.34)$$

Sijoittamalla nähdään heti, että vääntöjännitysfunktion avulla lausuttu leikkausjännitykset (8.34) toteuttavat tasapainoyhtälön (8.30). Sijoittamalla leikkausjännitykset (8.34) yhteensopivuusyhtälöön (8.31) saadaan

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2G\theta = 0, \quad \text{poikkipinnalla } A. \quad (8.35)$$

Sijoittamalla ne vielä reunaehtoyhtälöön (8.33) saadaan aluksi

$$-n_y \frac{\partial \phi}{\partial z} + n_z \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \Rightarrow \phi = \text{vakio} \quad \text{reunalla } s. \quad (8.36)$$

Jos poikkipinta on täysi, vakioksi voidaan ottaa nolla ja reunaehto saa muodon

$$\phi = 0 \quad \text{reunalla } s. \quad (8.37)$$

Yhtälöt (8.35) ja (8.37) muodostavat nyt toisen kertaluvun reuna-arvoprobleeman vääntöjännitysfunktion $\phi(y, z)$ määrittämiseksi. Tämä probleema on kvasiharmonisen reuna-arvoprobleeman (vrt. elementtimenetelmän perusteet) erikoistapaus, jossa johtavuuksilla on arvot $k_x = k_y = 1$, lähdetermi on $Q = 2G\theta$ ja koko reunalla on oleellinen reunaehto, jossa $\bar{\phi}(s) = 0$. Probleema voidaan ratkaista elementtimenetelmällä jakamalla poikkipinta elementtiverkkoon. Kun vääntöjännitysfunktio $\phi(y, z)$ tunnetaan, voidaan leikkausjännitykset määrittää kaavoilla (8.34).

Poikkipinnan vääntömomentti T on sillä vaikuttavan leikkausjännityskentän momentti palkin pintakeskiöakselin (x -akseli) suhteen. Sen määrittelykaava on täten

$$T = \int_A (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA. \quad (8.38)$$

Sille saadaan

$$T = - \int_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z \right) dA = - \int_A (\eta_y y + \eta_z z) \phi dA + \int_A (\phi + \theta) dA = 2 \int_A \phi dA. \quad (8.39)$$

Yhtälöketjun (8.39) toisen yhtäsuuruusmerkin kohdalla käytettiin osittaisintegrointia ja kolmannen yhtäsuuruusmerkin kohdalla otettiin huomioon reunaehto (8.37). (Vääntömomentti saadaan siis integroimalla jännitysfunktio poikkipinnan yli ja kertomalla tulos kahdella.)

Vääntömomentin sauvan vääntömomentin ja vääntymän yhteys on

$$T = GI_t \theta, \quad (8.40)$$

missä I_t on vääntöjäyhysmomentti ja tuloa GI_t kutsutaan vääntöjäykkyydeksi. Kaavojen (8.39) ja (8.40) perusteella saadaan vääntöjäyhysmomentille kaava

$$I_t = \frac{2}{G\theta} \int_A \phi dA. \quad (8.41)$$

Vääntömomentin T rasittaman poikkileikkauksen resultoivan vääntöjännityksen

$$\tau_t = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (8.42)$$

arvo poikkileikkauksen tietyssä pisteessä (esimerkiksi pisteessä, joissa sillä on suurin arvo) voidaan ilmaista ns. vääntövastuksen W_t avulla muodossa

$$\tau_t = \frac{T}{W_t}. \quad (8.43)$$

Poikkileikkauksen pisteeseen (Y_0, z_0) liittyvän vääntövastuksen määrittämiseksi, kun vääntöjännitysfunktio $\phi(Y, z)$ tunnetaan, saadaan kaavojen (8.34), (8.39), (8.42) ja (8.43) perusteella näin kaava

$$W_t = \frac{T}{\tau_t(Y_0, z_0)} = \frac{GI_t}{\sqrt{\left[\frac{\partial \phi}{\partial y}(Y_0, z_0) \right]^2 + \left[\frac{\partial \phi}{\partial z}(Y_0, z_0) \right]^2}}. \quad (8.44)$$

Mielivaltaisen muotoisen (täyden) poikkipinnan vääntöjäyhysmomentti I_t ja sen haluttuihin pisteisiin liittyvät vääntövastukset W_t voidaan määrittää ratkaisemalla yllä kaavailtu reuna-arvoprobleema (8.35) ja (8.37) sekä soveltamalla sen jälkeeseen kaavoja (8.41) ja (8.44). Koska analyytinen ratkaisu löytyy vain hyvin yksinkertaisissa tapauksissa, joudutaan tavallisesti turvautumaan elementtimenetelmään. Leikkausmoduulin ja vääntymän arvot eivät vaikuta lopputulokseen, joten tulolle $G\theta$ voidaan ottaa arvoksi vaikkapa ykkönen. Erilaisissa lujuusopin ja rakenteiden mekaniikan oppikirjoissa on taulukoita monien käytännössä esiintyvien poikkipintojen vääntöjäyhysmomentteille ja vääntövastuksille.

Jos palkki on sekä taiputettu että väännetty, ei riitä että voimme määrittää vain resultoivan vääntöjännityksen τ_t , vaan meidän täytyy tuntea molemmat leikkausjännitykset τ_{xy} ja τ_{xz} (tai τ_t :n lisäksi sen suunta). Tällöin tarvitaan kaksi vääntövastusta W_{ty} ja W_{tz} , joiden avulla poikkipinnan halutun pisteen (Y_0, z_0) leikkausjännitykset saadaan kaavoilla

$$\tau_{xy} = \frac{T}{W_{ty}}, \quad \tau_{xz} = \frac{T}{W_{tz}}. \quad (8.45)$$

Niiden määrittämiseksi saadaan helposti kaavat

$$W_{ty} = \frac{G\theta I_t}{\frac{\partial \phi}{\partial z}(Y_0, z_0)}, \quad W_{tz} = - \frac{G\theta I_t}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(Y_0, z_0)}. \quad (8.46)$$

Yhteen suuntaan (xy -tasossa) taiputetun ja väännetyin jännepalkin tarkasteltavan pisteen jännitystila on nyt $\sigma_x = \sigma_c$, $\tau_{xy} = \tau_c + \tau_{xyz}$, $\tau_{xz} = \tau_{xzc}$ ja $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$ ja jännitysmatriisiksi saadaan

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

Ominaisarvotekävä (8.9) saa nyt muodon

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & -\sigma & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = 0,$$

eli

$$\sigma^3 - \sigma_x \sigma^2 - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) \sigma = 0, \quad (8.48)$$

jonka juurina saadaan pääjännityksille tulokset

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}, \quad (8.49a)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (8.49b)$$

ja $\sigma_3 = 0$. Pääjännitykset σ_1 ja σ_2 eivät kuitenkaan enää vaikuta x, y -tasossa, kuten yhteen suuntaan taivutetun jännepalkin tapauksessa. Tämä voidaan nähdä, kun määritetään niiden suuntiin liittyvät yksikönnormaalien komponentit $\{n\}_1$ ja $\{n\}_2$.

Myös kahteen suuntaan taivutetun sekä kahteen suuntaan taivutetun ja väännetyn jännepalkin jännitystila on sellainen, että $\sigma_x \neq 0$, $\tau_{xy} \neq 0$, $\tau_{xz} \neq 0$ ja $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. Pääjännitysten määrittäminen tapahtuu siis myöskin näissä tapauksissa kaavoilla (8.49).

Ulkolaista kirjallisuutta:

1. Collins, M.P. and Mitchell, D., Prestressed Concrete Basics. Canadian Prestressed Concrete Institute (CPCI), Ottawa 1987, 614 s.
2. Lin T.Y. and Burns, N.H., Design of Prestressed Concrete Structures, Third Edition (SI version). John Wiley & Sons, New York, 1982, 646s.
3. Libby, J.R., Modern Prestressed Concrete Design Principles and Construction Methods, Fourth Edition. Van Nostrand Reinhold, New York 1990, 871s.
4. Hurst M.K., Prestressed Concrete Design, Chapman and Hall, London 1988, 262s.
5. Naaman A.E., Prestressed Concrete Analysis and Design Fundamentals. McGraw-Hill, New York 1982, 670s.

Kotimaista kirjallisuutta:

6. Betoninormit, Suomen Betoniyhdistys r.y., by 15, 5. painos, Jyväskylä 1990, 184s.
7. Vuorinen J., Betonisanasto, Suomen Betoniyhdistys r.y., by 11, Jyväskylä 1983, 258s.
8. Paasikallio K., Mikkola M. ja Nyman K.-G., Jännebetonirakenteiden mekaniikka ja mitoitus, Suomen Betoniyhdistys r.y. kurssijulkaisut, by 131, 1986, 176s.
9. Jännitetyt rakenteet, Suomen Betoniyhdistys r.y. kurssijulkaisut, by 113, 1981, 241s.
10. Saarinen E., Soini R., Tiira S., Ulvinen S., Kähkönen L. ja Kinnunen J., Betonirakenteiden suunnittelun oppikirja (osat 1, 2 ja 3), Suomen Betoniyhdistys r.y. kurssijulkaisut, by 202, Jyväskylä 1986, 664s.